数园撷英

张文忠 编著

科学普及出版社

内 容 提 要

本书选择了12个世界著名的数学问题，如：计算得最久的无理数π，证明方法最多的勾股定理，证明过程最长的四色定理，现在所知的最大素数，悬赏最高的数学猜想（费尔马大定理），……按其起源、意义、研究历史及问题的现状，作了浅显的介绍。

书中尽量避开了较专门的数学理论的叙述，又穿插了有关的数学家的故事，使本书不但有知识性，而且富有趣味性，适于有初中以上文化水平的读者阅读。

数 园 撷 英

张 文 忠 编著

责任编辑：吴之静

封面设计：窦桂芳

*

科学普及出版社出版（北京海淀区魏公村白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京怀柔孙史山印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：3 1/2 字数：76千字

1983年9月第1版 1983年9月第1次印刷

印数：1—18，000册 定价：0.36元

统一书号：13051·1289 本社书号：0407

前　言

在数学领域里有很多令人感兴趣的问题，这本小册子就是重点地采撷这些著名而有趣的问题汇编而成的。我把它献给对数学感兴趣的青少年，献给在中小学教数学课的辛勤园丁。

对所编选的每个问题，我希望能通俗而生动地对它的由来和发展作一个系统而简明的介绍，它记录了数学家们在科学的道路上勇敢攀登的往事。在编写中绕过了一些较深的数学内容和公式，因此具有初中文化程度的读者就能轻松愉快地阅读它。愿数学家们在攻克数学难题时用心血浇灌的株株奇葩能提高青少年对数学的兴趣，激励他们在学习的道路上坚持不懈，永远向前！

限于编者学识浅薄，其中错误定难避免，恳切地希望识者能给予指正。

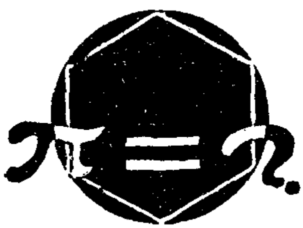
编　者

1981年于邛海之滨

目　　录

一、计算得最久的一个无理数

——圆周率π的马拉松计算



圆，它是人们最早认识的一种曲线，也是人们用得最多的一种曲线。

还在遥远的古代，火红的太阳、皎洁的明月、清晨的露珠，以至动物的眼睛，都给人以圆的启示。

现在，从日常用品到公路上滚滚的车轮、工厂里飞转的机器，到处都有圆形的产品。人们的生活真是和圆结下了不解之缘。

人们很早就知道，圆的周长和直径的比是一个常数，它与直径的大小无关(你能证明这个结论吗？)，我们把这个常数叫做圆周率。现在大家都知道圆周率是一个无理数，表示它的符号是π，它大约等于3.14。你知道圆周率的值是怎样计算的吗？你知道人们为认识这个数曾付出过多少心血和经历了何等漫长的岁月吗？那可真是一个延续了两千多年的马拉松计算啊！

第一个找到计算方法的人

很早以前人们就从实际测量中估计出圆周长约是直径的

3 倍。我国公元前二世纪的科学著作《周髀算经》就有了“周三径一”的记载。后来不少的数学家发现这个比率太小（它实际上是圆的内接正六边形的周长与直径的比），他们逐渐把它改得更精确一些。例如我国东汉时代的数学家（公元一世纪）就曾将圆周率改为$\sqrt{10}\approx3.16$。

第一个找到圆周率计算方法的人是我国三国时代的著名数学家刘徽，他在公元263年首创了利用圆的内接正多边形的面积接近于圆的面积的方法来计算圆周率。

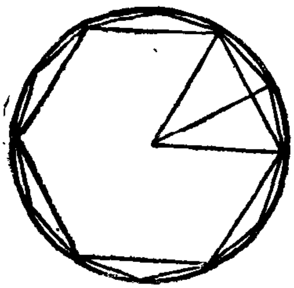


图 1

我们用现在大家熟悉的表达方式来简述它。刘徽是从内接正 6 边形算起的（如图 1），他取圆半径$R=1$，则内接正6边形的边长$a_6=1$，周长$P_6=6$，圆的面积$A=\pi\cdot1^2=\pi$。接着他利用已知圆的内接正n边形的边长来求内接正$2n$边形边长a_{2n}的公式（这公式容易利用勾股定理证明）

$$a_{2n}=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-a_n^2}}$$

算出了内接正12边形的边长

$$a_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1}}=\sqrt{2-\sqrt{3}}。$$

他逐步推算，直到圆的内接正96边形的边长：

$$a_{24}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}},$$

$$a_{48}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$a_{96}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

他还巧妙地利用公式

$$S_{2n}=n\times\frac{Ra_n}{2}$$

算出了96边形和192边形的面积(式中S_{2n}表示正$2n$边形的面积)，最后他利用不等式

$$S_{2n}<A<S_{2n}+(S_{2n}-S_n)$$

定出了A(即是π)的不足近似值和过剩近似值。上面这个公式和不等式容易从图2中看出，图中AB表示a_n，AC表示a_{2n}。于是得到

$$3.141024<\pi<3.142704,$$

比较这两个数，刘徽得到了π的准确到小数点第二位的值：

$$\pi\approx 3.14$$

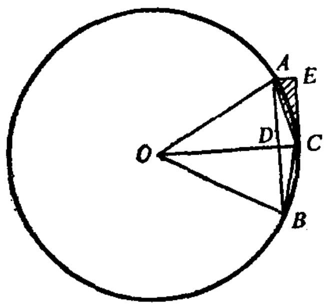


图 2

为纪念他的贡献，后人把他创立的这种具有极限思想的方法称为刘徽割圆术，而把他所得到的3.14叫做徽率。

经过了一千二百多年，法国数学家韦达才找到了类似的计算方法。

一千年的纪录保持者

公元460年我国南朝的著名科学家祖冲之把圆周率的计算大大推进了一步，成了世界上第一个把π计算得准确到小数点第7位的人。祖冲之仍然采用刘徽割圆术，一直算到圆的内接正12288(即6×2^{11})边形的边长，并如上面一样算出

了正12288和24576边形的面积后得到

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

由此推得

$$\pi\approx3.1415926$$

他在用公式

$$a_{6\times2^{11}}=\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}_{12重根号}$$

计算内接正12288边形的边长时，需要进行12重根号运算。若你现在用纸笔来计算它，也需要花很多力气，而在南朝的时候，没有现在的运算方法和计算工具，祖冲之只有用小竹块(或骨块)制作的算筹在地上摆出数字和计算过程。这需要付出多么艰巨的劳动啊！

祖冲之还找到了两个近似于π的分数值，一个是$\frac{22}{7}$，它比π约大0.0012，称为约率，另一个是

$$\frac{355}{113}\approx3.1415929$$

它仅比π约大0.0000002，称为密率。这后一个分数的发现也是祖冲之空前的杰作，后来人们证明所有分母不超过113的分数，祖冲之找到的$\frac{355}{113}$是π的近似值中最好的一个。祖冲之把他得到的结果写进了他的数学著作《缀术》中，但这本著作流行六百年后就失传了，使后人不知道他是怎样发现这个分数的。为纪念祖冲之的卓越贡献，日本数学家曾建议把他得到的这个值称为祖率。

祖冲之取得的这个π值计算的世界纪录保持了一千多年，

它闪耀着我国古代文化的光辉。直到十六世纪欧洲的数学家安托尼兹才重新发现这个值，算是平了这个纪录。

奇特的数字墓碑

十六世纪末，祖冲之的纪录被荷兰数学家卢道尔夫打破了。卢道尔夫经过长期艰苦的计算，于1596年公布了圆周率准确到小数点后第15位的值，以后又用他的全部心血一直把它算到小数点后35位数字。1610年他逝世后，人们在莱顿这个地方给他立了一个奇特的墓碑，那上面没有赞美的颂歌，只有他所求得的圆周率的近似值：

$$3.14159265358979323846264338327950288$$

每当行人路过墓前，望着这质朴无华的碑文，都深深感到这数学语言在无声地赞颂卢道尔夫的贡献。为纪念他，那里的人把他得到的这个数称为卢道尔夫数。

一个简明的符号——π

对圆周率各国有各自不同的称呼，这给书写和文化交流带来很大的不便。英国数学家奥特雷得在1647年开始用$\frac{\pi}{\delta}$来表示圆周率，这里π是希腊文$\pi\epsilon\rho\iota\varphi\epsilon\iota\alpha$（圆周）的第一个字母，$\delta$是$\delta\iota\alpha\mu\epsilon\tau\rho o\nu$（直径）的第一个字母。后来英国数学家琼斯想到当直径为1时圆周与直径的比值就等于圆周率，因此他在1706年首次提出用字母π表示圆周率；1737年大数学家欧拉也在他的著作中用π表示圆周率。从此π在数学书中成了一个不同国籍的人都能看懂的符号。在这个简明符号所代表的数值中，记录着数学家勇敢探索、艰苦攀登的足迹。

最初，数学家希望能找到一个能准确表达π值的分数，在各种尝试都失败了以后，人们明白了这个分数是不存在的。在前一个世纪中数学家勒让德和林德曼都先后用不同的方法证明了π是一个无理数。后来又证明了π这无理数还不可能是一个代数方程的根。数学家探索中的进程也象π这个数一样：永不循环，无止无休……。

计算方法的不断更新

各国数学家不断地寻找π的更好的计算方法，他们找到了π的各种各样的表达式。

十五世纪法国数学家韦达找到了与刘徽割圆术类似的计算方法，他是用圆的内接正4、8、16、…，2^n、…边形的周长逼近圆周长的方法去计算π的。他得到的公式是

$$\pi = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\cdots\cdots$$

这公式也可改写成

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots\cdots$$

1650年瓦里斯把π表示成下面的无限个因式乘积的形式

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots$$

数学家欧拉证明了

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots$$

同时，莱布尼兹和格里高利又分别发现了

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$

上面每一个公式看来都不太复杂，但要用它们来把π值计算得足够准确的话，都需要有极大的耐心和用很长的时间。比如你若想用上面最后一个公式把π计算得准确到第6位数字，你必须要计算公式的前2,000,000项！

1777年法国数学家蒲丰还发现了一个不需繁冗的计算就可算出π的近似值的方法。这方法如图3的投针实验：在平面上画一组距离为a的平行线，向平面任意投一长度为l ($l<a$)的针，若投针次数为n，针与平行线中任一条相交的次数为K，则有

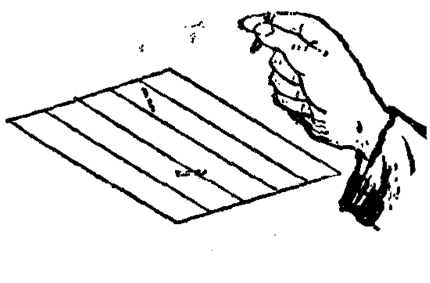


图 3

$$\pi=\frac{2ln}{aK}$$

这个方法的证明容易从初等概率或趣味数学一类书中找到。很多人作过这个实验，按记载最好的一次（1901年）是仅投针3408次就得到了$\pi=3.1415929$。你有兴趣试一试吗？如果你把针长取得$l=\frac{a}{2}$，计算将简化为$\pi=\frac{n}{K}$。

π的计算方法的最大突破是找到了它的反正切函数表达

式。在微积分学中证明了

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \qquad -1 < x \leqslant 1。$$

1706年数学家马青首先发现

$$\pi = 16\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

这个公式用正切的倍角公式能加以证明。用它来计算 π，只要按反正切函数的展开式计算 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$ 的前 6 项并计算 $\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ 的前 2 项，我们就可在十几分钟里算出 $\pi \approx 3.14159265$，它比祖冲之的结果还提高了一位。数学家高斯和斯图模等随后也分别找到了 π 的不同的反正切表达式。近代计算 π 值就是利用他们的方法。

人工计算π值的最高纪录

新的计算方法大大加快了 π 的计算速度，有人决心要刷新纪录。1873年一个名叫沈克士的人，公布了一个 π 的数值，他的数目在小数点后共有707位之多！1946年曼彻斯特大学的费林生和华盛顿的连契又各自把 π 算到了小数点后808位，并且发现沈克士的结果从小数点528位以后发生了错误。一数之差使沈克士空费了很多力气。电子计算机的问世才宣告了这个耗时费力的马拉松人工计算的结束，也使得小数点后808位成了人工计算 π 值的最高纪录。

竞赛还在继续

电子计算机以人力不能比拟的速度加入了竞赛的行列。在五十年代第一次计算 π 时电子计算机是利用斯图模找到的

公式❶，只用了8小时43分就把π值算到了小数点后10万位！它再用高斯的公式❷花了8小时零1分就验算了一次，结果准确无误。后来计算速度越来越快，一些数学工作者希望能用最短的时间计算出π的小数点后一百万位的值。

用电子计算机计算π值的最高纪录是由美国数学家道纳德（*Donald, E.K.*）在本世纪七十年代获得的，他将π值推进到了小数点后150万位，这个长得惊人的小数印出来是一本厚达300页的书。虽然这是一本极其枯燥无味的书，但它却算得上是显示电子计算机计算威力的一座丰碑。

在计算机竞赛的同时，另一个记忆竞赛又围绕π开展了起来。对于记忆力特强的人来说，常常能把这个无规律的数字记住很多位。π的数值被公认为检验机械记忆力的最好标准。我国的茅以升教授在近80的高龄还能把π背诵到小数点后百余位。1957年一名英国人可背诵到小数点后5,050位。他的纪录只保持了一年，1958年加拿大一位17岁的学生把π背诵到了小数点后8,750位。现在的最新纪录是日本索尼电器公司的一名职员创造的，他竟把π背诵到了小数点后20,000位！被称为世界上记忆力最强的人。

你对π能记住多少位？你一定记得$\pi\approx3.14$。可能你还记得$\pi\approx3.1415926$。你不必为你不能记得更多而遗憾，能记住祖冲之的结果就足够你应用了。

---

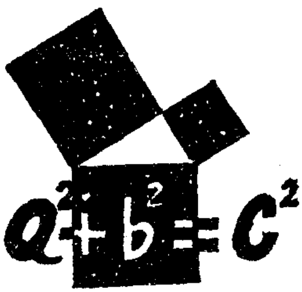
❶ $\pi = 24\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8} + 8\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{57} + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{239}$

❷ $\pi = 48\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{18} + 32\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 20\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$

二、证明方法最多的数学定理

——漫谈勾股定理

毕达哥拉斯的庆祝活动



一提到勾股定理，你一定是非常熟悉的：“直角三角形斜边的平方等于两条直角边的平方和”。它是数学中应用最广的定理之一。两千多年来数学家对这个定理也研究得特别多，就以证明方法来说，有人就曾收集过370多种证明方法，这使得勾股定理也成了证明方法最多的一个数学定理。

远在公元前五世纪，古希腊的著名数学家毕达哥拉斯就发现并证明了这个定理。他当时就预见到这个定理在数学中有十分重要的作用，马上叫人宰了一百头牛来举行庆祝。由于他最早发现勾股定理，因此不少国家把这个定理叫作毕达哥拉斯定理。

勾股定理名称的由来

我们勤劳智慧的祖先早在纪元前就独立地发现了直角三

角形的这个性质。公元前一世纪我国西汉时期的科学著作《周髀算经》就曾记载过这个性质，为纪念我国光辉灿烂的古代文化，因此把它按我国的习惯取名。

相传我国古代把脚叫做句（当时句的一种读音为勾），把腿叫做股。因为人站立时脚和腿是相互垂直的，所以把直角三角形的两条直角边分别叫做句和股。由于腿比脚长，便把较短的直角边叫做句，把较长的直角边叫做股。如果用绳子把脚和腿（或句和股）连起来，就象弓上的弦一样，因此斜边称为弦。

在我国古时候，人们用标杆和日影进行天文测量，把垂直于地面的标杆看成腿，叫它作股；把标杆在地面上的日影看成脚，叫它为句，因此把直角三角形称为句股形。当时“两条直角边的平方和等于斜边的平方”这个定理便叙述成了“句股的平方和等于弦的平方”。这就形成了句股定理这个名称。

后来我国的句股定理传到了日本等国家，他们很重视这个定理，日本把“句、股、弦”改写成了“钩、股、弦”。我国后来又把“钩”写成“勾”，因此我们现在称它为“勾股定理”。

你会证明勾股定理吗？

在勾股定理形形色色的证明方法中，多数是采用面积割补的方法。因为勾股定理也可用下面的形式叙述出来：“直角三角形斜边上所作的正方形的面积等于两直角边上所作正方形面积的和”，这正如前面题图所示。

我国古代是利用图 4 来证明勾股定理的。这图形由四个

全等的直角三角形围成一个大的正方形，中间空白部分正方形的边长恰好等于直角三角形的斜边。我们把图 4 改拼成图 5 的形状，显然图 5 的总面积与图4的总面积相等，因此它们空白部分的面积也应当相等。而图 5 的两个小的空白正方形恰好分别是两条直角边作边长的正方形，即是证得了“斜边所作正方形的面积等于两直角边上所作面积的和”。

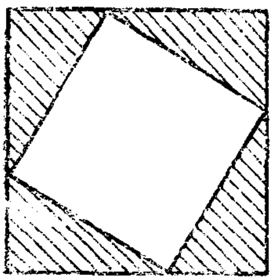


图 4

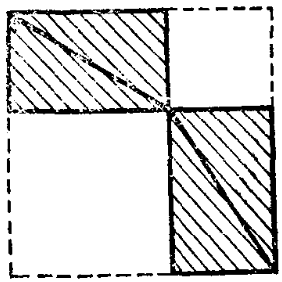


图 5

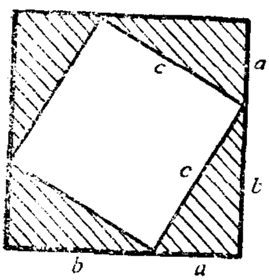


图 6

把面积写成代数式进行恒等变形来证明上面的结论也是很方便的。例如在图 4 中，我们把直角三角形的勾、股、弦分别用 a、b、c表示（如图 6），则图形总面积为$(a+b)^2$，四个直角三角形每个的面积都为$\frac{1}{2}ab$，空白正方形的面积为c^2。于是有等式

$$c^2+4\times\frac{1}{2}ab=(a+b)^2$$

化简即得　$c^2=a^2+b^2$

我国古代也常用图 7 来证明勾股定理，类似于上面的推

理，你容易得到等式

$$c^2=(b-a)^2+4\times\frac{1}{2}ab$$

化简即得$c^2=a^2+b^2$

把勾、股、弦上所作的正方形进行面积割补是很多国家证明勾股定理的主要方法。下面图8、图9、图10的三种割补证法是具有代表性的。看图时请注意编号相同的两块图形是面积相等的（且是全等的图形）。你能看清这三种图形的割补方法吗？如果有兴趣的话，你还可以试一试能不能另外想出一个割补的方法来。

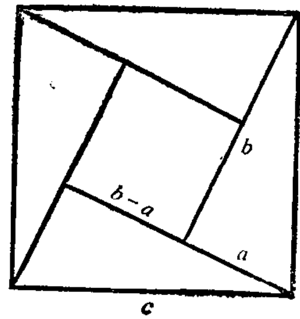


图 7

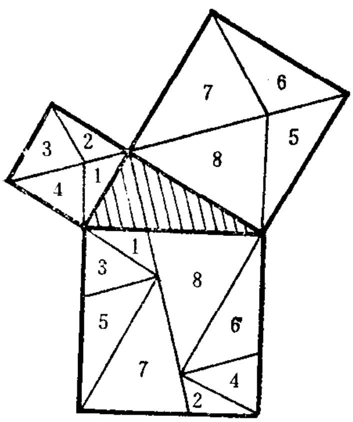


图 8

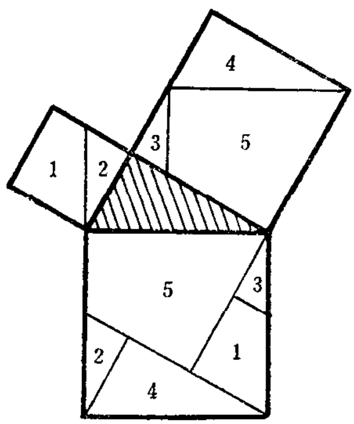


图 9

你最熟悉的可能是利用相似三角形(或利用射影定理)的证明方法吧？如图11，在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，作$CD\perp AB$于D。

可由$\triangle ACD\backsim\triangle ABC$得 $AC^2=AB\cdot AD$，再由$\triangle BCD\backsim\triangle ABC$得 $BC^2=AB\cdot BD$