LM
朗曼专题

北京朗曼教学与研究中心教研成果

• 学科专题研究系列丛书 •

主编 张仁端

数学专题研究

ShuXueZhuanTiYanJiu

总主编 宋伯涛

三角函数

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

三角函数

主编　张仁端

中国青年出版社

责任编辑:李 培 广
封面设计:Paul Song

三角函数

主编 张仁端

*

中国青年出版社出版 发行
社址:北京东四12条21号 邮政编码:100708
三河欣欣印刷有限公司印刷 新华书店总经销
*
850×1168 1/32 6.375印张 180千字
2001年8月北京第1版 2001年8月北京第1次印刷
定价:8.00元
ISBN 7-5006-4546-5/O · 27

敬告读者

《学科专题研究》系列丛书为作者精心之作，作者值此出版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋，共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《学科专题研究》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，请读者认准封面上“朗曼专题”、“北京朗曼教学与研究中心教研成果”等字样，以防假冒。凡以《朗曼专题》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局100101－89号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

出版前言

展望二十一世纪教育发展的未来，必将是以学生素质全面发展为前提，通过减轻学生过重的学业负担，还学生一个宽松的、有更多自由选择、自主学习的发展空间。从而做到有效地培养学生的创新意识和实践能力。这将是教育改革的一种必然趋势。为此，国家教委进行高考课程改革，推广试用新教材。在这种情况下，我们的助学用书如何适应这一变化，并与素质教育的要求相匹配呢？基于这样的思考与愿望，我们按照新教材的体系，将新教材中有关章节的内容有机组合，编写一套既相互联系，又自成体系的《数学专题研究》系列丛书。

本丛书共13分册，分别为：1.集合与简易逻辑；2.函数及其性质；3.数列、极限、数学归纳法；4.三角函数；5.向量；6.方程与不等式；7.排列、组合和概率；8.直线、平面、简单几何体；9.直线与二次曲线；10.怎样解高中数学选择题；11.怎样解高中数学应用题；12.高中数学解题方法集锦；13.高中数学重点问题详析。

本丛书在编写过程中，始终坚持以高中新教材为基础、以高考的内容和要求为主线、还兼顾拓展学生视野和进行强化训练，并有意识地引导学生亲历"做数学"的过程，并且最终得出结论。因为，与具体的知识、技能相比，探索知识的过程有利于开发学生的潜能。也可以这样说，本丛书在数学教学《大纲》的基础上，本着源于教材且高于教材的要求进行编写，并以典型常规题、创新开放题及实践应用题为线索，进行精析和指导，并且坚持了以学生为主体，以学生能力发展为根本的理念，便于学生展开自学和自练。

本丛书使用的数学符号以新教材为准，在知识点的归类讲解与拓展方面兼顾了两套教材，并在书后附上新教材与统编教材中相异数学符号对照表，供读者对照使用。

由于作者水平有限，且时间仓促，书中难免存有不尽人意之处，敬请广大读者不吝指教。

宋伯涛

2001年8月于北师大

目　　录

一、任意角的三角函数

1.1 角的概念的推广

1. 正角、负角和零角

角可以看成是平面内一条射线从初始位置(始边)出发,绕着它的端点(顶点)旋转到终止位置(终边)而成.

我们规定,按逆时针方向旋转形成的角叫做正角,按顺时针方向旋转形成的角叫做负角,没有旋转为零角.角的概念推广以后,它包括任意大小的正角、负角和零角.因此,我们在确定一个角的大小时,不仅要看它的始边与终边的位置,而且要看它是如何旋转而成的.

例 1 时钟的分针经过下列时间所转成的角是多少度:

(1)12 分钟;

(2)3 小时 20 分

解:每经过 1 分钟分针所转的角是$-\frac{360°}{60}=-6°$.

(1)经过 12 分钟分针所转的角是$-6°\times 12=-72°$.

(2)经过 3 小时 20 分钟分针所转的角是$-6°\times 200=-1200°$.

2. 象限角

我们常在直角坐标系内讨论角,为此使角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合,那么角的终边(除端点外)在第几象限,就说这个角是第几象限的角.如果角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任一象限.

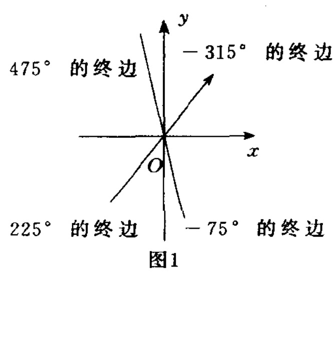

图1

例 2 给出下列四个命题:①$-75°$是第四象限角;②$225°$是第三象限角;③$475°$是第二象限角;④$-315°$是第一象限角.其中

正确的命题有 (　　)

(A)1 个　　(B)2 个　　(C)3 个　　(D)4 个

解:在直角坐标系中,分别作出这些角的终边(如图 1),由图可知,四个命题都是正确的所以选(D)

3. 终边相同的角

任意一个角惟一地确定一条终边.但是,反过来任意一个终边位置都可以表示无数个角.一个角,每增加或减少 360°,终边就又回到原来的位置,终边相同的角周而复始地出现.

当角 α 的终边绕其顶点,按逆时针方向旋转 n 圈时,就形成 $n\cdot 360°+\alpha$ 的角,按顺时针方向旋转 n 圈时,就形成 $-n\cdot 360°+\alpha$ 的角,这些角与角 α 都有相同的终边.因此,所有与角 α 终边相同的角,连同角 α 在内,可构成一个集合.

$S=\{\beta\,|\,\beta=\alpha+k\cdot 360°,k\in Z\}$

即任一与角 α 终边相同的角,都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

想一想:相等的角终边是否一定相同?终边相同的角是否一定相等?

答:相等的角的终边一定相同.但终边相同的角不一定相等,如果不等,它们相差周角的整数倍.

由终边相同的角和象限角的意义,可以得出各象限角的范围(如图 2):

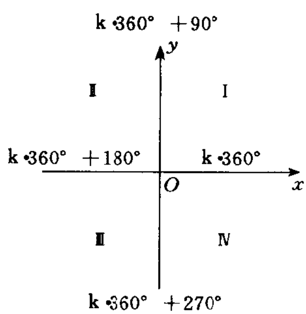

图2

第一象限角 α:$k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°(k\in Z)$

第二象限角 α:$k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°(k\in Z)$

第三象限角 α:$k\cdot 360°+180°<\alpha<k\cdot 360°+270°(k\in Z)$

第四象限角 α:$k\cdot 360°+270°<\alpha<(k+1)360°(k\in Z)$

例 3　在 0～360°范围内找出与下列各角终边相同的角,并判别它们是哪个象限的角:

(1)$752°18'$;　(2)$-752°18'$;　(3)$k\cdot 360°-120°(k\in Z)$.

解:(1)$\because 752°18'=2\times 360°+32°18'$.

$\therefore$ 与 $752°18'$ 角终边相同的角是 $32°18'$,它是第一象限角.

(2)∵$-752°18'=-3\times360°+327°42'$

∴与$-752°18'$角终边相同的角是$327°42'$,它是第四象限角.

(3)∵$k\cdot360°-120°=(k-1)360°+240°(k\in Z)$

∴与$k\cdot360°-120°$角终边相同的角是$240°$,它是第三象限角.

说明:将任意角表示成$k\cdot360°+\alpha(k\in Z)$时,为了便于判别其所在象限,一般取$0°\leqslant\alpha<360°$.当已知角是正角时,按正常除法除以$360°$,使余数在$0°\sim360°$范围内,例如本例的(1);当已知角是负角时,除以$360°$的商$k$是一个负数,$|k|$应比正常除法商的绝对值大1,以使余数为正,例如本例的(2).

有时α也可取负值,如$-420°=-360°+(-60°)$.因此$-420°$与$-60°$终边相同,它们都是第四象限角.

例4　分别写出:

(1)终边在x轴非正半轴上角的集合;

(2)终边在坐标轴上角的集合;

(3)终边(除端点外)在y轴右侧的角的集合.

分析:应先写出$0°-360°$范围内满足条件的角,然后再加上$k\cdot360°(k\in Z)$

解:(1)终边在x轴非正半轴上的角的集合为

$\{\alpha|\alpha=(2k+1)180°.k\in Z\}$

(2)终边在x轴上的角$\alpha=k\cdot180°=2k\cdot90°(k\in Z)$

又∵终边在y轴上的角$\alpha=k\cdot180°+90°$

$=(2k+1)90°(k\in Z)$

∴终边在坐标轴上的角的集合为$\{\alpha|\alpha=n\cdot90°.n\in z\}$

(3)终边(除端点外)在y轴右侧的角的集合为$\{\alpha|k\cdot360°-90°<\alpha<k\cdot360°+90°.k\in Z\}$

例5　若α是第二象限角时,则$2\alpha,\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{3}$分别是什么范围内的角?

解:(1)∵α是第二象限的角

∴$k\cdot360°+90°<\alpha<k\cdot360°+180°\quad(k\in Z)$

∴$k\cdot720°+180°<2\alpha<k\cdot720°+360°\quad(k\in Z)$

故2α是第三或第四象限的角,或角的终边在y轴的非正半轴

上.

(2) $\because k\cdot180°+45°<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180°+90°(k\in Z)$

当 $k=2n(n\in Z)$时，$n\cdot360+45°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+90°$. $\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角；

当 $k=2n+1(n\in Z)$时，$n\cdot360+225°<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360°+270°$. $\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角；

$\therefore\frac{\alpha}{2}$是第一或第三象限的角.

(3) $\because k\cdot120°+30°<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120°+60°(k\in Z)$

当 $k=3n(n\in Z)$时，$n\cdot360+30°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+60°$. $\frac{\alpha}{3}$是第一象限的角；

当 $k=3n+1(n\in Z)$时，$n\cdot360+150°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+180°$. $\frac{\alpha}{3}$是第二象限的角；

当 $k=3n+2(n\in Z)$时，$n\cdot360+270°<\frac{\alpha}{3}<n\cdot360°+300°$. $\frac{\alpha}{3}$是第四象限的角；

$\therefore\frac{\alpha}{3}$是第一或第二或第三象限的角.

说明：本例中，对(1)不可忘记终边在 y 轴非正半轴上的情况；对(2)、(3)要能根据需要对整数 k 作出正确的分类.

【巩固性训练题】

一、选择题

1. 设 $A=\{\theta|\theta$ 为锐角$\}$，$B=\{\theta|\theta$ 为小于 90°的角$\}$，$C=\{\theta|\theta$ 为第一象限的角$\}$，则下面正确的是 ( )

   (A) $A=B=C$ (B) $A\subsetneqq C$

   (C) $A\cap C=B$ (D) 以上都不对

2. 终边在第一、三象限角的平分线上的角可表示为 ( )

(A) $k\cdot180^\circ+45^\circ(k\in Z)$　　(B) $k\cdot180^\circ\pm45^\circ(k\in Z)$

(C) $k\cdot360^\circ+45^\circ(k\in Z)$　　(D)以上结论都不对

3. 在“①160°，②480°，③−960°，④−1600°”这四个角中属于第二象限的角是　（　）

(A)①　(B)①②　(C)①②③　(D)①②③④

4. 集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot90,k\in N_+\}$ 中各角的终边都在　（　）

(A) x 轴的非负半轴上

(B) y 轴的非负半轴上

(C) x 轴或 y 轴上

(D) x 轴的非负半轴或 y 轴的非负半轴上

二、填空题

5. (1)若角 α 与 β 的终边重合，则 α 与 β 的关系是＿＿＿＿＿＿.

(2)若角 α 与 β 的终边在一条直线上，则 α 与 β 的关系是＿＿＿＿＿＿.

(3)若角 α 与 β 的终边互相垂直，则 α 与 β 的关系是＿＿＿＿＿＿.

6. 若 $-540^\circ<\alpha<-180^\circ$，且 α 与 40°角的终边相同，则 $\alpha=$＿＿＿＿＿＿.

7. 时钟走过 2 小时 15 分，则分针所转过的角的度数为＿＿＿＿＿＿，时针所转过的角的度数为＿＿＿＿＿＿.

8. 若角 α 的终边在图 3 所表示的范围内，则 $\alpha\in$＿＿＿＿＿＿.

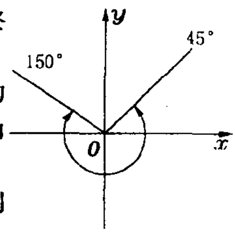

图 3

9. 若角 2α 与 140°的终边相同，则 $\alpha=$＿＿＿.

10. 填表：

角 α 所在的象限	一	二	三	四
角 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限				
角 2α 的范围				

三、解答题

11. 若角 β 的终边所在直线经过点 $Q(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，并且 $\beta\in(-360^\circ,360^\circ)$，求角 β.

【巩固性训练题答案】

1.(B) 2.(A) 3.(C) 4.(C)

5.(1)$\alpha=\beta+k\cdot 360°(k\in Z)$ (2)$\alpha=\beta+k\cdot 180°(k\in Z)$

(3)$\alpha=\beta\pm 90°+k\cdot 360(k\in Z)$

6. $-320°$ 7. $-810°,67.5°$

8. $\{\alpha|k\cdot 360°-210°<\alpha<k\cdot 360°+45°,k\in Z\}$

9. $K\cdot 180°+70°(k\in Z)$

10.

角$\frac{\alpha}{2}$所在象限	一、三	一、三	二、四	二、四
角 2α 的范围	一、二象限 y 轴非负半轴	三、四象限 y 轴非正半轴	一、二象限 y 轴非负半轴	三、四象限 y 轴非正半轴

11. 解：∵角 β 的终边所在直线经过点 $Q\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

∴角 β 的集合是$\{\beta|\beta=k\cdot 180°+135°,k\in Z\}$

其中介于$-360°$与 $360°$之间的角有$-225°,-45°,135°,315°$

1.2 弧度制

1. 角度制与弧度制

我们规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角，这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制.

弧度制的建立是出于下面的思考：

如图 4，设角 α 为 $n°(n>0)$，以角的顶点 O 为圆心，分别以 r 和 r' 为半径画圆，两圆被角的两边截得的弧$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$的长分别为 l 和 l'，由弧长公式得

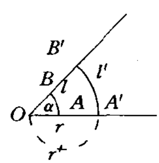

图4

$$l=\frac{n\pi r}{180},\qquad l'=\frac{n\pi r'}{180}\therefore\frac{l}{r}=\frac{l'}{r'}=\frac{n\pi}{180}$$

这表明，当角 α 的大小一定时，不管这个角所对的圆弧的半径是多少，弧长与半径的比是一个定值，它仅与圆心角的大小有关.也就是说，角所对圆弧的长与圆半径长的比完全由角的大小确定，

而与半径的大小无关. 因此,可以用弧长与半径的比值来度量角的大小.

我们把等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角,用弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制. 一般地

$$|\alpha|=\frac{l}{r}$$

其中l是以角α作为圆心角时所对弧的长,r是圆的半径.

弧度制与角度制相比具有明显的优点. 在用角度制表示角的时候,人们总是十进制,六十进制并用的. 例如角$\alpha=66°32'5''$,其中66、32、5都是十进数,而度、分、秒之间的关系是六十进(退)位的. 为了找到与角对应的实数要经过一番计算,这就不太方便. 但在用弧度表示角的时候,人们只用十进制,所以容易找出与角对应的实数.

正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是0,这样在角的集合与实数集R之间建立了一一对应关系. 即每一个角都有惟一的一个实数(这个角的弧度数)与它对应,反过来,每一个实数也都有惟一的一个角(角的弧度数等于这个实数)与它对应.

2. 度与弧度的相互换算

因为周角的弧度数是2π,而在角度制下它是$360°$. 因此推出下列换算公式:

$360°=2\pi$ 弧度

$180°=\pi$ 弧度

进而得到

$1°=\frac{\pi}{180}\approx 0.01745$ 弧度

1 弧度$=\left(\frac{\pi}{180}\right)°\approx 57.30°=57°18'$

例1 已知四边形的四个内角之比是1:3:5:6,分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

解:设四边形的四个内角分别是$\alpha,3\alpha,5\alpha,6\alpha$则有

$\alpha+3\alpha+5\alpha+6\alpha=360°$

得 $\alpha=24°$

用角度制表示,这四个内角的大小是$24°,72°,120°,144°$

$\because 24° = \frac{\pi}{180}$弧度$\times 24 = \frac{2\pi}{15}$弧度

$\therefore$用弧度制表示，这四个内角的大小是$\frac{2\pi}{15}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$

说明：用弧度为单位表示角时，常常把弧度数写成多少 π 的形式，如无特殊要求，不要把 π 化成近似值.

一些特殊角的度数与弧度数的互相换算以后经常用到，必须熟练掌握.

角度制	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π

在弧度制下，角 α 的单位是弧度，那么与角 α 的终边相同的角的集合为

$S = \{\beta \mid \beta = 2k\pi + \alpha, k \in Z\}$

例 2　将下列各角化成 $2k\pi + \alpha (k \in Z, 0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ 的形成，并确定其所在象限：

(1)$\frac{19\pi}{6}$；　　　(2)$-\frac{11}{7}\pi$

解：(1)$\because \frac{19\pi}{6} = 2\pi + \frac{7}{6}\pi$

$\therefore$它是第三象限角

(2)$\because -\frac{11\pi}{7} = -2\pi + \frac{3\pi}{7}$

$\therefore$它是第一象限角

说明：(1)在判别角所在象限时，第一项 π 前面的系数必须是偶数，再根据第二项的角所在的象限来判断所给角所在的象限. 例如将$\frac{19\pi}{6}$写成 $3\pi + \frac{\pi}{6}$，从而判定$\frac{19\pi}{6}$是第一象限角，显然是错误的.

(2)表示角的度量单位必须统一，不能混用弧度与度的书写形式. 例如把$\frac{19\pi}{6}$写成 $360° + \frac{7\pi}{6}$或 $2\pi + 210°$都是不妥的.

例 3　已知 $-6\pi < \alpha < -4\pi$，且角 α 与$\frac{2}{3}\pi$ 角的终边相同，求 α

解：$\because \alpha$ 与$\frac{2}{3}\pi$ 角的终边相同

$\therefore \alpha \in \{\alpha \mid \alpha = 2k\pi + \frac{2}{3}\pi, k \in Z\}$

当 $k=-3$ 时，$\alpha=-6\pi+\frac{2}{3}\pi=-\frac{16}{3}\pi$

$\because -6\pi<-\frac{16}{3}\pi<-4\pi$

$\therefore \alpha=-\frac{16}{3}\pi$

例 4　已知角 α 是第四象限角，则 $\pi-\alpha$ 是第几象限角？

解 1：$\because$ 角 α 是第四象限角

$\therefore 2k\pi+\frac{3\pi}{2}<\alpha<2k\pi+2\pi(k\in Z)$

$\therefore -2k\pi-\pi<\pi-\alpha<-2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

即 $2k\pi-\pi<\pi-\alpha<2k\pi-\frac{\pi}{2}(k\in Z)$

$\therefore$ 角 $\pi-\alpha$ 是第三象限角.

解 2：$\because$ 角 α 是第四象限角.

又 $\because$ 角 α 与角 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称.

$\therefore$ 角 $-\alpha$ 的终边在第一象限.

又角 $-\alpha$ 与角 $\pi-\alpha$ 的终边关于原点对称

$\therefore$ 角 $\pi-\alpha$ 的终边在第三象限.

例 5　已知集合 $A=\{\alpha|2k\pi\leqslant\alpha\leqslant(2k+1)\pi.\ k\in Z\}$. $B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$ 则 $A\cap B$ 等于　　　(　　)

(A) $\varnothing$

(B) $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant4\}$

(C) $\{\alpha|0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

(D) $\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$

解：在集合 A 中，取 $k=\cdots,-1,0,1,\cdots$，得到无穷个区间：$\cdots$，$[-2\pi,-\pi]$，$[0,\pi]$，$[2\pi,3\pi]$，$\cdots$.

将这些区间和集合 B 所表示的区间在数轴上表示(如图 5)：

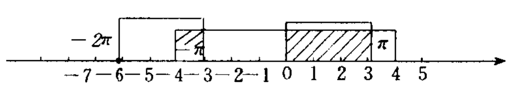

图5

由图可知，$A\cap B=\{\alpha|-4\leqslant\alpha\leqslant-\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}$，因此选(D)