大学文科基础数学

北 京 大 学 教 材

大学文科基础数学

第 一 册

姚孟臣 编

北 京 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是大学文科基础数学教材．全书共分三册．第一册包括一元微积分、多元微积分、无穷级数与常微分方程等内容；第二册包括矩阵、线性方程组、概率统计与数量化方法等内容；第三册包括线性规划与模糊数学简介等内容．

本书总结了作者多年来为北京大学等院校文科类各专业讲授高等数学课的教学经验．叙述由浅入深，注重实用性、易于读者理解与掌握，全书采用“模块式”结构，便于不同专业灵活选用．为适应经济管理类各专业的需要，在附录中还介绍了经济数量分析中的常用概念及有关数学方法．书中配有适量习题，书后附有答案．

本书可作为大学文科类各专业数学教材或参考书，又可供广播电视大学及自学考试学生使用．对于社会科学工作者来说，也是一本较好的数学参考书．

北京大学教材
大学文科基础数学
第一册
姚孟臣　编
责任编辑：刘　勇
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
850×1168毫米　32开本　12.5印张　325千字
1990年3月第一版　1990年3月第一次印刷
印数：0001—3,000册
ISBN 7-301-01075-3/O·0178
定价：3.05元

前　言

本书是根据作者多年来为北京大学等院校文科各专业讲授高等数学时所用的讲义编写而成的. 内容包括：一元、多元微积分；无穷级数与常微分方程；线性代数与概率统计；线性规划与模糊数学简介等. 讲授以上的全部内容约需 180 学时.

作为一本针对文科各专业的通用性较强的教材，本书力图在学时不多的情况下，让学生了解高等数学中一些最基本的概念、理论及方法，从而建立正确的数学概念，并逐步学会使用数学方法来分析、解决自然科学及社会科学中的一些实际问题.

为此，本书在内容安排上作了以下一些尝试：

在预备知识中，对于平面区域着重讲述了联立不等式表示法，为二重积分计算作了必要的准备；对空间解析几何的内容作了较多的删减，在不引入向量代数的情况下，通过例题分析了平面及球面的特性，在此基础上直接给出了平面及二次曲面的定义，这部分内容可放在有关章、节前面讲述.

在一元函数极限部分，为了便于学生理解极限的概念，除了给出极限的严格定义外，还引入了变量极限的一种直观形象的描述，并以此对各种极限过程进行了概括总结.

在线性代数部分，删去了 n 维向量的有关内容，以矩阵为主要概念及工具，介绍行列式及线性方程组等内容.

鉴于目前国内文科各专业在研究对象及方法上发生的变化，本书还增加了概率统计、线性规划、模糊数学等方面的基本内容，并在回归分析基础上介绍了数量化方法. 为了适应经济管理类专业的需要，在第一册的附录中，又介绍了经济数量分析中常用的概念及有关的数学方法.

考虑到文科各专业的不同需要，本书采用了“模块式”结构.这样，在使用本书时可以灵活地进行选择或组合.

北京大学数学系方企勤副教授、胡德焜副教授、丘维声副教授和北京理工大学应用数学系汪诚义副教授仔细审阅了有关部分，并对本书提出了许多宝贵的意见.在讲授和编写本书过程中，得到了北京大学数学系主任李忠教授、副主任刘西垣副教授的支持与帮助，在此一并致谢.

由于作者水平有限，书中的错误及不妥之处在所难免，敬请读者不吝指正.

姚孟臣

一九八九年五月于北京大学

目　录

预 备 知 识

本书要用到集合论与逻辑理论中的一些基本概念，作为预备知识，在这里我们作一简单介绍.

一、量词与逻辑符号

为了叙述方便，我们将采用下面的量词与逻辑符号.

符号 $\forall$

表示“一切”或“任给”，称为全称量词. 例如，$\forall x \geqslant 0$ 表示“对于一切非负的 x”.

符号 $\exists$

表示“存在”或“找到”，称为存在量词. 例如，$\exists n \in \boldsymbol{N}$ 表示“在自然数集合 $\boldsymbol{N}$ 中存在着这样的数 n”.

符号 $\Rightarrow$

表示逻辑结果. 用 $A \Rightarrow B$ 表示“从命题(或条件) A 得到命题(或条件) B”或“若实现 A，则 B 成立”.

符号 $\Longleftrightarrow$

表示逻辑上的等价性. 用 $A \Longleftrightarrow B$ 表示“从 A 得到 B，反之从 B 得到 A”或“ A 与 B 等价”. 例如

$$|x-a| \leqslant r \Longleftrightarrow a-r \leqslant x \leqslant a+r$$

表示“ $|x-a| \leqslant r$ 等价于 $a-r \leqslant x \leqslant a+r$”.

本书常用符号

$\boldsymbol{N}$——一切自然数的集合；

$\boldsymbol{Z}$——一切整数的集合；

$\boldsymbol{Q}$——一切有理数的集合；

$\boldsymbol{I}$——一切无理数的集合；

$\boldsymbol{R}$——一切实数的集合，数直线；

$\varnothing$——空集；

$\boldsymbol{\Omega}$——全集(样本空间)；

$\in$——属于；

$\supset$——包含；

$\cup$——(集合或事件)并；

$\boldsymbol{R}^2$——数平面上一切点的集合；

$\forall$ ——一切(任给)；

$\exists$ ——存在(找到)；

$\triangleq$——定义为；

U——必然事件；

$\sum$ ——求和；

$\ni$ ——使得；

$\cap$——(集合或事件)交；

$\Rightarrow$——推出(隐含)；

$\Leftrightarrow$——当且仅当(等价)；

$\leftrightarrow$——对应；

V——不可能事件；

$\prod$——求积；

$\vee(\wedge)$——取大(小)运算.

二、集合初步

集合是一个不能给出数学定义的概念，尽管如此，我们仍然可以给它一个定性描述.所谓集合就是按照某些规定能够识别的一些具体对象或事物的全体.构成集合的每一个对象或事物叫做集合的元素.例如：

(1) 所有北京大学在校生的全体为一集合；

(2) 方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 的根的全体为一集合；

(3) 所有自然数的全体为一集合；

(4) 一直线上所有点的全体为一集合.

在上述前两个例子中，每个集合只有有限多个元素，这种集合叫做有限集.后两个例子中所给出的集合不是由有限个元素组成，这种集合叫做无限集.

通常集合用大写字母 A,B,C 表示，其元素用小写字母 a,b,c 表示.

设 A 是一个集合，如果 a 是 A 的元素，记作

$$a\in A;$$

如果 a 不是 A 的元素，记作

$$a\,\overline{\in}\,A(\text{或 } a\notin A).$$

例如，变量 x 的取值范围构成的集合 X 叫做变化域，有 $x\in X$.

集合一般有两种表示法：**列举法**和**示性法**.所谓列举法就是把

集合的元素都列举出来. 例如, A 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合,记作

$$A = \{1,3,5,7,9\}.$$

也就是说{ }中将 A 的元素都一一列举出来了. 所谓示性法就是给出集合元素的特性. 一般用

$$A = \{a \mid a \text{ 具有的性质}\}$$

来表示具有某种性质的全体元素 a 构成的集合. 如上述的集合 A 也可以记作

$$A = \{2n - 1 \mid n < 6, n \in \mathbf{N}\}.$$

由此可见同一个集合可以有不同的表示法,也就是说一个集合的表示法不是唯一的.

只含有一个元素 a 的集合叫做**单元集合**,记为$\{a\}$. 例如常数 c 的变化域就是单元集合$\{c\}$. 换句话说,若变量 x 的变化域是单元集合,则 x 是常量.

不含有任何元素的集合叫做**空集**,记为$\varnothing$. 例如方程 $x^2 + 1 = 0$ 的实数解的解集合就是空集. 把空集合也视为集合,正如我们把 0 也看作数一样,在数学上是方便的. 但要注意空集$\varnothing$与单元集合$\{0\}$不是一回事.

由所研究对象的全体构成的集合称为**全集**,记作 Ω. 例如当讨论一元线性方程

$$ax + b = 0 (a \neq 0 \text{ 且 } a \in \mathbf{N}, b \in \mathbf{Q})$$

的有理解集合时,有理数集 $\mathbf{Q}$ 是一个全集. 需要指出的是全集是相对的. 在一种条件下是全集的集合,在另一种条件下可能就不是全集. 前例中,如果在实数范围内讨论一元线性方程 $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ 的解集合时,那么 $\mathbf{Q}$ 就不是全集了.

设 A,B 是两个集合. 如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即 $a \in A$ 必有 $a \in B$,那么称 A 为 B 的**子集合**,记作

$$A \subset B \text{ 或 } B \supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 如果 $A \subset B$, $B \subset C$,那么 $A \subset C$. 这说

明了包含具有传递性,例如 $\mathbf{N}\subset\mathbf{Q},\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$,于是有 $\mathbf{N}\subset\mathbf{R}$. 容易看出,对于任意的集合 A,总有 $A\subset A,\varnothing\subset A,A\subset\Omega$ 成立.

例 1 设 $A=\{2,4,8\}$,则集合 A 的所有子集是 $\varnothing,\{2\},\{4\},\{8\},\{2,4\},\{2,8\},\{4,8\},\{2,4,8\}$. 注意,在考虑集合 A 的所有子集时,不要把空集 $\varnothing$ 和它本身忘掉.

设 A,B 是两个集合. 如果 $A\subset B,B\subset A$,那么称集合 A 与 B **相等**,记作

$$A=B.$$

很明显,含有相同元素的两个集合相等.

例 2 设 $A=\{0,2,3\},B=\{x\,|\,x$ 为方程 $x^3-5x^2+6x=0$ 的解$\}$,则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x\,|\,x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**并集**,即由 A 与 B 的全体元素构成的集合,记作 $A\cup B$.

例 3 $\{1,2,3,4,5,\}\cup\{1,3,5,7,9\}=\{1,2,3,4,5,7,9\}$.

并集具有以下的简单性质:

(1) $(A\cup B)\supset A$;

(2) $(A\cup B)\supset B$.

设 A,B 是两个集合. 称集合 $\{x\,|\,x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的**交集**,即由 A 与 B 的公共元素构成的集合,记作 $A\cap B$. 若 $A\cap B=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相交**.

例 4 $\{1,2,3,4,5\}\cap\{1,3,5,7,9\}=\{1,3,5\}$;$\{1,3,5\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$.

交集具有以下的简单性质:

(1) $(A\cap B)\subset A$;

(2) $(A\cap B)\subset B$.

设 A,B 是两个集合. 如果 B 的每一个元素对应于 A 的唯一的元素,反之 A 的每一个元素对应于 B 的唯一的元素,那么就说在 A 和 B 的元素之间建立了一一对应关系,并称 A 与 B **等价**,记作

$$A\sim B.$$

与自然数集 N 等价的任何集合，称为**可列集**. 显然，一切可列集彼此都是等价的. 今后我们常称这类集合中元素的个数为可列个(或可数个)，并把有限个或可列个统称为**至多可列个**(或**至多可数个**).

例 5 设 $A=\{a \mid a=2n, n\in \mathbf{N}\}$，$B=\{b \mid b=n^2+1, n\in \mathbf{N}\}$，则 $A\sim B$.

三、实数集

高等数学主要是在实数范围内讨论问题的，因此在这里我们有必要简单地回顾一下实数的一些属性.

人们对数的认识是逐步发展的，首先是自然数 1,2,3,…. 由自然数构成的集合叫做自然数集，记为 $\mathbf{N}$，在 $\mathbf{N}$ 中我们可以定义加法和乘法的运算. 其后发展到有理数，它包括一切整数(整数的集合用 $\mathbf{Z}$ 表示)与分数，每一个有理数都可以表示成 $\frac{p}{q}$ (其中 $p, q\in \mathbf{Z}$ 且 $q\neq 0$). 我们把有理数构成的集合叫做有理数集，记为 $\mathbf{Q}$，在 $\mathbf{Q}$ 中我们可以定义四则运算. 下面我们先来介绍有理数的两个性质.

在数轴上，每一个有理数都可以找到一个点表示它，例如，图 0-1 中的点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 等就可以分别代表有理数 $-4, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 3, 5$ 等. 我们把代表有理数 x 的点叫做有理点 x. 由图可见，有理数集 $\mathbf{Q}$ 除了可以在其中定义四则运算外，还具有**有序性**(即在数轴上有理点是从左向右按大小次序排列的)和**稠密性**(即在任意两个有理点之间有无穷多个有理点).

虽然有理点在数轴上是处处稠密的，但是它并没有充满整个数轴. 例如边长为 1 的正方形，其对角线长为 x(见图 0-2)，由勾股定理可知 $x^2=2$. 设在数轴上的点 x 代表的数为 $\sqrt{2}$，容易证明它

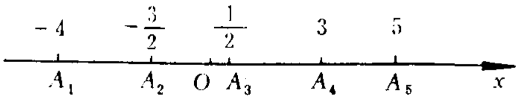

图 0-1

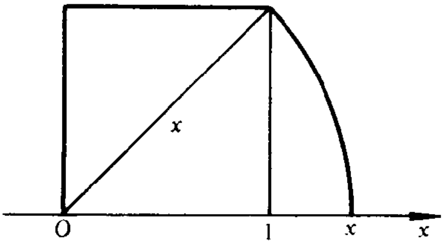

图 0-2

不能表示成 $\frac{p}{q}$ $(p,q\in \mathbf{Z},q\neq 0)$的形式,因此它不是有理数.这说明在数轴上除了有理点以外还有许多空隙.这些空隙处的点我们称之为**无理点**,无理点代表的数称为**无理数**.无理数是无限不循环的小数,如$\sqrt{2}$,$-\sqrt{3}$,π等,由它们所构成的集合叫做无理数集,记为 $\boldsymbol{I}$.我们把有理数与无理数统称为**实数**,全体实数构成的集合叫做实数集,记为 $\boldsymbol{R}$.与有理数集 $\boldsymbol{Q}$ 一样,实数集 $\boldsymbol{R}$ 也具有在其中可以定义四则运算,有序的以及处处稠密的等性质,而且还具有一个与 $\boldsymbol{Q}$ 不同的特性,这就是实数的连续性(即实数点充满了整个数轴).

由于任给一个实数,数轴上就有唯一的点与它对应;反之,数轴上的任意一个点也对应着唯一的实数,可见实数集合等价于数轴上的点集.因此在以后的讨论中,我们可以把点与实数不加区分.

在 $\boldsymbol{R}$ 的子集中,我们今后经常遇到的是各种各样的区间.所谓**区间**就是介于某两点之间的一切点所构成的集合,这两个点称为区间的**端点**.如果两个端点都是定数,称此区间为有限的,否则称为无限的.常见的区间有:设 $a\in \boldsymbol{R}$,$b\in \boldsymbol{R}$ 且 $a<b$,我们把集合

$\{x|a<x<b\}$称为开区间,记作(a,b);把集合$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记作$[a,b]$;把集合$\{x|a<x\leqslant b\}$和$\{x|a\leqslant x<b\}$称为半开半闭区间,分别记作$(a,b]$和$[a,b)$.以上各种有限区间在数轴上都可以用一条线段来表示它们.对于无限区间,例如$\{x|x>a\}$,记作$(a,+\infty)$;$\{x|x<a\}$,记作$(-\infty,a)$;$\{a|a\in \boldsymbol{R}\}$,记作$(-\infty,+\infty)$.类似地,还有$[a,+\infty)$和$(-\infty,a]$(注意,这里的$+\infty$,$-\infty$以及$\infty$只是一种符号,既不能把它们视为实数,也不能对它们进行运算).

设$x\in \boldsymbol{R}$,x的绝对值是一个非负实数,记为$|x|$,其定义为

$$|x| \triangleq \begin{cases} x, & x \geqslant 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

例如,$|4|=4,|0|=0,|-3.2|=-(-3.2)=3.2$.

根据绝对值的定义,可知

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,$$

因此,当$|x|\leqslant r(r>0)$时,又可以把它写成

$$-r\leqslant x\leqslant r$$

或用闭区间$[-r,r]$来表示.下面给出绝对值的几个性质:

(1) $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$;

(2) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $y\neq 0$;

(3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$;

(4) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$.

性质(1),(2)由绝对值定义可以直接得到,这里我们只证明性质(3),性质(4)留给读者作为练习.

证明 (3) 由绝对值定义,有

$$-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\ -|y|\leqslant y\leqslant |y|,$$

将上述两式逐项相加,得到

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant (|x|+|y|),$$

故有

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

下面我们介绍邻域的概念.

设 $a \in \boldsymbol{R}, h \in \boldsymbol{R}$ 且 $h > 0$. 称集合

$$\{x \mid |x-a| < h\}$$

为 a 的一个**邻域**,记作 $N_h(a)$,其中 h 为邻域半径;称集合

$$\{x \mid 0 < |x-a| < h\}$$

为 a 的一个空心邻域,记作 $N_h(\bar{a})$. 当不必指明邻域半径时,我们用 $N(a)$,$N(\bar{a})$表示 a 的邻域和 a 的空心邻域. 称集合

$$\{x \mid a \leqslant x < a+h\} \text{ 和 } \{x \mid a-h < x \leqslant a\}$$

为 a 的右邻域和左邻域,记作 $N_h^+(a)$和 $N_h^-(a)$. 若上述集合除去 a 点,就称为 a 的空心右邻域和空心左邻域,记作 $N_h^+(\bar{a})$和 $N_h^-(\bar{a})$. 不必指明邻域半径时,记号中可省略 h.

四、平面区域

上面我们用 $\boldsymbol{R}$ 表示实数集,以后我们将用 $\boldsymbol{R}^2$(或 $\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$)表示由所有有序的实数对$(x,y)$组成的集合,称为 $\boldsymbol{R}^2$ 空间(或二维空间),即

$$\boldsymbol{R}^2 \triangleq \{(x,y) \mid x \in \boldsymbol{R}, y \in \boldsymbol{R}\}.$$

由于一切实数对$(x,y) \in \boldsymbol{R}^2$ 与坐标平面(或数平面)的一切点一一对应,也就是说实数对(x,y)的集合与平面点集是等价的,因此在以后的讨论中,我们可以把平面上的点与实数对(x,y)不加区分,并把实数对(x,y),(x_0,y_0)和(x_n,y_n)常用点 P,P_0 和 P_n 表示.

例如集合

$$E_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$$

表示在坐标平面上不包括圆周 $x^2+y^2=1$ 的圆内一切点的集合(见图 0-3);集合

$$E_2 = \{(x,y) \mid |x-1| \leqslant 2, |y-1| \leqslant 2\}$$

表示在坐标平面上由直线 $x=3$,$x=-1$,$y=3$ 和 $y=-1$ 所围成的正方形上一切点的集合(见图 0-4);而数轴也可用集合

$$\{(x,0)\,|\,x \in \boldsymbol{R}\}$$

表示.

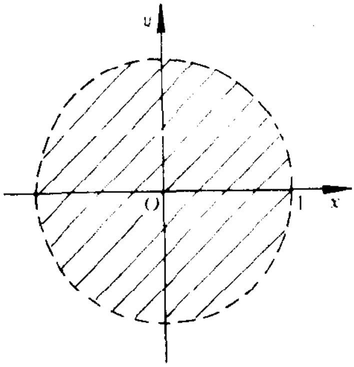

图 0-3

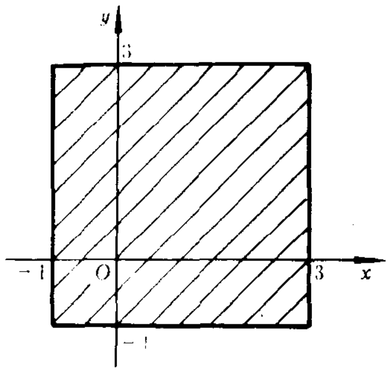

图 0-4

设 $P_1=(x_1,y_1)$, $P_2=(x_2,y_2)$, $P=(x,y)$, λ 为一实数. 在 $\boldsymbol{R}^2$ 中我们可以定义点与点之间的加减法,数乘以及模数,即

$$P_1 \pm P_2 \triangleq (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2),$$

$$\lambda P_1 \triangleq (\lambda x_1, \lambda y_1),$$

$$|P| \triangleq \sqrt{x^2+y^2},$$

这些定义与几何中的向量的有关定义完全相仿. 于是 P_1 与 P_2 之间距离就可以写成

$$|P_1 - P_2| \triangleq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

设 $P_0 \in \mathbf{R}^2, \delta \in \mathbf{R}$, 且 $\delta > 0$, 我们把满足不等式

$$|P - P_0| < \delta$$

的一切点 P 的全体称为 P_0 点的 δ **邻域**, 记作 $N_\delta(P_0)$, 其中 δ 为邻域半径, 即

$$N_\delta(P_0) = \{P \mid |P - P_0| < \delta\}.$$

可见平面上 P_0 点的 δ 邻域是以 P_0 点为中心半径为 δ 的不包括圆周在内的圆的内部. 与实数集类似, 我们分别用 $N_\delta(\overline{P}_0)$, $N(P_0)$ 以及 $N(\overline{P}_0)$ 分别表示 P_0 点的 δ 空心邻域, 不指明邻域半径的邻域及空心邻域.

设 E 为一平面点集, 点 $P_0 \in E$. 如果 $\exists\ \delta > 0$, $\ni\ N_\delta(P_0) \subset E$, 那么我们称 P_0 是 E 的**内点**; 如果 E 的每一个点都是它的内点, 那么我们称 E 是**开集**. 显然, 前面例子中 E_1 是一个开集, 通常称之为开圆. 进一步设 $P_1 \in \mathbf{R}^2$, 如果 P_1 的任何邻域中既含有 E 的点, 也含有不属于 E 的点, 那么我们称 P_1 是 E 的**边界点**. E 的全部边界点构成的集合, 叫做 E 的**边界**(E 的边界用 ∂E 表示, 读作"偏 E"). 一个平面点集的边界点可能属于这个集, 也可能不属于这个集. 例 E_1 中的边界 $x^2 + y^2 = 1$ 就不属于 E_1, 而 E_2 中的边界是由直线段构成, 它们属于 E_2.

下面我们讨论平面区域及其联立不等式表示法.

设 D 是一个开集. 如果 D 中的任意两点都可以用一条位于 D 内的折线(由有限个相衔接线段组成)连接, 那么我们称 D 为一**开区域**, 开区域也称为区域. 这种可以用位于 D 内折线把 D 中任意两点连接起来的性质称为连通性, 因此区域是只含有内点的连通集. 一个区域 D 和它的边界 ∂D 构成的集合称为**闭区域**, 记为 $\overline{D}$. 显然