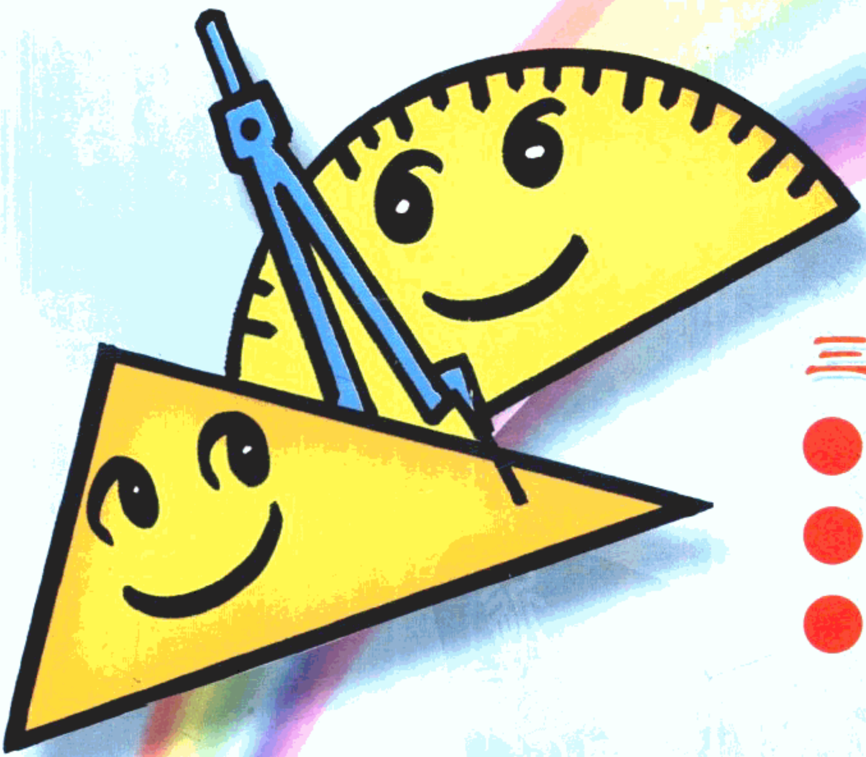
双解一试

北京景山学校
部分教师主编

初三数学
(几何分册)



三位一体

- 表解知识点
- 活页练习册
- 单元测试卷

2001新修订版

GUANGXI TEACHERS UNIVERSITY PRESS
广西师范大学出版社

双 解 一 试

初三数学（几何分册）

（2001 新修订版）

北京景山学校部分教师主编

广西师范大学出版社
·桂林·

初三数学（几何分册）

（2001 新修订版）

杨达成　冯振兴　黄志乐　吕江雁　苏耀水　**编写**

双解一试

初三数学（几何分册）

（2001 新修订版）

北京景山学校部分教师主编

责任编辑　梁燕鸿　　**封面设计**　符　良

广西师范大学出版社出版

（广西桂林市中华路 36 号　邮政编码：541001）

广西壮族自治区新华书店发行　广西合浦印刷有限责任公司印刷

开本：890×1240　1/16　印张：6.875　字数：238 千字

2001 年 8 月第 4 版　2001 年 8 月第 1 次印刷

印数：00001－10000 册

ISBN　7－5633－2649－9/G·1927

定价：7.90 元

目　录

第一部分　教学辅导

第二部分　课后练习

第三部分　单元测试

第一部分　教学辅导

第六章　解直角三角形

6.1　正弦和余弦

双基表解

表1:正弦和余弦

概念		定义	图形	性质	互余角正、余弦关系	同角正、余弦关系
锐角三角函数(一)	正弦	在△ABC中,$\angle C$为直角,我们把锐角A的对边与斜边的比叫做$\angle A$的正弦函数,记为$\sin A$,即$\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}$(图A6-1). **注意**:$\sin A$是以$\angle A$为自变量的函数,符号"$\sin A$"是一个值,不是$s\cdot i\cdot n\cdot A$.	 图A6-1	(1)$\sin A$以$\angle A$为自变量,自变量的范围为$0°<\angle A<90°$,函数的范围:$0<\sin A<1$. (2)当$0°<\angle A<90°$时,$\sin A$随$\angle A$的增大而增大.	若$\angle A+(90°-\angle A)=90°$,则$\sin(90°-A)=\cos A$,$\cos(90°-A)=\sin A$,或若$\angle A+\angle B=90°$,则$\sin A=\cos B$,$\cos B=\sin A$. 也就是说任意锐角的正弦值等于它的余角的余弦值;任意锐角的余弦值等于它的余角的正弦值.	$\sin^2A+\cos^2A=1$　① (符号$\sin^2A$表示$\sin A\cdot\sin A$) 也就是说任何一个锐角的正弦与余弦的平方和等于1. **注意**:还有两个同角三角函数关系式在下一节正、余切函数的表解中.
	余弦	在△ABC中,$\angle C$为直角,我们把锐角A的邻边与斜边的比叫做$\angle A$的余弦函数,记为$\cos A$,即$\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}$(图A6-1). **注意**:$\cos A$是以$\angle A$为自变量,是$\angle A$的函数,符号"$\cos A$"是一个值,不是$c\cdot o\cdot s\cdot A$.		(1)$\cos A$以$\angle A$为自变量,$\angle A$的范围为$0°<\angle A<90°$,函数的范围:$0<\cos A<1$. (2)当$0°<\angle A<90°$时,$\cos A$随$\angle A$的增大而减小.		

考题例解

例一　选择题:

1.(天津市)在△ABC中,$\angle C=90°$,CD是AB边上的高,则$CD:CB$等于(　　).

(A)$\sin A$　　(B)$\cos A$

(C)$\cos B$　　(D)以上都不是

2.(北京市)在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,如果$\sin A=\frac{1}{2}$,那么$\cos B$的值为(　　).

(A)$\frac{1}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C)1　(D)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.(南昌市)在Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$AC=12$,$AB=13$,则$\cos B$的值为(　　).

(A)$\frac{13}{12}$　(B)$\frac{12}{13}$　(C)$\frac{5}{13}$　(D)$\frac{5}{12}$

4.(天津市)当锐角$A>45°$时,$\sin A$的值(　　).

(A)小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(B)大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C)小于$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D)大于$\frac{\sqrt{3}}{2}$

解:1.B　2.A　3.C　4.B

1.∵　Rt△ABC中,$\angle C=90°$,$CD\perp AB$于D,

∴ $\angle A=\angle DCB$.

∴ $\frac{CD}{CB}=\cos\angle DCB=\cos A$.

故选 B.

2. Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

∴ $\cos B=\sin A=\frac{1}{2}$，故选 A.

3. ∵ Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=12$，$AB=13$，

∴ $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}$

$=\sqrt{13^2-12^2}=5.$

∴ $\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{5}{13}$，故选 C.

4. ∵ 锐角 $A>45°$，$\sin A$ 在 $0°<\angle A<90°$ 时为增函数，又 $\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

∴ $\sin A>\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

例二 填空题：

1.（天津市）在 Rt△ABC 中，$\angle C$ 是直角，若 $AB=6$，$BC=2$，则 $\cos A=$______.

2.（河北省）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=2$，$\sin A=\frac{2}{3}$，则 $AC=$______.

3.（广东省）在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=5$，$BC=3$，则 $\sin A=$______.

4.（辽宁省）直接写出计算结果：

$2\sin 30°-2\cos 60°=$______.

解：1. $\cos A=\frac{2}{3}\sqrt{2}$. 先由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，后用余弦函数定义得 $\cos A=\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

2. $AC=\sqrt{5}$. 只由正弦函数定义得 $\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{2}{AB}=\frac{2}{3}$.

∴ $AB=3$，后由勾股定理得

$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

3. $\sin A=\frac{3}{5}$（直接由正弦函数定义得）.

4. 0.（∵ $2\sin 30°-2\cos 60°=2\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}=0$）

例三 解答题：

1.（乌鲁木齐市）

求 $\frac{1}{2}\cos 30°+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°+\sin 60°\cos 60°$ 的值.

解：$\frac{1}{2}\cos 30°+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 45°+\sin 60°\cos 60°$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.（北京市）如图 A6-2，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{2}{5}$，D 为 AC 上一点，$\angle BDC=45°$，$DC=6$. 求 AB 的长.

分析：由 $\angle C=90°$，$\angle BDC=45°$ 可知△BDC 为等腰三角形，因而得 $BC=DC=6$，再根据正弦三角函数定义，即 $\sin A=BC:AB$，代入已知数据即可求 AB 的长.

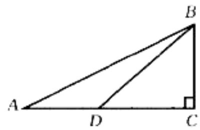


图 A6-2

解：在△BDC 中 $\angle C=90°$.

∵ $\angle BDC=45°$，

∴ $\angle DBC=\angle BDC=45°$.

∴ $DC=CB$，

∵ $DC=6$.

在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，

而 $\sin A=\frac{CB}{AB}=\frac{2}{5}$，

∴ $AB=\frac{6\times 5}{2}=15$.

∴ AB 的长为 15.

3. 已知△ABC 中，$\sin A=1$，且 $\sin B$、$\cos C$ 是方程 $4x^2+kx+1=0$ 的两根，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 和 k 的值.

解：∵ $\sin A=1$，

∴ $\angle A=90°$.

∴ △ABC 是以角 A 为直角的直角三角形.

则 $B+C=90°$，$\sin B=\sin(90°-C)=\cos C$，

又∵ $\sin B$、$\cos C$ 是方程 $4x^2+kx+1=0$ 的两根，

∴ $\Delta=k^2-4\times4\times1=0$.

$k=\pm4$.

根据根与系数的关系有：

$\sin B+\cos C=-\frac{k}{4}$，而 $\sin B=\cos C$.

∴ $2\sin B=-\frac{k}{4}$，$\sin B=-\frac{k}{8}$.

∵ $\angle B$ 是锐角，

∴ $k<0$，即 $k=-4$（舍去 $k=4$）.

∴ 当 $k=-4$ 时，$\sin B=\frac{1}{2}$，∴ $B=30°$.

从而$\angle C=90°-30°=60°$.

13.（安徽省）已知：△ABC 中，$\angle C$ 是锐角，$BC=a$，$AC=b$（图 A6-3）.

求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

证明：过 A 作 $AD\perp BC$，D 为垂足，则：

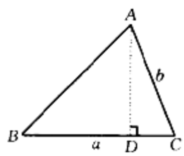


图 A6-3

在△ACD 中，

$\sin C=\frac{AD}{AC}$.

∴ $AD=AC\cdot\sin C$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}ab\sin C$.

6.2 正切和余切

双基表解

表 2:正切和余切

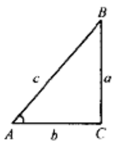
概念		定义	图形	性质	互余角正切、余切关系	同角正切、余切关系
锐角三角函数(二)	正切	在 Rt△ABC 中,$\angle C$ 为直角,我们把锐角 A 的对边与邻边的比叫做$\angle A$ 的正切函数,记为 tg A,即 $\text{tg } A=\frac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\frac{a}{b}=\frac{1}{\text{ctg}A}$.	 图 A6-4	(1)当 $0°<\angle A<90°$ 时,$\text{tg}A>0$. (2)当 $0°<\angle A<90°$ 时,tg$A$ 随$\angle A$ 的增大而增大.	由定义得 $\text{tg } A=\text{ctg}(90°-A)$, $\text{ctg } A=\text{tg}(90°-A)$, 或记为若$\angle A+\angle B=90°$,则 $\text{tg } A=\text{ctg } B$, $\text{ctg } A=\text{tg } B$.	除正弦和余弦间的平方关系外,还有商的关系: $\text{tg } A=\frac{\sin A}{\cos A}$, ② $\text{ctg } A=\frac{\cos A}{\sin A}$. ③ 倒数关系: $\text{tg}A\cdot\text{ctg}A=1$. ④
	余切	在 Rt△ABC 中,$\angle C$ 为直角,我们把锐角 A 的邻边与对边的比叫做$\angle A$ 的余切函数,记为 ctg A,即 $\text{ctg } A=\frac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\frac{b}{a}=\frac{1}{\text{tg } A}$.		(1)当 $0°<\angle A<90°$ 时,$\text{ctg}A>0$. (2)当 $0°<\angle A<90°$ 时,ctg$A$ 随$\angle A$ 的增大而减小.		

表 3:特殊角三角函数值及其增减性变化表:

三角函数	0°	$0°\leqslant\alpha\leqslant30°$	30°	$30°\leqslant\alpha\leqslant45°$	45°	$45°\leqslant\alpha\leqslant60°$	60°	$60°\leqslant\alpha\leqslant90°$	90°	$0°\leqslant\alpha\leqslant90°$
$\sin\alpha$	0	$\sin\alpha$ 从 0 增到$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sin\alpha$ 从$\frac{1}{2}$增到$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\alpha$ 从$\frac{\sqrt{2}}{2}$增到$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\alpha$ 从$\frac{\sqrt{3}}{2}$增到 1	1	$\sin\alpha$ 从 0 增到 1
$\cos\alpha$	1	$\cos\alpha$ 从 1 减到$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\alpha$ 从$\frac{\sqrt{3}}{2}$减到$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\alpha$ 从$\frac{\sqrt{2}}{2}$减到$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos\alpha$ 从$\frac{1}{2}$减到 0	0	$\cos\alpha$ 从 1 减到 0
$\text{tg}\,\alpha$	0	$\text{tg}\,\alpha$ 从 0 增到$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{tg}\,\alpha$ 从$\frac{\sqrt{3}}{3}$增到 1	1	$\text{tg}\,\alpha$ 从 1 增到$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\text{tg}\,\alpha$ 从$\sqrt{3}$增到∞	不存在	$\text{tg}\,\alpha$ 从 0 增到∞
$\text{ctg}\,\alpha$	不存在	$\text{ctg}\,\alpha$ 从∞减到$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\text{ctg}\,\alpha$ 从$\sqrt{3}$减到 1	1	$\text{ctg}\,\alpha$ 从 1 减到$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\text{ctg}\,\alpha$ 从$\frac{\sqrt{3}}{3}$减到 0	0	$\text{ctg}\,\alpha$ 从∞减到 0

考题例解

例一 选择题:

1. 在△ABC 中,$\angle C=90°$,D 是 AB 中点,若 $CD=BC$,则 tg$A$ 等于(　　).

(A)$\sqrt{3}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)1　　(D)不能求得准确值

2. (天津市)已知△ABC 中,$\angle C=90°$,CD 是 AB 边上的高,则 $CD:DB$ 等于(　　).

(A)sin$A$　(B)cos$A$　(C)tg$A$　(D)ctg$A$

3. (昆明市)若锐角 A、B 满足条件 $45°<\angle A<\angle B<90°$ 时,下列式子中正确的是(　　).

(A)$\sin A>\sin B$　　(B)$\cos A>\cos B$

(C)$\text{tg}A>\text{tg}B$　　(D)$\text{ctg}B>\text{ctg}A$

4. (陕西省)计算 $\cos30°-\sin90°+\sin^2 50°-\text{tg}36°\text{ctg}36+\frac{3}{2}\text{ctg}30°+\cos^2 50°$的结果是(　　).

(A)$1-2\sqrt{3}$　　(B)$-1-2\sqrt{3}$

(C)$1+2\sqrt{3}$　　(D)$-1+2\sqrt{3}$

5. 当$\angle A$ 的锐角，且 $\mathrm{ctg}A$ 的值小于$\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$\angle A$(　　).

(A)小于 30°　　(B)大于 30°

(C)小于 60°　　(D)大于 60°

解：1. B　2. D　3. B　4. D　5. D

1. 如图 A6-5，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，D 是AB 中点，$CD=BC$，

$\therefore$　$CD=CB=BD$.

$\therefore$　$\angle B=60°$.

$\therefore$　$\angle A=30°$.

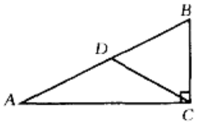


图 A6-5

$\therefore$　$\mathrm{tg}A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 B.

2. 如图 A6-6，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$ 于D.

$\therefore$　$\angle A=\angle BCD$.

$\therefore$　$\frac{CD}{DB}=\mathrm{ctg}\angle BCD$，

$\mathrm{ctg}\angle BCD=\mathrm{ctg}A$.

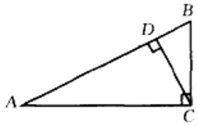


图 A6-6

$\therefore$　选 D.

3. $\because$　锐角 A、B 满足 $45°<\angle A<\angle B<90°$，

$\therefore$　由三角函数性质得 $\cos A>\cos B$.

故选 B.

4. 先直接计算求解，后查选择支.

$\cos 30°-\sin 90°+\sin^2 50°-\mathrm{tg}36°\cdot\mathrm{ctg}36°+\frac{3}{2}\mathrm{ctg}30°+\cos^2 50°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-1+1-1+\frac{3}{2}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}-1$.

故选 D.

5. 根据余切的性质：余切值随着角度的增大(减小)而减小(增大)，当 $\mathrm{ctg}A=\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$A=60°$，故在 $\mathrm{ctg}A<\frac{\sqrt{3}}{3}$时，$\angle A>60°$，因此应选 D.

例二　填空题：

1. (吉林省)求值 $\mathrm{tg}45°\cdot\sin 60°-\cos 30°=$______.

2. (南京市)α 是锐角，且 $\mathrm{tg}\alpha=1$，则 $\alpha=$______，$\cos\alpha=$______.

3. 如图 A6-7，在直角坐标系中，A 点的坐标为(4，3)，则$\angle\alpha$ 的四个三角函数值为 $\sin\alpha=$______，$\cos\alpha=$______，$\mathrm{tg}\alpha=$______，$\mathrm{ctg}\alpha=$______.

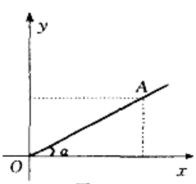


图 A6-7

4. 设关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$的两根为 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，那么 $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=$______.

5. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\sin A=\frac{2}{3}$，则 $\mathrm{tg}A=$______.

6. 计算：$\sin 30°+\mathrm{tg}^2 60°=$______.

7. 计算：$\mathrm{tg}34°\times\mathrm{tg}45°\times\mathrm{tg}56°=$______.

8. 已知$\angle A+\angle B=90°$，那么 $\sin^2 A+\sin^2 B=$______.

解：1. 原式 $=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

2. $\because$　$0°<\alpha<90°$，又 $\mathrm{tg}\alpha=1$，

$\therefore$　$\alpha=45°$.

$\therefore$　$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 由勾股定理求得 $OA=5$.

$\therefore$　$\sin\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=\frac{4}{5}$，$\mathrm{tg}\alpha=\frac{3}{4}$，$\mathrm{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$.

4. $\because$　$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}$，

$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 是方程 $ax^2+bx+c=0(ac\neq 0)$的两根，

$\therefore$　$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{c}{a}$.

而 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore$　$\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$.

5. 解法 1　$\cos A=\sqrt{1^2-\sin^2 A}=\sqrt{1^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

由 $\mathrm{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

解法 2　设 $a=2x$，则 $c=3x$，$b=\sqrt{5}x$.

$\therefore$　$\mathrm{tg}A=\frac{a}{b}=\frac{2x}{\sqrt{5}x}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

6. 原式 $=\frac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=3\frac{1}{2}$.

7. 原式 $=\mathrm{ctg}56°\times\mathrm{tg}56°\times\mathrm{tg}45°=1$.

8. 原式 $=\sin^2 A+\cos^2 A=1$.

例三　解答题：

1. (武汉市)计算：

$\cos 60°-\sin^2 45°+\frac{3}{4}\mathrm{tg}^2 30+\cos^2 30°-\sin 30°$.

解：原式 $=\frac{1}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$.

2. (成都市)计算：

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\cdot\sin 30°-\sqrt{(-1)^2}-\frac{2\mathrm{tg}60°}{\sqrt{3}-1}$.

解：原式 $=(2^{-1})^{-3}\times\frac{1}{2}-1-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$=8\times\frac{1}{2}-1-\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

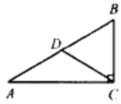
$=4-1-3-\sqrt{3}$

$=-\sqrt{3}$.

6.3 解直角三角形

双基表解

表4:解直角三角形的类型和方法

定义	使用知识	解直角三角形的类型和方法	
		已知条件	解法
在直角三角形中,除直角外,共有5个元素,即3条边和2个锐角.由这些元素中的一些已知元素,求出所有未知元素的过程叫做解直角三角形.	(1)三边关系: $a^2+b^2=c^2$. (2)两锐角关系: $\angle A+\angle B=90^\circ$. (3)边、角关系: $\sin A=\cos B=\frac{a}{c}$, $\cos A=\sin B=\frac{b}{c}$, $\operatorname{tg} A=\operatorname{ctg} B=\frac{a}{b}$, $\operatorname{ctg} A=\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$.  图 A6-8 (4)定理1:直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半. 定理2:直角三角形中,30°角所对的直角边也等于斜边的一半. 定理3:射影定理. (5)公式: $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c\cdot h_c$.	斜边和一锐角(例如 c 和 $\angle A$).	(1)$\angle B=90^\circ-\angle A$. (2)$a=c\sin A$. (3)$b=c\cos A$.
		斜边和一直角边(例如 c 和 $\angle a$).	(1)$b=\sqrt{c^2-a^2}$. (2)由 $\sin A=\frac{a}{c}$,求出$\angle A$. (3)由 $\cos B=\frac{a}{c}$,求出$\angle B$.
		一直角边和一锐角(例如 a、$\angle A$).	(1)$\angle B=90^\circ-\angle A$. (2)$c=\frac{a}{\sin A}$. (3)$b=a\operatorname{ctg} A$.
		两直角边(例如 a、b).	(1)$c=\sqrt{a^2+b^2}$. (2)由 $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}$,求 A. (3)由 $\operatorname{tg} B=\frac{b}{a}$,求 B, 或由$\angle B=90^\circ-\angle A$,求$\angle B$.

考题例解

例一 1.(苏州市)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 a、b、c,已知 $a=2$,$\cos B=\frac{1}{3}$,则 b 的长为( ).

(A)$\frac{2}{3}\sqrt{10}$ (B)$2\sqrt{10}$

(C)$4\sqrt{2}$ (D)$\frac{4}{3}\sqrt{2}$

解:C.

这是一道已知一直角边和一锐角(知一锐角的某个三角函数值)问题.由 $\cos B=\frac{a}{c}=\frac{1}{3}$,又 $a=2$,得 $c=6$.

∴ 由勾股定理得

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{6^2-2^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$.

∴ 选 C.

2.(山西省)已知,如图 A6-9,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90^\circ$,$AB=10$,$\sin B=\frac{2}{5}$,BC 的长是( ).

(A)$2\sqrt{21}$ (B)4

(C)$\sqrt{21}$ (D)$\frac{\sqrt{21}}{50}$

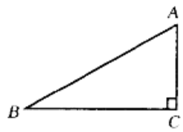


图 A6-9

解:∵ $\sin B=\frac{AC}{AB}$,

∴ $\frac{2}{5}=\frac{AC}{10}$.

∴ $AC=4$.

由勾股定理

$BC=\sqrt{AC^2-AC^2}=\sqrt{10^2-4^2}=2\sqrt{21}$.

∴ 选 A.

例二 1.(辽宁省)在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C$ 为直角,$a=6$,$\angle B=30^\circ$,则 $c=$______.

解:$c=4\sqrt{3}$.这是一道知一直角边和一锐角(特殊角)求斜边的问题,可以直接求得

$$c=\frac{a}{\cos B}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}.$$

2.在 Rt$\triangle ABC$ 中,已知 $a=15.40$,$\angle A=31^\circ24'$,则 $b=$______.

解:这是一道已知一直角和一锐角求另一直角边的问题,可以直接求得

$\because$ $\mathrm{ctg}A=\frac{b}{a}$,

$\therefore$ $b=a\cdot\mathrm{ctg}A$

$=15.40\times\mathrm{ctg}31°24'$

$=15.40\times1.638$

≈25.23.

3.已知在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$b=\sqrt{5}$,三角形面积为$\frac{5}{2}$,则边长 c 是______,$\angle A=$______.

解:由 $S_{\triangle}=\frac{1}{2}ab$,得

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}a=\frac{5}{2}$,

$\therefore$ $a=\sqrt{5}=b$.

$\therefore$ △ABC 为等腰直角三角形.

$\therefore$ $c=\sqrt{10}$,$\angle A=45°$.

例三 (福州市)已知:如图 A6-10,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$\angle A=30°$,D 在 AC 上,且$\angle BDC=60°$,$AD=20$.

求:BC.

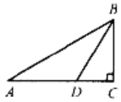


图 A6-10

分析:这是一道解直角三角形的复合问题,要求的边 BC 既在大 Rt△ABC 中,也在小 Rt△BDC 中,联系已知$\angle BDC=60°$,则应在 Rt△BCD 中再寻求一边(BD 或 DC),于是 BC 就可求了.再由$\angle A=30°$,$\angle BDC=60°$,$AD=20$,不难看出△ADB 为等腰三角形,$BD=AD=20$.所以在 Rt△BCD 中,知一斜边和一锐角,BC 可求了.

解:$\because$ $\angle BDC=60°$,$\angle A=30°$,

$\angle BDC=\angle A+\angle ABD$,

$\therefore$ $\angle ABD=\angle BDC-\angle A=60°-30°$

$=30°=\angle A$.

$\therefore$ $BD=AD=20$.

在 Rt△BDC 中,$\angle C=90°$,

$\therefore$ $BC=BD\cdot\sin\angle BDC=20\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=10\sqrt{3}$.

例四 如图 A6-11,在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$b=8$,$\angle A$ 的平分线$AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$,求$\angle B$ 及 a、c 的值.

分析:本题以具有两个已知条件的 Rt△ACD为突破口,在已知条件较多,且图形比较复杂时,往往从具备一定条件的直角三角形入手,这是解题的基本方法.

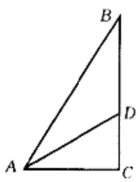


图 A6-11

解:在 Rt△ACD 中,$AC=8$,$AD=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ $\cos\angle DAC=\frac{AC}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\angle DAC=30°$.

又 AD 平分$\angle A$,

$\therefore$ $\angle A=60°$,$\angle B=30°$.

$c=AB=2AC=16$.

$\therefore$ $a=c\cdot\sin A=16\cdot\sin60°=8\sqrt{3}$.

例五 平行四边形的边长分别是 $3\sqrt{2}$cm、$6\sqrt{3}$cm,一个角为 120°,求平行四边形两高的长.

分析:本题分别构造 Rt△ADE 和 Rt△DCF,利用解直角三角形,求出直角边 DE、DF 的长.

解:如图 A6-12,在平行四边形 $ABCD$ 中,$AB=6\sqrt{3}$cm,$BC=3\sqrt{2}$cm,$\angle B=120°$,$\angle A=\angle C=60°$.

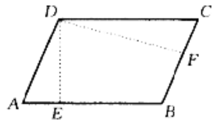


图 A6-12

作 $DE\perp AB$ 于 E,DE 为一高,在 Rt△ADE 中,$DE=AD\sin A$

$=3\sqrt{2}\cdot\sin60°=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

作 $DF\perp BC$,DF 为另一高,在 Rt△DCF 中,$DF=DC\cdot\sin C=6\sqrt{3}\cdot\sin60°=6\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9$.

答:此平行四边形的两高分别为$\frac{3\sqrt{6}}{2}$cm 和 9cm.

例六 (武汉市)在△ABC 中,a、b、c 分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边,且 $c=5\sqrt{3}$.若关于 x 的方程$(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+(5\sqrt{3}-b)=0$ 有两个相等的实数根,又方程 $2x^2-(10\sin A)x+5\sin A=0$ 的两实数根的平方和为 6,求△ABC 的面积.

解:$\because$ 方程$(5\sqrt{3}+b)x^2+2ax+(5\sqrt{3}-b)=0$ 有相等实数根,

$\therefore$ $\Delta=(2a)^2-4(5\sqrt{3}+b)(5\sqrt{3}-b)=0$.

化简,得 $a^2+b^2=75$.

$\because$ $c=5\sqrt{3}$,

$\therefore$ $c^2=75$.

$\therefore$ $a^2+b^2=c^2$.

$\therefore$ △ABC 是直角三角形,且$\angle C=90°$.

设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-(10\sin A)x+5\sin A=0$ 的两实数根,则

$x_1+x_2=5\sin A$,

$x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}\sin A$.

$\because$ $x_1^2+x_2^2=6$,

而 $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$.

$\therefore$ $(5\sin A)^2-5\sin A-6=0$.

解之得

$\sin A=\frac{3}{5}$或 $\sin A=-\frac{2}{5}$(舍去).

在 Rt△ABC 中,$c=5\sqrt{3}$,$a=c\cdot\sin A=3\sqrt{3}$,

$b=\sqrt{c^2-a^2}$

$=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3})^2}$

$=4\sqrt{3}$.

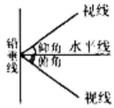
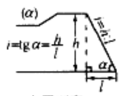
$\therefore$ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab$

$=18$.

6.4 应用举例

双基表解

表 5:应用举例

应用术语解释			解应用题一般步骤
(1)仰角和俯角  图 A6-13(1)	(2)上弦、中柱、跨度  图 A6-13(2)	(3)坡角(α)、坡度(i)  l:水平距离 h:垂直距离 图 A6-13(3)	(1)审题,弄清题意,区分已知条件和求解的问题; (2)画图,标注已知、未知,转实际问题为数学问题; (3)思考解题途径,是否需辅助线,是否需设元等; (4)合理安排解题步骤,正确书写,写出答案(单位).

考题例解

例一 1.(山西省)如图 A6-14,两建筑物的水平距离为 a 米,从 A 点测得 D 点的俯角为 α,测得 C 点的俯角为 β,则较低建筑物 CD 的高度为(　　).

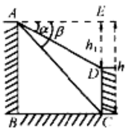


图 A6-14

(A)a 米

(B)$a\text{ctg}\alpha$ 米

(C)$a\text{ctg}\beta$ 米

(D)$a(\text{tg}\beta-\text{tg}\alpha)$米

分析:要求 CD,可以 CD 为边作直角三角形.但不难发现,只要知道与 CD 相关的高度 h 和 h_1(图 A6-14),就可求出 $CD=h-h_1$.所以问题转化为解 Rt△ACE 和Rt△ADE.因为 $AE=BC=a$,这是属于知一直角边和一锐角解直角三角形的问题,应用题可求解.

解:∵　在 Rt△ACE 中,$h=a\cdot\text{tg}\beta$,

在 Rt△ADE 中,$h_1=a\cdot\text{tg}\alpha$,

∴　$CD=h-h_1=a\cdot\text{tg}\beta-a\cdot\text{tg}\alpha$

$=a(\text{tg}\beta-\text{tg}\alpha)$.

故选 D.

2.(四川省)河堤的横断面如图 A6-15 所示,堤高 $BC=5$ 米,迎水斜坡 $AB=13$ 米,那么斜坡 AB 的坡度 i 是(　　).

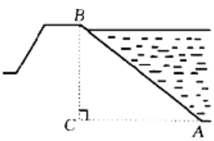


图 A6-15

(A)1:3　(B)1:2.6

(C)1:2.4　(D)1:2

分析:根据坡度的定义:坡面的铅直高度 h 与水平宽度 l 的比叫做坡度,已知 $h=BC=5$,$AB=13$.由勾股定理可求水平宽度 l.

解:在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$.

∵　$AB=13$,$BC=5$,

∴　$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$.

∴　$i=BC:AC=5:12$,　即 $i=1:2.4$.

∴　选 C.

例二　(武汉市)如图 A6-16,厂房屋顶人字架(等腰三角形)的跨度为 10 米,$\angle A=26°$,则中柱 BC(C 为底边中点)的长约是________米(精确到 0.01).

附:$\sin 26°=0.438\,4$,$\cos 26°=0.898\,6$,

$\text{tg}\,26°=0.487\,7$,$\text{ctg}\,26°=2.050\,3$.

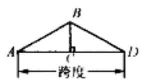


图 A6-16

分析:由等腰三角形性质有 $AC=CD=\frac{1}{2}\times 10=5$,所以应用题转化为在 Rt△$ACB$ 中知一直角边 AC 和一锐角 A,求另一直角边的问题.

解:∵　$AC=\frac{1}{2}AD=5$,

∴　在 Rt△ABC 中,

$BC=AC\cdot\text{tg}\ A=5\cdot\text{tg}\ 26°$

$=5\cdot 0.487\ 7\approx 2.44$.

例三　(湖南省)如图 A6-17,在离旗杆 27 m 的 A 处,用测角器测得旗杆顶 B 的仰角为 30°,已知测角器的高 $AD=1.5$ m,求旗杆高 BF 的长(取$\sqrt{3}=1.73$,结果精确到 0.1 m).

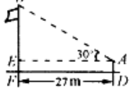


图 A6-17

分析:要求旗杆 BF 的长应先求 Rt△ABE中直角边 BE 的长,这是知一直角边和一锐角求另一直角边问题,可用正切函数求解.

解:在 Rt△ABE 中,

$\because \quad \frac{BE}{AE}=\text{tg } 30^\circ$,

$\therefore \quad BE = AE \cdot \text{tg } 30^\circ$

$= 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 9\sqrt{3}(\text{m})$.

$\therefore \quad BF = BE + EF = BE + AD$

$= 9\sqrt{3} + 1.5$

$\approx 17.1(\text{m})$.

答:旗杆高 BF 的长约为 17.1 m.

例四 (江西省)如图 A6-18,沿水库拦水坝的背水坡将坝顶加宽 2 米,坡度由原来的1:2改成 1:2.5,已知坝高 6 米,坝长 50 米.

(1)求加宽部分横断面 $AFEB$ 的面积.

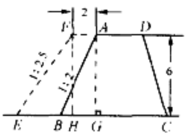


图 A6-18

(2)完成这一工程需多少方土?

分析:要求梯形 $AFEB$ 的面积,已知上底 $AF=2$,必须求出高和下底边 BE.这两者中,高等于 6 米,难点是求出下底 BE.为此需分别过 A、F 作高 AG 和 FH,把问题转化为解 Rt△ABG和 Rt△FEH,求出 BG 和 EH,再由图用线段差求出 EB.

解:(1)作 $AG \perp BC$,$FH \perp BC$,垂足分别是 G、H,于是 $FH = AG = 6$ 米,$HG = AF = 2$ 米.

在 Rt △AGB 和 Rt△FEH 中,

$\because \quad \text{tg } \angle ABG = \frac{AG}{BG} = \frac{1}{2}$,

$\text{tg } \angle E = \frac{FH}{EH} = \frac{1}{2.5}$,

$\therefore \quad BG = 2AG = 2 \times 6 = 12$(米),

$EH = 2.5FH = 2.5 \times 6 = 15$(米).

$\therefore \quad EB = EH - BH = EH - (BG - HG)$

$= 15 - (12 - 2) = 5$(米).

$\therefore \quad S_{\text{梯形}AFEB} = \frac{1}{2}(AF + EB) \cdot FH$

$= \frac{1}{2}(2+5) \cdot 6 = 21$(米^2).

(2)完成这一项工程需要的土方为

$V = S_{\text{梯形}AFEB} \times 50 = 21 \times 50 = 1\,050$(米^3).

答:加宽部分横断面 $AFEB$ 的面积为 21 平方米,完成这一工程需要 1 050 立方米的土.

例五 (西安市)如图 A6-19,海上有一座灯塔 P,在它的周围 3 海里内有暗礁,一艘客轮以 9 海里/时的速度由西向东航行,行至 A 处测得灯塔 P 在它的北偏东 60°,继续行驶 10 分后,到达 B 处,又测得灯塔 P 在它的北偏东 45°,问客轮不改变方向继续前进有无触礁的危险?

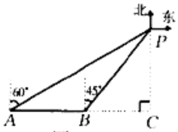


图 A6 - 19

分析:要判断客轮不改变航向继续前进是否有触礁危险,转化为数学问题是判断灯塔 P 到直线 AB 的距离 PC 与半径 3 的大小关系.当 $PC \leqslant 3$ 时有触礁危险;当 $PC > 3$ 时无触礁的危险.为此应先求出 PC 的长.$\because$ PC 落在Rt△PBC 或 Rt △PAC 中,为此把问题转化为解 Rt△PBC 或解 Rt△PAC.

解法 1:

设$|PC| = x$ 海里,依题意得$|BC| = |PC| = x$.

又 $|AB| = 9 \times \frac{10}{60} = \frac{3}{2}$(海里).

在 Rt△PAC 中,$|AC| = \frac{3}{2} + x$,$\angle PAC = 30^\circ$.

$\therefore \quad \frac{x}{\frac{3}{2}+x} = \text{tg}30^\circ$.

$\therefore \quad x = \frac{3}{4}(\sqrt{3}+1) \approx 2.049 < 3$.

答:客轮沿原方向行驶有触礁的危险.

解法 2:

设$|PC| = x$,则$|BC| = |PC| = x$,$|PA| = 2x$,$|AC| = \frac{3}{2} + x$.

$\therefore$ 由勾股定理有:$(2x)^2 = x^2 + \left(\frac{3}{2} + x\right)^2$.

解之得 $x = \frac{3}{4}(1 \pm \sqrt{3})$ (舍去负值).

$\therefore \quad x = \frac{3}{4}(\sqrt{3}+1) < 3$.

答:同上.

第七章　圆

7.1　圆

双基表解

表6:圆的有关概念和圆的性质(一)

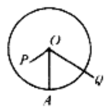
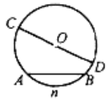
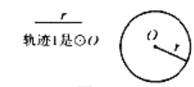
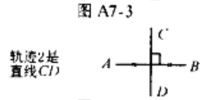
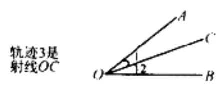
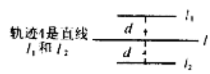
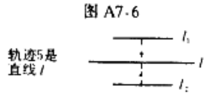
定　　义	图　　形	和圆有关的概念	圆的性质(一)
在一个平面内,线段 OA 绕它固定的一个端点 O 旋转一周,另一端点 A 随之旋转所形成的图形叫做圆,固定的端点 O 叫做圆心,线段 OA 叫做半径,如图 A7-1. 其中圆心确定圆的位置,半径确定圆的大小.	 图 A7-1  图 A7-2 弦 AB. 直径 CD. 弧 AB 记为 $\overset{\frown}{AB}$ ($\overset{\frown}{CAD}$, $\overset{\frown}{ABC}$)、弓形 AnB 等.	(1)弦:连结圆上任意两点线段(图 A7-2). (2)直径:经过圆心的弦. (3)弧:圆上任意两点间的部分.分三种:半圆弧、优弧、劣弧. (4)弓形:由弦及其所对的弧组成的图形,分三种. (5)等圆:能够重合的两个圆. (6)等弧:能够互相重合的弧.	(1)同圆或等圆的半径相等,直径相等,直径=2半径. (2)直径是同圆中最长的弦. (3)圆上的点到圆心的距离都等于半径,反之亦真.图 A7-1中 A 点. (4)圆内的点到圆心的距离都小于半径,反之亦真.图 A7-1中 P 点. (5)圆外的点到圆心的距离都大于半径,反之亦真.图 A7-1中 Q 点.

表7:点的轨迹

定　　义	基本轨迹	图形
符合某一条件的所有点组成的图形叫做符合这个条件的点的轨迹.这里包含有两层意思:(1)图形是由符合条件的哪些点组成的,也就是说,图形上的任何一点都符合条件;(2)图形包含了符合条件的所有点,就是说,符合条件的任何一点都在图形上. (1)是轨迹图形的纯洁性,"不杂";(2)是轨迹图形的完整性,"不漏".	(1)到定点的距离等于定长的点的轨迹,是以定点为圆心,定长为半径的圆,如图轨迹1(图 A7-3). (2)和已知线段的两个端点的距离相等的点的轨迹,是这条线段的垂直平分线,如图轨迹2(图 A7-4). (3)到已知角两边的距离相等的点的轨迹,是这个角的平分线,如图轨迹3(图 A7-5). (4)到直线 l 的距离等于定长 d 的点的轨迹,是平行于这条直线并且到这条直线的距离等于定长的两条直线,如图轨迹4(图 A7-6). (5)到两条平行线距离相等的点的轨迹,是和这两条平行线平行且距离相等的一条直线,如图轨迹5(图 A7-7).	 图 A7-3  图 A7-4  图 A7-5  图 A7-6  图 A7-7

考题例解

例一 选择题:

(云南省)下列命题正确的是(　　).

(A)和 O 点距离等于5cm的点在⊙O上

(B)弦是直径

(C)在两个圆中,若$\overset{\frown}{AB}$的度数和$\overset{\frown}{CD}$的度数相等,则$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$

(D)半径相等的两个半圆是等弧

解:选D.

用逐项审查法:∵ A没明确⊙O的半径为5cm,∴ A是错的.B弦需经过圆心,才是直径,故B不正确.C从题给条件只能说两弧的度数相等,∴ C也是错的.故选D.

例二 填空题:

1.(山西省)过线段 AB 两端点的圆的圆心轨迹是______.

2.(天津市)如图A7-8,已知 AB 为⊙O的直径,AC 为弦,$OD\parallel BC$,$BC=6$cm,则 $OD=$______.

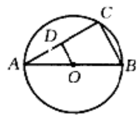
解:1. AB 的垂直平分线.

2. 3cm.

∵ AB 是⊙O直径,

∴ $OA=OB$,又 $OD\parallel BC$

∴ OD 平分 AC 于 D,即 OD 是△ABC的中位线.



图A7-8

∴ $OD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 6=3$(cm).

例三 证明题:

(武汉市)已知:如图A7-9,在⊙O中,AB为弦,C、D两点在 AB 上,且 $AC=BD$.

求证:△OAC≌△OBD.

图A7-9

证明:∵ OA、OB 为⊙O的半径,

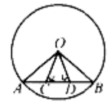
∴ $OA=OB$.

∴ △AOB为等腰三角形.

∴ $\angle A=\angle B$. 又 $AC=BD$,

∴ △OAC≌△OBD. (SAS)

例四 已知:如图A7-10,在⊙O中,AB 为弦,C、D 两点在 AB 上,且△OCD为等腰三角形.



图A7-10

求证:$AD=BC$.

证明:由 $OA=OB$ 得$\angle A=\angle B$.

由 $OC=OD$ 得$\angle 1=\angle 2$.

∴ 在△AOD和△BOC中,

$$\begin{cases}\angle A=\angle B,\\ \angle 1=\angle 2,\\ OA=OB.\end{cases}$$

∴ △AOD≌△BOC. (AAS)

∴ $AD=BC$.

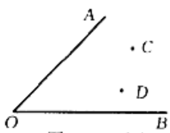
例五 (黑龙江省)已知:$\angle AOB$ 和它内部两点 C、D.如图A7-11(1).

求作:一点 P,使 $PC=PD$,且点 P 到$\angle AOB$的两边距离相等.

分析:所求作的点必须同时满足两个条件:

(1)$PC=PD$.

(2)P 到$\angle AOB$的两边 OA、OB 的距离相等.



图A7-11(1)

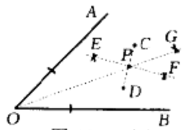
由轨迹2知,到已知点 C 和 D 的距离相等的点在线段 CD 的中垂线上.

由轨迹3知和已知角($\angle AOB$)的两边距离相等的点在这个角的角平分线上.

于是,同时满足上述两个条件的点是线段 CD 的中垂线和$\angle AOB$的角平分线的交点 P.

作法:1.连结 CD,作 CD 的中垂线 EF.

2.作$\angle AOB$的平分线 OG.设 OG 与 EF 交于点 P,则点 P 为所求作的点.



图A7-11(2)

如图A7-11(2).

7.2 过三点的圆

双基表解

表8:过三点的圆

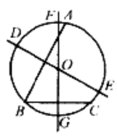
三点在同一直线上	三点不在同一直线上	圆和三角形的关系
过同一直线上的三点不能作圆. ∵ AB 和 CB 的垂直平分线互相平行,找不到圆心, ∴ 过 A、B、C 三点不能作圆.	定理:不在同一直线上的三个点确定一个圆. 作法: (1)连结 AB,作 AB 的中垂线 DE; (2)连结 BC,作 BC 的中垂线 FG,交 DE 于 O 点; (3)以 O 为圆心,OB(或 OA,或 OC)为半径作圆,则⊙O为所求作的圆.这样的圆可作且仅可作一个圆. 图A7-12	(1)经过三角形三个顶点可以作一个圆且只可以作一个圆. (2)三角形的外接圆——经过三角形各顶点的圆. (3)三角形的外心——外接圆的圆心称为三角形的外心. 外心性质:外心到三角形的三个顶点的距离相等. 外心的位置:锐角三角形的外心在三角形内;直角三角形的外心是斜边中点;钝角三角形外心在三角形外. (4)圆的内接三角形——三角形的三个顶点在同一个圆上,这个三角形称为圆的内接三角形.

表 9:反证法

类 别	内 容
定 义	从命题的结论的反面出发,引出矛盾,从而证明命题成立的证明方法叫做反证法.
用反证法证明命题的一般步骤	(1)假设命题的结论不成立,简称为"反设". (2)从这个假设出发,经过推理论证,得出矛盾,简称为"归谬". (3)由矛盾判定假设不正确,从而肯定命题的结论正确,简称为否定反设,肯定原命题.

考题例解

例一 选择题:

1.(成都市)在 Rt△ABC 中,已知两直角边的长分别是 6cm 和 8cm,那么 Rt△ABC 的外接圆的面积是( ).

(A)$30\pi cm^2$ (B)$25\pi cm^2$

(C)$20\pi cm^2$ (D)$15\pi cm^2$

2.(广东省)用反证法证明命题"若⊙O 的半径为 r,点 P 到圆心的距离 d 大于 r,则点 P 在⊙O 的外部",首先应假设( ).

(A)$d<r$ (B)$d\leqslant r$

(C)点 P 在⊙O 外(D)点 P 在⊙O 上或点 P 在⊙O 内

解:1.这是一道计算型的选择题,要求外接圆的面积,必须先求出外接圆的半径.由于直角三角形的外心在斜边中点上,∴ 半径 $=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+8^2}=5$. ∴ $S_{外接圆}=25\pi(cm)^2$.故选 B.

2.由反证法的假设应从命题的结论的反面出发这一原理,结论"点 P 在⊙O 的外部"的反面为:"点 P 在⊙O 上或点 P 在⊙O 内".故选 D.

例二 填空题:

1.(四川省)用反证法证明命题"一个三角形中不能有两个角是钝角"时,首先应假定______.

2.(武汉市)三角形的外接圆的圆心叫做______.

解:1.一个三角形中有两个角是钝角.

2.三角形的外心.

例三 (南昌市)作图题:

要浇铸一个与破残轮片(图 A7-13)同样大小的圆轮,需要知道它的一条半径.用圆规和直尺在图中作出它的一条半径(不要求写已知、求作、作法和证明,但要保留作图的痕迹).

图 A7-13

分析:此题要求作出残轮的一条半径,关键在于求出残轮所在圆的圆心,这是数学理论"过不在同一直线上的三点确定一个圆"的实际应用.作图方法是:先在残轮圆周上任意取三点 A、B、C,然后连结 AB、BC,再分别作线段 AB、BC 的中垂线 l_1、l_2,则 l_1、l_2 的交点即为圆心 O,连结 OA(或 OB、OC)即为残轮的半径.具体作图见上图.

例四 (辽宁省)过 A、B、C 三点,能否确定一个圆?如果能,请作出图,并写出作法;如果不能,请用反证法加以证明.

分析:此题为"过三点的圆"的完整讨论题,因所给的 A、B、C 三点分两种情况:(1)A、B、C 三点不在同一直线上;(2)A、B、C 三点在同一直线上.结论是(1)过不在同一直线上的三个已知点可作且仅可作一个圆(即确定一个圆);(2)过在同一直线上的三个已知点不能作圆.分两种情况解答为:

(1)如果 A、B、C 三点不在同一条直线上,就能确定一个圆.

作法:①连结 AB,作线段 AB 的垂直平分线 DE.

②连结 BC,作线段 BC 的垂直平分线 FG,交 DE 于点 O.

③以 O 为圆心,OB 为半径作圆,则⊙O 就是过 A、B、C 三点的圆.如图 A7-14(1).

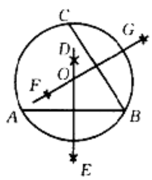


图 A7-14(1)

(2)如果 A、B、C 三点在同一条直线上,就不能确定一个圆.

假设过 A、B、C 三点可以作圆,设这个圆的圆心为点 O.

由点的轨迹可知,点 O 在线段 AB 的垂直平分线 l' 上,并且在线段 BC 的垂直平分线 l'' 上,即点 O 为 l' 和 l'' 的交点,这与"过一点有且只有一条直线与已知直线垂直"相矛盾.

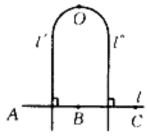


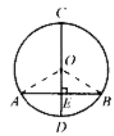
图 A7-14(2)

所以,过同一条直线上的三点 A、B、C 不能作圆,如图 A7-14(2)所示.

7.3 垂直于弦的直径

双基表解

表 10:圆的性质(二)——垂直于弦的直径

圆的轴对称性	垂径定理及推论	图形
圆是轴对称图形,经过圆心的每一条直线都是它的对称轴. 因为直径经过圆心,所以直径是圆的对称轴,圆有无数条对称轴.	定理:垂直于弦的直径平分这条弦,并且平分弦所对的两条弧. 推论:(1)①平分弦(不是直径)的直径垂直于弦,并且平分弦所对的两条弧;②弦的垂直平分线经过圆心,并且平分弦所对的两条弧;③平分弦所对的一条弧的直径,垂直平分弦,并且平分弦所对的另一条弧. (2)圆的两条平行弦所夹的弧相等.	 图 A7-15 条件:CD 是直径,AB 是弦,$CD\perp AB$ 于 E. 结论:$AE=EB$, $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}$, $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DB}$.

考题例解

例一 选择题:

1.(北京市)如图 A7-16,$\odot O$ 中直径 AB 垂直于弦 CD,垂足为 E,若 $AB=10$,$CD=6$,则 BE 的长是(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

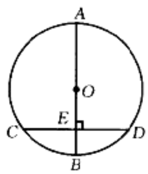


图 A7-16

解:连结 OC,在 $\mathrm{Rt}\triangle OCE$ 中,$OE=\sqrt{OC^2-CE^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$. ∴ $BE=BO-OE=5-4=1$. 故选 A.

2.(福州市)下列命题,错误的是(　　).

(A)垂直于弦的直径平分这条弦

(B)弦的垂直平分线经过圆心

(C)平分弦所对的一条弧的直径,垂直平分弦

(D)平分弦的直径垂直于这条弦

解:直径也是弦,同圆的两条直径必互相平分,但不一定互相垂直,故 D 是错误的.答案应选 D.

3.(北京市)在$\odot O$ 中,弦 AB 的长为 8cm,AB 弦的弦心距为 3cm,则$\odot O$ 的半径长为(　　).

(A)$\sqrt{7}$cm　(B)5cm　(C)7cm　(D)$\sqrt{73}$cm

解:连结 OA,由垂径定理得一直角边等于 4cm,另一直角边为圆心距 3cm,斜边为半径为 5cm,故选 B.

4.(广西区)如图 A7-17,在半径为 5 的$\odot O$ 中,弦 AB 的长为 6,则弦心距 $OC=$(　　).

(A)2　(B)5　(C)4　(D)3

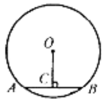


图 A7-17

解:(略)选 C.

例二 填空题:

1.(江西省)如图 A7-18,AB 是$\odot O$ 的直径,弦 CD 与 AB 相交于点 E,若______,则 $CE=DE$.(只填写一个你认为适当的条件)

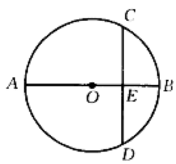


图 A7-18

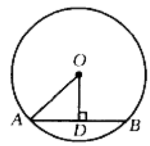


图 A7-19

2.(广州市)如图 A7-19,已知$\odot O$ 的半径 $OA=6$cm,弦 $AB=8$cm,则弦心距 OD 等于______.

3.(昆明市)一弓形的弦长为 $4\sqrt{6}$cm,弓形所在圆的半径为 7cm,则弓形的高应是______.

4.(吉林省)在$\odot O$ 中,弦 AB 的长为 8cm,圆心 O 到 AB 的距离为 3cm,则$\odot O$ 的半径长为______ cm.

5.(山西省)如图 A7-20,CD 是$\odot O$ 的直径,且 $CD=6$,弦 $AB\perp CD$ 于 P,$PD=1$,则 $AB=$______.

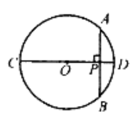


图 A7-20

解:1.$CD\perp AB$　2.$2\sqrt{5}$　3.2　4.5　5.$2\sqrt{5}$

例三 (黑龙江省)已知:如图 A7-21,BD 为$\odot O$ 的直径,弦 $AC\perp BD$,垂足为 E,BA 和 CD 的延长线交于点 P.求证:(1)$AB=BC$;(2)$CD\cdot PC=PA\cdot BA$.

证明:连结 AD.

(1)∵ BD 是直径,$AC\perp BD$,

∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{DC}$.

∴ $AB=BC$,$AD=DC$.

(2) $\because$ 四边形 $ABCD$ 内接于⊙O,

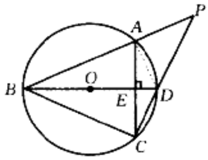


图 A7-21

$\therefore$ $\angle PDA=\angle PBC$.

又 $\because$ $\angle P=\angle P$.

$\therefore$ $\triangle PAD\backsim\triangle PCB$.

$\therefore$ $\dfrac{PA}{PC}=\dfrac{AD}{CB}$.

$\therefore$ $PA\cdot CB=AD\cdot PC$.

$\because$ $AB=BC,AD=DC$,

$\therefore$ $CD\cdot PC=PA\cdot BA$.

例四 （内蒙古区）如图 A7-22,在以 O 为圆心的两个同心圆中,大圆的弦 AB 交小圆于 C、D 两点.

求证:$AC=BD$.

证明:过 O 作 $OM\perp AB$,垂足为 M,由垂径定理得

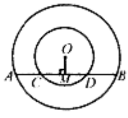


图 A7-22

$AM=MB,CM=MD$.

$\therefore$ $AM-CM=MB-MD$.

$\therefore$ $AC=BD$.

例五 （内蒙古区）已知:如图 A7-23,AB 是⊙O 的直径,CD 是弦,$AE\perp CD$,垂足为 E,$BF\perp CD$,垂足为 F.

(1)求证:$EC=DF$;

(2)若 $AE=a,EF=b,BF=c$,

求证:tg$\angle EAC$ 和 tg$\angle EAD$ 是方程 $ax^2-bx+c=0$ 的两个根.

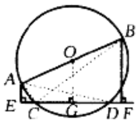


图 A7-23

证明:(1)过 O 作 $OG\perp EF$,垂足为 G.

$\because$ $\left.\begin{array}{l}AE\perp CD\\BF\perp CD\\OG\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow AE/\!/OG/\!/BF$ 又 $OA=OB$

$\Rightarrow EG=GF$(平行线等分线段定理)

又 $OG\perp CD\Rightarrow CG=GD$(垂径定理)

$\Rightarrow EG-CG=GF-GD$,

即 $EC=DF$.

(2)连结 AC、BC、AD,在 Rt$\triangle AEC$ 中,

tg$\angle EAC=\dfrac{EC}{AE}$.

同理,tg$\angle EAD=\dfrac{ED}{AE}$.

$\therefore$ $\text{tg}\angle EAC+\text{tg}\angle EAD=\dfrac{EC}{AE}+\dfrac{ED}{AE}=\dfrac{EC+ED}{AE}$.

$\because$ $EC=DF$,

$\therefore$ $\text{tg}\angle EAC+\text{tg}\angle EAD=\dfrac{DF+ED}{AE}=\dfrac{EF}{AE}=\dfrac{b}{a}$. ①

又 $\text{tg}\angle EAC\cdot\text{tg}\angle EAD=\dfrac{EC}{AE}\cdot\dfrac{ED}{AE}=\dfrac{EC\cdot ED}{AE^2}$. （※）

在 Rt$\triangle AEC$ 和 Rt$\triangle CFB$ 中,$\angle AEC=\angle CFB=90°$.

$\because$ AB 为⊙O 的直径,

$\therefore$ $\angle ACB=90°$.

$\therefore$ $\angle ACE+\angle BCF=90°$.

又 $\angle CBF+\angle BCF=90°$,

$\therefore$ $\angle ACE=\angle CBF$.

$\therefore$ Rt$\triangle AEC\backsim$Rt$\triangle CFB$.

$\therefore$ $\dfrac{EC}{FB}=\dfrac{AE}{CF}$.

$\therefore$ $EC\cdot CF=AE\cdot FB$.

$\because$ $EC=DF$,

$\therefore$ $EC+CD=DF+CD$,即 $ED=CF$.

又 $AE=a,FB=c$,

$\therefore$ $EC\cdot CF=EC\cdot ED=a\cdot c$.

代入(※)得 $\text{tg}\angle EAC\cdot\text{tg}\angle EAD=\dfrac{ac}{a^2}=\dfrac{c}{a}$. ②

$\therefore$ 由①和②得,tg$\angle EAC$ 和 tg$\angle EAD$ 为方程 $x^2-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ 的两根.

而方程 $x^2-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ 即为 $ax^2-bx+c=0$.

例六 （盐城市）如图 A7-24,⊙O 的直径 $AB\perp CD$ 弦于 P 点,若 $CD=4\sqrt{3}$,$OP=2$,求 AC 和 $\cos B$.

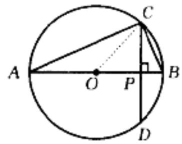


图 A7-24

分析:题目条件中有垂直于弦的直径,又是计算弦长,考虑连结 OC 构造直角三角形解答.

解:连结 OC.

$\because$ AB 是⊙O 的直径,$AB\perp CD$,

$\therefore$ $PC=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle OCP$ 中,

$OC^2=OP^2+PC^2$.

$\therefore$ $OC=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$.

而 $AO=OC$,

$\therefore$ $AO=4,AP=6$.

在 Rt$\triangle ACP$ 中

$$AC=\sqrt{PC^2+PA^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ \cos B=\cos\angle ACP=\frac{CP}{AC}=\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}.$$

例七 如图 A7-25,已知⊙O 中弦 AB 的长是半径 OA 的 $\sqrt{3}$ 倍,C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,AB、OC 相交于点 P.求证:四边形 $OACB$ 是菱形.

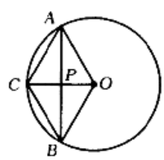


图 A7-25

分析:C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,据垂径定理推知 $AB\perp OC$,且 $AP=PB$,在 Rt$\triangle OAP$ 中,求得 $\angle AOC$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,从而知道 $\angle AOC=60°$,$\triangle AOC$ 为等边三角形,同理可知 $\triangle BOC$ 也为等边三角形,问题得证.

证明:$\because$ C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,O 为圆心,

$\therefore$ $OC\perp AB$,$AP=PB$.