

断裂力学的 工程应用

FRACTURE MECHANICS
IN ENGINEERING
PRACTICE

[英]P. 斯坦利主编

机械工业出版社

原 著 前 言

随着一门学科领域的扩展，把最新取得的知识与专门技术，在最关心它们的实际应用的人们之间进行有效的交流，是很重要的。六十与七十年代中，在断裂力学方面上的发展，就是这种需要的一个最好的例子。应力分析组 1976 年年会，正是为适合这个目标而重点安排的。

会上宣读了 23 篇论文，并收入于本文集。一部分论文是关于有限元技术在确定应力强度因子与其它有关参数上的应用的——其中有的还提出了新的方法和论述了几种重要的应用。对裂纹扩展研究论述得很好；例如，包含有一种大尺寸的实验研究与一种新的预计裂纹扩展率的简化方法。论述了若干重要的新的设计概念和预测工程结构与部件的破坏的通用方法。还处理了小尺寸试验的有效性和多个边界效应问题。交流发电机转子与军用桥梁，是重要的应用研究对象；其它有特殊兴趣的课题还有：开裂耳片的剩余强度试验、玻璃纤维加强的聚脂树脂的韧度试验、应力腐蚀开裂与加强板分析。

论文的高质量与精采的宣读，是会议取得成功的主要原因。应力分析组委员会谨向各位作者表示谢意。

P. 斯坦利

目 录

1. 实用工程部件单一与复合型应力强度因子的确定	1
2. 数值计算技术在实际断裂力学中的应用	34
3. 应力强度因子与扩充的能量法	58
4. 工程结构破坏估计的统一方法	72
5. 线弹性与弹塑性相结合的断裂力学理论及其工程应用	86
6. 二维与三维应力强度因子的有限元计算	100
7. 论有限元素能量法在计算应力强度因子上的应用	117
8. 评定实际裂纹扩展问题的闭合形式法	127
9. 多个边界影响下孔边裂纹的应力强度因子	156
10. 压力容器的先漏后破概念与有关的安全论证	173
11. 估算始于缺口的裂纹扩展率的一个简便方法	182
12. 短裂纹疲劳裂纹扩展数据的断裂力学分析	193
13. 焊接管接头的疲劳裂纹扩展	215
14. 薄板缓慢和快速断裂的预计	237
15. 断裂力学原理对接触应力引起的应力腐蚀断裂的应用	264
16. 玻璃纤维增强的聚脂树脂的断裂韧度	279
17. 浅切口合金钢梁在三点弯曲下的塑性断裂性能	298
18. 大型转子锻件中的缺陷群与断裂	317

19. 残余应力对交流发电机转子的疲劳裂纹扩展的影响	334
20. 销钉——耳片试件剩余强度的断裂力学研究	351
21. 加强板中连接处变形对疲劳裂纹扩展率的影响	374
22. 小尺寸试验在评定断裂力学参数上的适用性	387
23. 军用桥梁的损伤容限	401

1. 实用工程部件单一与复合型应力强度因子的确定

T. H. Richards 与 A. W. Robertson

摘 要

在估计结构强度方面，断裂力学提供一种能明确地顾及类裂纹缺陷的方法。这种方法的中心环节，是确定所谓应力强度因子或与其相当的参数（它们是结构的几何形状与载荷的特性的函数）。具有实用价值的工程部件，通常有十分复杂的外形，以致不可能用解析法来确定其应力强度因子，而必须借助于某些数值处理方法；其中有限元素法特别适用于这种工作。本文的目的就是论述此方法在各种含裂纹部件的单一与复合型断裂特性分析上的应用。

裂纹顶端附近应力场具有奇异性。因而，除非采取特殊措施，数值计算方法就变得异常困难。为此，可利用若干种特殊的裂纹顶端单元，它们的优劣将在后面加以评述。本文所述的工作，是以一种具有围绕裂纹顶端的“核心区”形式的，并嵌置在标准（六结点等参数三角元）有限元网络中的单元为基础的。在核心中，取裂纹顶端附近的、包含应力强度因子为待定参数的位移场作为形状函数。把核心区的解合成到标准有限元程序中去的过程，则通过拉格朗日乘子的应用予以阐明。

结合对若干有实际意义的问题的应用，本文论述了单个与多个顶端的裂纹问题的解决办法，包括单一与复合型断裂特性与裂纹局部张开的情况。特别是，本文还对考虑到由轮齿的表面硬化而产生的残余应力效应的齿轮，进行了分析。

符 号

$[B(x_1, x_2, x_3)]$ 应变函数矩阵

$[C]$ 协调矩阵
 $[D]$ 弹性矩阵, $\{\sigma\}=[D]\{\epsilon\}$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \text{对平面应力}$$

$$= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \text{对平面应变}$$

G 剪切弹性模量
 $K_{I,II,III}$ 应力强度因子
 $[K], [k]$ 刚度矩阵
 $[N(x_1, x_2, x_3)]$ 位移插值函数矩阵
 $\{q\}, \{Q\}$ 广义坐标与广义力
 r 极坐标
 U 应变能
 $u_i, \{u\}$ 位移分量, 位移矢量
 V 总位能
 x_i 直角坐标
 $\{\alpha\}$ 核心(奇异)解中的参数矢量
 $\{\epsilon\}$ 应变分量矢量
 θ 极坐标
 κ 弹性参数
 λ 拉格朗日乘子
 ν 泊松比
 $\sigma_{ij}, \{\sigma\}$ 应力分量, 应力分量矢量
 Ω 外载荷位能

序 言

任何工程结构都含有如裂纹等内在的缺陷, 断裂力学理

论的目的, 就在于在确定结构强度时明确地计及这些缺陷的影响。依据这一理论[1], 对在结构中已存在的裂纹, 当其顶端附近的奇异应力场的幅度达到某一临界值时, 它便开始传播。这个幅度由所谓应力强度因子来度量, 后者本身是载荷性质和结构形状的函数。因而, 应力强度因子的确定是将理论用于设计的中心环节。

对于一些理想状况, 已用解析法得出数据, 并已由文献[2]有效地加以总结。但是, 对于外形和载荷复杂的实际工程构件, 解析法的应用范围十分有限。从而必须依靠近似的数值方法, 其中之一就是有限元素法。但是, 这种以假设的位移场与(或)应力场为基础的离散化技术, 与所有的离散化方法一样, 具有下述的缺点, 即, 如果不对它作某些修改, 就往往不能恰当地表出在奇点邻域的待求函数。已经清楚^[3], 这种不完善表示的效应能波及至问题的要害处, 因此特别希望能对奇点加以应有的考虑。

处理上述问题的各种尝试, 记于文献[4,5,6]中。本文所作的研究, 就应用了对文献[6]中的方法的一个发展[⊖]。本文中, 环绕裂纹尖端的(圆形)“核心”区, 嵌置在通常的(六结点等参数三角元)有限元网格内。在核心内, 使用了一种由刚体运动模式与常用的裂纹顶端附近位移场相结合的位移模式。为此, 只须对标准有限元程序作一些次要的修改, 而且本法还具有把应力强度因子直接与其它有限元结果一起计算出来这种引人注目的特点。应用拉格朗日乘子, 核心与等参元的合成过程能十分方便地完成。

本法已用于一些已知情况, 因此能估量出如核心尺寸

⊖ 自本文完成以来, 包含奇异性的等参元已经形成了, 参看文献[7]。

和核心—网格交界上结点数目等因素对精确度的影响。本法也检验了若干新的问题。

线性断裂力学理论概要

二维弹性理论能确定在平面应变, 广义平面应力, 平面外剪切及轴对称情形下裂纹顶端附近的应力与位移[8]。对平面情形, 会有两种裂纹扩展模式: I型即裂纹张开情形, 与 II型即一裂纹表面相对于另一表面作平面内滑移的情形。平面外剪切情形, 称为 III型。上述这些情形见图1所示, 而且在裂纹顶端附近的应力与位移场可用如下形式的公式表出[8]

$${}_m\sigma_{ij} = K_m r^{-1/2} {}_mf_{ij}(\theta) \quad i, j = 1, 2 \quad (1)$$

$$m = \text{I, II, III}$$

$${}_m u_i = \frac{K_m r^{1/2}}{G} {}_mg_i(\nu, \theta) \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$m = \text{I, II, III}$$

式中 ${}_mf_{ij}(\theta)$, ${}_mg_i(\nu, \theta)$ ——已知函数;

K_m —— m 型应力强度因子。

例如, 对 I 型情况, 有

$${}_1f_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \quad (3)$$

以及

$${}_1g_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} \left[(2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] \quad (4)$$

其中对平面应变 $\kappa = (3 - 4\nu)$, 对广义平面应力 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ 。对复合型情况的相应公式, 可由将形式如 (1), (2) 的公式迭加而得。

将试件处于与所研究的真实结构部位相同的环境下, 按

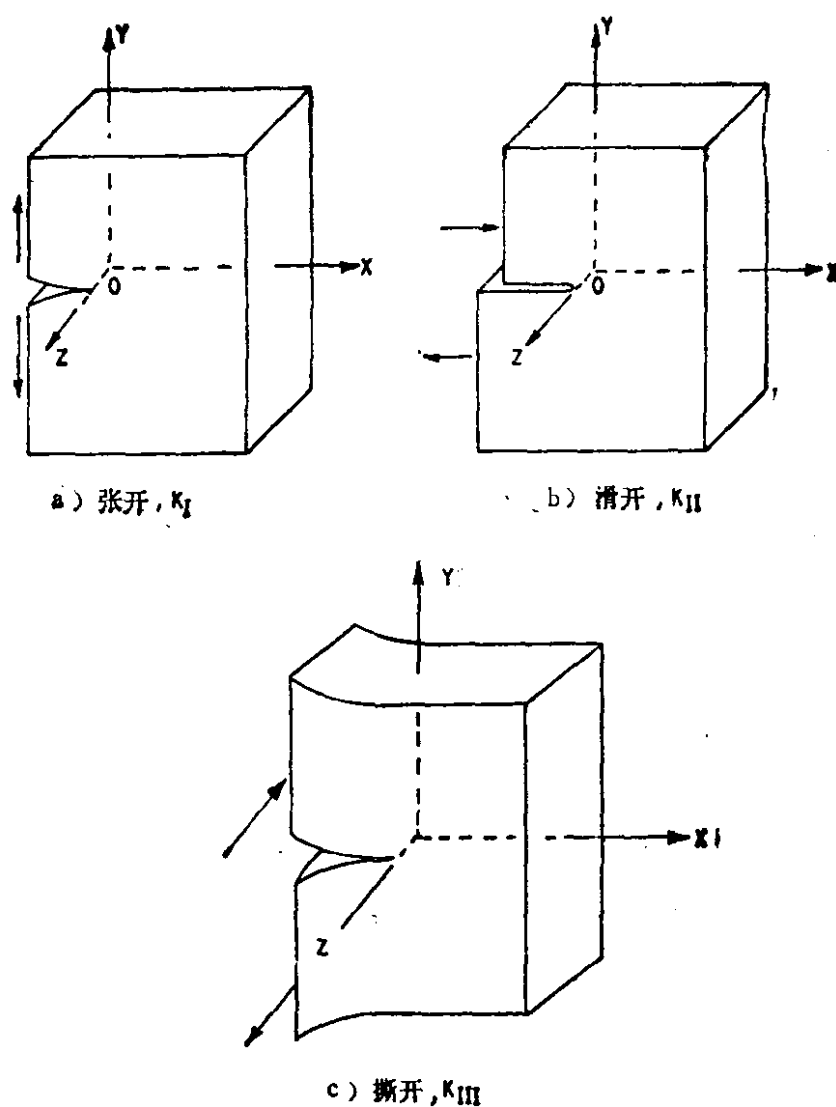


图1 裂纹扩展的基本型式

相同的主要型式加载, 进行实验室试验, 可得出对选定的材料在发生破坏时的临界值 K_{mc} 。如对结构算得的 K_m 并不以某一合适的裕量小于 K_{mc} , 则必须修改设计。对更一般的情况, 也可考虑使用应变能密度准则[9]。

有限元素法

有限元素法可理解为一种分片的, 求出待定函数的近似解的 Rayleigh—Ritz 过程。设想把待求解的存在区域划分

为有限个数的子区域，它们的边界交成曲线网格，后者本身又在结点上相交。在每个单元内假设出待定函数的分布形状，至于其幅度则由某些参数所控制。这些参数可以是，而且一般也就是待定函数的结点值，它们由适用于本问题的变分原理定出。在本文的工作中所用的所谓位移法的基础，即为总势能驻值原理，其程序如下。

在单元内，设位移场为

$$\{u\}^e = [N(x_1, x_2, x_3)] \{u_0\}^e \quad (5)$$

式中 $[N(x_1, x_2, x_3)]$ ——插值函数矩阵；

$\{u_0\}^e$ ——单元结点位移矢量。

例如，对平面应变， $(\{u\}^e)^t$ 即为 $[u_1(x_1, x_2), u_2(x, x_2)]$ ，而如果 $[N(x_1, x_2)]$ 是 x_1 与 x_2 的二次型，则 $\{u_0\}^e$ 为 12×1 结点位移矢量，于是此模型对六结点三角元适用。应用通常的弹性力学中的应变—位移关系，对 $[N(x_1, x_2, x_3)]$ 进行微分后，可得单元的应变矢量为

$$\{\varepsilon\} = [B(x_1, x_2, x_3)] \{u_0\}^e \quad (6)$$

如 $[N(x_1, x_2, x_3)]$ 对 x_1, x_2, x_3 为线性，则公式(6)表示在单元内的应变为常数。比较繁复的单元，例如本文所用的等参数三角元，也是现成可用的；使用它们可提高计算过程的有效性。

单元内储存的应变能，可由下式算出

$$U_e = \frac{1}{2} \int_e \{\varepsilon\}^t [D] \{\varepsilon\} d \text{ vol} \quad (7)$$

式中 $[D]$ ——弹性常数矩阵。

由(6)，可得

$$U_e = \frac{1}{2} \{u_0\}^{et} \left(\int_e [B]^t [D] [B] d \text{ vol} \right) \{u_0\}^e \quad (8)$$

或

$$U_e = \frac{1}{2} \{u_0\}^e t [k]_e \{u_0\}^e \quad (9)$$

式中 $[k]_e$ ——单元刚度矩阵。

假设满足某些连续性条件[10]，将全部单元的 U_e 迭加，即得储存于物体内的总应变能

$$U = \sum_e U_e \quad (10)$$

为一致起见，单元结点位移可按离散化系统的广义坐标 $\{q\}$ 写出，从而得到下列的典型表达式

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} \quad (11)$$

式中 $[K]$ ——总体刚度矩阵。

设外载荷存在势函数 Ω 。将外载荷用作用在广义位移 q_i 上的广义力 Q_i 的形式表出，则得

$$\Omega = -\{q\}^t \{Q\} \quad (12)$$

于是系统的总势能可写作

$$V = U + \Omega = \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} - \{q\}^t \{Q\} \quad (13)$$

在平衡时， V 必须达到驻值[11]，故有

$$\delta V = 0 = \{\delta q\}^t ([K] \{q\} - \{Q\}) \quad (14)$$

因为变分 $\{\delta q\}$ 是任意的，故由(14)可得常用的刚度平衡方程为

$$[K] \{q\} = \{Q\} \quad (15)$$

在加上位移边界条件后，可由方程(15)解出全部的 q 并进而定出单元的应变和应力。

含有“奇异”核心的有限元素法

由[12]已知，原封不动地应用有限元素法，即使采用了为数极多的单元，也不能得到裂纹顶端附近状态的完善的反映。对此一个可行的补救办法是：划出一包含裂纹顶端的子区域，或“核心”，并在其内部加上裂纹顶端附近应力与位移场的各种常规条件。可设想核心嵌入在普通的有限元网格中，因此，核心内部的位移解是受到限制的，它必须与两区域交界上的有限元结点位移相吻合。

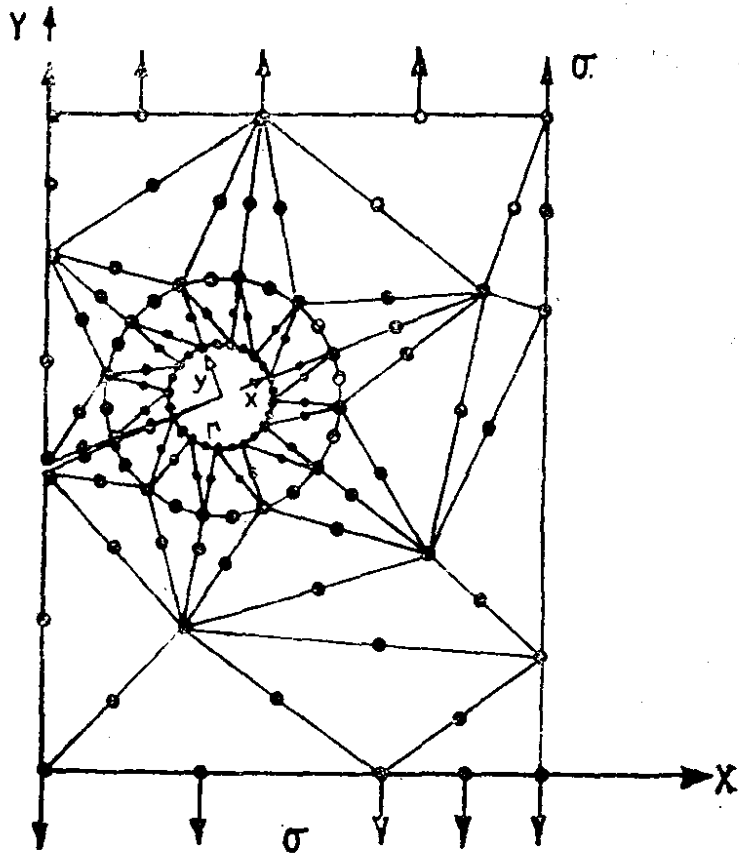


图 2 单裂纹顶端问题的核心单元与有限元模型

在把问题定型并阐明其所包含的过程时，拉格朗日乘子是一种相当有力的工具。

为确定起见，考虑平面断裂模式，并对一例如含有单边切口的平板作离散化，如图 2 所示。如裂纹与板边正交，则公式(1)、(2)在核心内成立。但是，把事情表达得更一般些是有好处的。因此，我们假设在核心内部，位移用由若干项组成的级数来表示；这种表示形式，不但把较常见的单一

与复合型断裂的公式作为特例包括在内, 而且有当在核心区内需要引用高次展开项时(例如应用 William 应力函数[13]), 仍然有效。此外, 当如图 3 所示有几个奇点时; 或者在处理无限大物体时, 须要迭加 Laurent 级数解以满足无限远处边界条件的情况下[19], 本法仍有足够的普遍性可以适用。

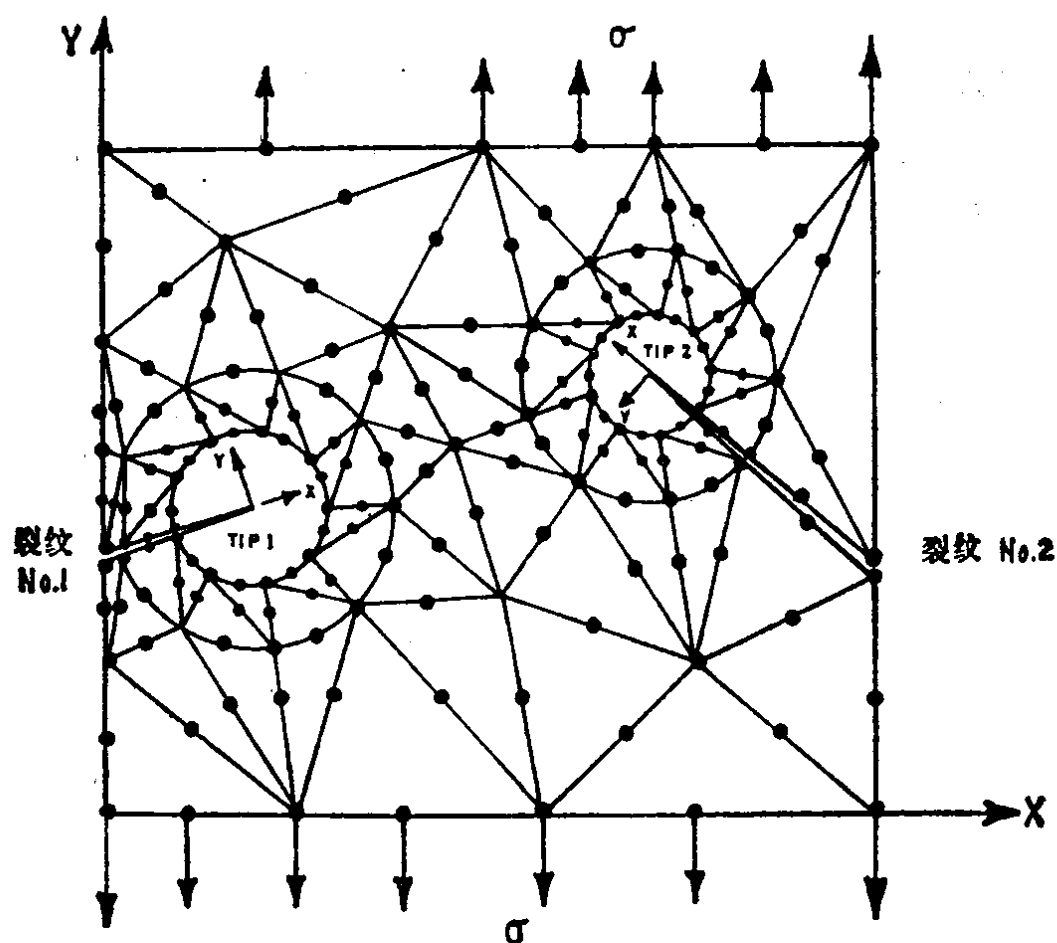


图 3 双裂纹顶端问题的核心单元与有限元模型

为把裂纹顶端场合成到有限元分析中去, 在公式(2)中附加以刚体位移型式的项, 是适宜的。因此可写出在一个二维核心中的位移表达式为

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= [\phi_1(x_1, x_2)] \{\alpha_1\}, u_2(x_1, x_2) \\ &= [\phi_2(x_1, x_2)] \{\alpha_2\} \end{aligned} \quad (16)$$

或

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \{u\} = \begin{bmatrix} [\phi_1] & 0 \\ 0 & [\phi_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_1\} \\ \{\alpha_2\} \end{Bmatrix} = [N]_c \{\alpha\} \quad (17)$$

式中 α ——某些有待确定的参数。

应用弹性力学中的应变位移关系，可得

$$\{\varepsilon\} = [B]_c \{\alpha\} \quad (18)$$

故所储存的应变能由

$$U_c = \{\alpha\}^t ([B]_c^t [D]_c [B]_c d\text{vol}) \{\alpha\} \quad (19)$$

给出。也可写作

$$U_c = \frac{1}{2} \{\alpha\}^t [k]_c \{\alpha\} \quad (20)$$

核心的形状可以是任意的，但因通常公式 (16) 由极坐标表出，所以取图 2 所示的圆形核心较为方便，同时也易于计算形成 $[k]_c$ 时所需的积分。现在，核心—网络系统的总势能为

$$V = \frac{1}{2} \{\alpha\}^t [k]_c \{\alpha\} + \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} - \{q\}^t \{Q\} \ominus \quad (21)$$

式中 $[K]$ ——在核心外面的有限元离散化系统的总体刚度矩阵。

在对公式 (21) 作变分以导出平衡方程时，要注意这不是一个自由变分问题。有一些 q （相应于正好在核心边界之上的有限元结点）与 α 有关。应用公式 (17)，依据裂纹顶端上的位移解，可把这些公共结点上的位移解出为

⊖ 因为位移协调不是在整个交界上、而只是在结点上成立，所以精确的做法应在此处加上一修正项。不过，计算实践已表明可以减轻这种效应而略去其对计算结果的影响。使用等参元可严格满足核心上的边界条件。——原注

$$\{u\}_c = \begin{Bmatrix} \{u_1\}_c \\ \{u_2\}_c \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N_1]_c \{\alpha\} \\ [N_2]_c \{\alpha\} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} = [\bar{A}] \{\alpha\} \quad (22)$$

其中 $\{u_1\}_c$ 为对应于交界上的结点 1 的位移矢量, 等等。

现在把 $\{q\}$ 分块为 $\{q_1\}$ 与 $\{q_2\}$, 其中 $\{q_1\}$ 为交界上的结点的、 $\{q_2\}$ 为有限元网格的其余结点的广义坐标, 则由交界上结点的协调条件可得

$$\{u\}_c = [\bar{A}] \{\alpha\} = [C]_{\text{int}} \{q_1\}^{\ominus} \quad (23)$$

或者, 也可写成

$$\{q_1\} = [C]^{-1}_{\text{int}} [\bar{A}] \{\alpha\} = [A] \{\alpha\} \quad (24)$$

利用拉格朗日乘子法, 可在总势能 V 的表达式内计及由公式 (24) 所表示的约束的作用。办法是构出由下式定义的修正势能 $\bar{V}$

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} \{\alpha\}^t [k]_c \{\alpha\} + \frac{1}{2} \{q\}^t [K] \{q\} \\ & - \{q\}^t \{Q\} + (\{q_1\} - [A] \{\alpha\})^t \{\lambda\} \end{aligned} \quad (25)$$

把 α 与 q 看作都可取得任意的独立增量的自由变量, 定出变分 $\delta \bar{V}$ 。从而得

$$\begin{aligned} \delta \bar{V} = 0 = & \{\delta \alpha\}^t [k]_c \{\alpha\} + \{\delta q\}^t [K] \{q\} \\ & - \{\delta q\}^t \{Q\} + (\{\delta q_1\} - [A] \{\delta \alpha\})^t \{\lambda\} \end{aligned} \quad (26)$$

对 $\{q\}$ 与 $[K]$ 作分块如下

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{q_1\} \\ \{q_2\} \end{Bmatrix} \quad [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \quad (27)$$

$\ominus$ 下标 int 指核心与有限元网格间的交界(interface)。——译者注

则公式 (26) 可改写为

$$\begin{aligned} 0 = & \{\delta\alpha\}^t ([k]_c \{\alpha\} - [A]^t \{\lambda\}) + \{\delta q_1\}^t ([K_{11}] \{q_1\} \\ & + [K_{12}] \{q_2\} - \{Q_1\} + \{\lambda\}) + \{\delta q_2\}^t ([K_{21}] \{q_1\} \\ & + [K_{22}] \{q_2\} - \{Q_2\}) \end{aligned} \quad (28)$$

由于 $\{\delta\alpha\}$, $\{\delta q_1\}$ 与 $\{\delta q_2\}$ 都是任意的, 由式 (28) 可得三个联立矩阵平衡方程式

$$[k]_c \{\alpha\} - [A]^t \{\lambda\} = 0 \quad (29)$$

$$[K_{11}] \{q_1\} + [K_{12}] \{q_2\} - \{Q_1\} + \{\lambda\} = 0 \quad (30)$$

$$[K_{21}] \{q_1\} + [K_{22}] \{q_2\} - \{Q_2\} = 0 \quad (31)$$

由 (29)、(30) 与 (31) 三式, 以及约束方程 (24), 即可依据边界条件确定未知量 $\{q_1\}$ 、 $\{q_2\}$ 、 $\{\alpha\}$ 与 $\{\lambda\}$ 。

由 (24)、(29) 与 (31) 各式, 可得:

$$[K_{22}] \{q_2\} = \{Q_2\} - [K_{21}] [A] [k]_c^{-1} [A]^t \{\lambda\}$$

或

$$[K_{22}] \{q_2\} = \{Q_2\} - \{Q_1\} \quad (32)$$

这个结果给 $\{\lambda\}$ 以一个简单的物理解释, 即它对广义力 $\{Q_2\}$ 提供了一个修正量。这样, 在概念上, 核心—有限元系统可单独用承受修正载荷的有限元系统来代替。

通常, 人们希望能直接了当地定出 α 之值。由 (29)、(30)、(31) 诸式, 可得

$$[K]_\alpha \{\alpha\} = \{Q\}_\alpha \quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned} [K]_\alpha = & [A]^t [K_{11}] [A] - [A]^t [K_{12}] [K_{22}]^{-1} [K_{21}] [A] \\ & + [k] \end{aligned} \quad (34)$$

以及

$$\{Q\}_\alpha = [A]^t \{Q_1\} - [A]^t [K_{12}] [K_{22}]^{-1} \{Q_2\} \quad (35)$$

于是, 所需的系数 $\{\alpha\}$ 由下式给定

$$\{\alpha\} = [K]_{\alpha}^{-1} \{Q\} \quad (36)$$

数值计算的实施

在断裂计算中，最好能把矢量 $\{\alpha\}$ 与 $\{q_2\}$ 的系数作为程序输出而直接得到。矢量 $\{\alpha\}$ 中含有：核心区变量，裂纹顶端应力强度因子与刚体运动模式；而矢量 $\{q_2\}$ 的成分则为网格结点的位移，由它们可相继算出物体内的应力和应变。为达到上述目标，须把(24)、(29)、(30)与(31)四式调整成下述形式

$$\begin{aligned} [A]^t [K_{11}] [A] \{\alpha\} + [A]^t [K_{12}] \{q_2\} + [k]_c \{\alpha\} \\ = [A]^t \{Q_1\} [K_{21}] [A] \{\alpha\} + [K_{22}] \{q_2\} = \{Q_2\} \end{aligned} \quad (37)$$

此两式又可改写成修正的矩阵方程的形式

$$[K^*] \{q^*\} = \{Q^*\} \quad (38)$$

其中

$$[K^*] = \begin{bmatrix} [K_{11}^*] & [K_{12}^*] \\ [K_{21}^*] & [K_{22}^*] \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\{q^*\} = \begin{Bmatrix} \{q_2\} \\ \{\alpha\} \end{Bmatrix} \quad (40)$$

以及

$$\{Q^*\} = \begin{Bmatrix} \{Q_1^*\} \\ \{Q_2^*\} \end{Bmatrix}$$

式中使用了

$$[K_{11}^*] = [K_{22}] \quad (41)$$

$$[K_{12}^*] = [k_{21}^*]^t = [K_{21}] [A] \quad (42)$$

$$[K_{22}^*] = [k]_c + ([A]^t [K_{11}] [A]) \quad (43)$$

$$\{Q_1^*\} = \{Q_2\} \quad (44)$$