高等学校辅导教材

新编线性代数题解

同济、科大习题选解

考研、自考试题选解

周泰文 贺伟奇

华中科技大学出版社

高等学校辅导教材

新编线性代数题解

同济、科大习题选解
考研、自考试题选解

周泰文　贺伟奇

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编线性代数题解/周泰文 贺伟奇
武汉:华中科技大学出版社, 2001年5月
ISBN 7-5609-2413-1

Ⅰ. 新…
Ⅱ. ①周… ②贺…
Ⅲ. 线性代数-题解
Ⅳ. O151

新编线性代数题解 周泰文 贺伟奇

责任编辑:李立鹏
封面设计:刘 卉
责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87545012

经 销:新华书店湖北发行所

录 排:中南大学铁道校区印刷厂
印 刷:湖北省通山县印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:9 字数:214 000
版次:2001年5月第1版 印次:2001年5月第1次印刷 印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2413-1/O·224 定价:10.00元

内 容 简 介

这是为正在学习和备考线性代数的各类学生、工程技术人员、考研志士而编的辅导教材.

以教育部颁发的高等工业学校《线性代数教学基本要求》、全国工学硕士研究生入学考试及高等教育自学考试线性代数考试大纲为指导，对同济(三版)、科大(1998 年版)教材中的习题及自 1987 年以来的考研、自考试题进行了分类选解.

本书共有六章：n 阶行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、线性空间和线性变换；每章有四个部分：内容提要、习题选解、试题选解、练习题及其解答、提示. 书后还附录了 2000 与 2001 两年考研试题及解答.

全书基本理论简明，解题思路清晰，两考动态了然. 亦可供有关教师参阅.

前　言

线性代数是高等工科院校的重要基础课之一．作为有关课程的工具和对科学思维的培训，她都扮演着极为重要的角色．

为贯彻科教兴国的战略，培养21世纪国家栋梁之才，我们愿尽心奉献．根据工科本科、自考及考研大纲要求，选用同济大学及国防科技大学编写的教材习题和10年来的考研、自考试题，并汇集了我们多年从事这门课程的教学经验，编写了这本辅导教材．虽名为题解，但决不是只单纯解题，其实是通过解题的形式，引导学生掌握线性代数的基本理论，培养提高科学思维能力．希望她能有益于读者．

本书有如下特点：

一、基本理论简明　我们综合同济、科大两本教材中的理论，融入我们多年的从教心得，理成条块，用严谨、简炼的数学语言，概括出各章体系及“内容提要”．理解、记忆并运用这些提要的内容，是学好本课程的关键．

二、解题思路清晰　我们从同济（三版）、科大（1998年版）两本教材的习题中选解了60%（约），按型归类，精心解答．对典型题，归纳出解题步骤，使读者有矩可循；对非典型题，我们紧靠基本概念和性质，运用分析综合，提示注意，一题多解，版面推敲等方式，开扩思路、突出重点，揭示规律．每章都精选出一定数量的练习题并作了解答、提示．所有这些都意在促使读者运算熟练，思维敏捷，运用灵活，论证严谨，

三、两考动态了然　在每章的试题选解部分，我们把1987～1999年的考研及自考试题，按型分类，详细解答；书后还附录了2000及2001两年的考研试题及解答．读者若能认真演习这些试

题并在解后总结解题的思路、方法、关键、技巧，必将使读者进一步熟悉基本理论，对两考的题型、要求、重点大致有数；使在校学生对课程考试胸有成竹.

本书能面世，首先要感谢北京师范大学张禾瑞、郝炳新等教授对我们的精心培育.虽历时半个世纪，但他们的教授风范和精湛编著至今仍记忆犹新；再要感谢本书的责任编辑，他的策划、催促和编审，对本书定型起了重要作用；还要衷心感谢华中科技大学出版社、中南大学铁道校区印刷厂的有关领导、照排、美编、监印、发行等同志为本书出版付出的巨大辛劳.

由于时间仓促，水平有限，定有不妥之处，切望同行、读者指正.

作者

2001 年 4 月 18 日

于中南大学铁道校区.

目　　录

第一章　n阶行列式

一、内容提要

1　n阶行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\mathrm{d}}{=}{}^{①} \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

或

$$D\overset{\mathrm{d}}{=}\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中，$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列；t 为这个排列的逆序数；$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列(共有 $n!$个) 取和.

2　行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

(2) 互换两行(列)后的行列式是原行列式的反数.

(3) 行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数 k，等于 k 乘此行列式.

推论　行列式某一行(列)各元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

(4) 两行(列)元素对应成比例的行列式为零.

---

① 符号“$\overset{\mathrm{d}}{=}$”表示“规定为”或“定义为”.

推论 两行(列)元素完全相同的行列式为零.

(5) 若行列式某一行(列)的各元素都是两数之和,则该行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 把行列式某一行(列)的各元素都乘以同一数,然后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

(6) 行列式按行(列)展开定理:行列式等于其任一行(列)的各元素与其代数余子式乘积之和.

推论 行列式中某行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零.

(7) 拉普拉斯展开定理:行列式等于其中任意 k 行(列)的所有 k 阶子式与其代数余子式乘积之和(显见(6)是(7)的特例).

3 克莱姆法则

未知量的个数与方程的个数相等的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

中，若系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$ 则方程组有唯一解：

$$x_j=\frac{D_j}{D} \qquad (j=1,2,\cdots,n),$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中的第 j 列元素换成方程组的右端项 $\left(\text{即将} \begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix} \text{换成} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \right)$，所得到的行列式.

推论 未知量个数与方程个数相等的齐次线性方程组若有非零解，则系数行列式为 0.

二、习题选解[①]

（一）用行列式的定义计算行列式

1.1 用行列式的定义计算下列各题：

---

① 本书选解的习题，主要选自两本教材：一是同济大学编的《线性代数》（第三版），该书是普通高等教育"九五"国家教委重点教材；二是国防科技大学邓长寿等编著的《线性代数》（1998 年 7 月第一版）. 分别用代号 A、B 表示.

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix};\qquad (\mathrm{B},\mathrm{p}.\ 27)^{①}$$

$$(2)\ D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 (1) D_n 仅有位于既不同行又不同列的 n 个非零元素,即 $a_{1,n-1}=1,a_{2,n-2}=2,\cdots,a_{n-1,1}=n-1,a_{nn}=n$. 因此 $n!$ 项中仅有一项非零,故

$$D_n=(-1)^{\tau(n-1\ n-2\cdots 3\ 2\ 1\ n)}a_{1,n-1}a_{2,n-2}\cdot\cdots\cdot a_{n-1,1}a_{nn}.$$

因为 $\tau(n-1\ n-2\cdots 3\ 2\ 1\ n)=(n-2)+(n-3)+\cdots+3+2+1+0=\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$,故 $D_n=(-1)^{\frac{(n-1)(n-1)}{2}}n!$.

(2) 按定义,D_5 是 $5!=120$ 项的代数和,而每项均由既不同行又不同列的五个元素之积并冠以"+"或"−"号构成. 而第 1、4、5 三行中,不同列的非零元素只有两个,即在第 1、4、5 三行中,不同列的三个元素中至少有一个为零,故 $D_5=0$.

1.2 已知 $f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix}$,试求 $f(x)$ 中 x^3,x^4 的系数.

---

① 这种符号表示此题选自 B 本教材第 27 页,以下类同.

解 因为行列式各项是既不同行又不同列的 4 个元素之积并按符号法则冠以"+"或"-"号，所以

含 x^3 的项只能有

$$(-1)^{\tau(2134)}a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-1\cdot x\cdot x\cdot 2x=-2x^3$$

及

$$(-1)^{\tau(4231)}a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}=-3\cdot x\cdot x\cdot x=-3x^3,$$

于是 $f(x)$中含 x^3 的项为$-2x^3-3x^3=-5x^3$，故 x^3 的系数为-5.

含 x^4 的项只能是

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=5x\cdot x\cdot x\cdot 2x=10x^4,$$

故 x^4 的系数为 10.

(二) 用化为三角形行列式的方法计算行列式

1.3 计算下列行列式：

$$(1)\ \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix};(2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}.$$

(A,p. 33)

解 (1) 原式

$$\xlongequal{r_1+ar_2}\begin{vmatrix} 0 & 1+ab & a & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_3}\begin{vmatrix} 0 & ab & a+c & 1 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+abr_3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{将 } r_1 \text{ 与 } r_2,r_3,r_4 \text{ 逐行交换}}(-1)\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & a+c+abc & 1+ab \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+[a+c+abc]r_3}(-1)\begin{vmatrix} -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1+ab+d[a+c+abc] \end{vmatrix}$$

$$=1+ab+ad+cd+abcd.$$

(2) 原式$\xlongequal[\substack{r_4-2r_1 \\ r_5-r_1}]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-3r_1}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -11 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{\substack{r_3-r_2 \\ r_4-11r_2 \\ r_5+2r_2}}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -23 & -41 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_5-4r_3]{r_4+10r_3}\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&-1&1&2&3\\0&0&1&2&3\\0&0&0&-3&-11\\0&0&0&-5&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4\leftrightarrow c_5}(-1)\begin{vmatrix}1&2&3&5&4\\0&-1&1&3&2\\0&0&1&3&2\\0&0&0&-11&-3\\0&0&0&-1&-5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-11r_5}(-1)\begin{vmatrix}1&2&3&5&4\\0&-1&1&3&2\\0&0&1&3&2\\0&0&0&0&52\\0&0&0&-1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4\leftrightarrow r_5}\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\0&-1&1&3&2\\0&0&1&3&2\\0&0&0&-1&-5\\0&0&0&0&52\end{vmatrix}=52.$$

1.4 计算下列行列式：

(1) $D_n=\begin{vmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$；

(2) $D_n=\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=|i-j|$；

(3) $$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n\end{vmatrix},$$

其中 $a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n\neq 0$. (A ,p. 34～p. 35)

解 (1) $$D_n \xlongequal[\text{然后提出第一行的公因式}]{r_1+r_2+\cdots+r_3}[(n-1)a+x]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-ar_1}[(n-1)a+x]\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[(n-1)a+x](x-a)^{n-1}.$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ 2 & 1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

从最后一行起，每行减去其前一行，得

$$D_n=\begin{vmatrix}0&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&-1&-1&\cdots&-1&-1\\1&1&-1&\cdots&-1&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&-1&-1\\1&1&1&\cdots&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=1,2,\cdots,n-1)]{c_k+c_n}\begin{vmatrix}n-1&n&n+1&\cdots&2n-3&n-1\\0&-2&-2&\cdots&-2&-1\\0&0&-2&\cdots&-2&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-2&-1\\0&0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1).$$

(3) $$D_n\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-r_1}\begin{vmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1&1\\-a_1&a_2&0&\cdots&0&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_1&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-\sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k}\right)r_k}\begin{vmatrix}1+a_1+\dfrac{a_1}{a_2}+\cdots+\dfrac{a_1}{a_n}&0&0&\cdots&0&0\\-a_1&a_2&0&\cdots&0&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_1&0&0&\cdots&0&a_n\end{vmatrix}$$