数 学 分 析 原 理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著
吴亲仁 陆秀丽 译

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立技术理论书籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）著“数学分析原理”（Основы математического анализа）第一卷 1956 年版译出。

全书共二卷，第一卷中译本分二分册出版。第一分册的内容是：实数、单变量的函数、极限论、单变量的连续函数、单变量函数的微分法、微分学的基本定理、应用导数来研究函数、多元函数、多元函数的微分学共九章。

本书可作为综合大学和师范学院数学系的参考书。

简装本说明

目前850×1168毫米规格纸张较少，本书暂以787×1092毫米规格纸张印刷，定价相应减少20％。希鉴谅。

数学分析原理

第一卷 第一分册

格·马·菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 陆秀丽 译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0316 开本 787×1092 1/32 印张 9 10/16

字数227,000 印数60,301 260,300 定价(6)￥0.76

1959年6月第1版 1979年2月北京第10次印刷

序　言

“数学分析原理”是作为大学数学系一二年級学生的分析教科书而編写的；因此也就把书分成两卷。在編写本书时，广泛地采用了我的三卷本“微积分学教程”的材料；但为了要使本书接近于正式的数学分析教学大綱与講課的实际可能性，我已把这三卷中包含的材料加以精簡与修改。

我給自己定下的任务是这样的：

1. 我認为在数学分析原理中主要的一个任务是要做到叙述上的系統性与在可能范圍內的严格性。为了使給予学生的知識有一定的系統，我認为对于教科书来說，材料的叙述有必要按照邏輯的順序。

虽然如此，但教本这样的編排仍然使講課者在个別的地方——从教授法着眼——有可能放弃严格的系統性(也許，甚至使他更容易获得这种可能)。例如，我自己在講課中通常把那种对于初学者困难的东西，如实数理論、收斂性原理或者連續函数的性質都稍稍拖后。

2. 同时，数学分析教程对于学生来說，不应該只是一連串的“定义”与“定理”，而应該是行动的指南。必須教会学生把这些定理应用到实际中去，帮助他們掌握分析的計算工具。虽然这个任务大部分是落到分析的习題課上，可是随着理論材料的叙述，我也按照需要采用了一些例題；例題为数虽不多，但却是为了培养学生能自觉地做习題而选擇的。

3. 大家知道，数学分析无論在数学本身方面或在相近的知識領域方面有着何等奇妙的与多种多样的应用；学生以后将会时常

碰到它們。可是关于数学分析与其他数学部門，以及与实际需要相联系的这种思想，在研究分析原理时就应該为学生所通曉。正因为如此，所以一有可能，我就引进了分析在几何上、在力学上以及在物理上与工程上的应用的例題。

4. 关于把分析計算一直算到求出数字的結果的問題，在原則上与实用上有着同样的重要性。因为只有在最簡单的情况下，分析上的問題才有"准确的"解或"有限形状的"解，所以使学生熟悉近似方法的运用与学会作出近似公式都有其重要性。在本书中也注意到了这一点。

5. 关于叙述本身方面，我想作少許說明。首先要提到的是极限概念，它在分析的基本概念中占有主要的地位，并且以各种形式出現而貫串着全部教程。这种情况向我們提出了一項任务，那就是要建立各种形式的极限的統一概念。这不仅在原則上是重要的，而且在实际上也是必須的，为的是避免时常要从新建立极限的理論。要达到这个目的，有两条途徑：或者一开始就給出"有序变量"的最一般的极限定义（例如，跟着沙都諾夫斯基与摩尔-史密斯那样去做），或者把各种极限归結为最簡单的情形——在編号数列上变化着的变量的极限。第一种观点对初学者是不易了解的，所以我采用了第二种观点：每一种新形式的极限定义首先都用序列的极限給出，然后才用"ε-δ 語言"給出。

6. 还要指出叙述上的一个細节：在第二卷中，讲到曲綫积分与曲面积分时，我提出了"第一型"的曲綫积分与曲面积分（恰好与沿无定向的区域的普通积分及二重积分相似）和"第二型"的这些积分（其中相似之处已經局部地失去了）之間的区別。根据多次的經驗，我深信这样的区分有助于更好的了解，并且也便于应用。

7. 在对教学大綱所作的为数不多的补充中，我把橢圓积分（这是在实际上常遇到的）簡要介紹到书內，并且有些时候提出了

一些恰好要引用橢圓积分的問題。使得那种由于解答一些簡单問題养成起来的有害錯覚——仿佛認为分析計算的一些結果一定是“初等式子”，从此消灭！

8. 在本书中各个地方，讀者可找到带有数学史性质的說明。并且第一卷是以“数学分析基本观念发展史概述”結尾的，而在第二卷末載出了“数学分析进一步发展的概述”。当然，这一切决不是用来代替学生以后在一般的“数学史”教程中所要熟悉的数学分析的历史。如果在上面提到的前一概述中涉及到概念本身的来源，那末带有历史意义的說明就在于使讀者至少了解分析学历史中最重要的事件在年代上一般的次序。

我現在要把和剛才所說的密切有关的事直接告訴讀者——学生。那就是，书中叙述的次序是按照現代对于数学的严格性的要求安排的，这种要求是在长时間内形成起来的，因此，叙述的次序自然和数学分析在历史上的发展所經过的道路有所不同。如馬克思所說：“……正如一切科学的历史进程一样，在摸到它們的真正出发点之前，总先走过許多弯路。科学不同于其他建筑师，它不只画出空中楼閣，而且在它打下地基之前，先造出房屋的各层。”①

讀者一开始研究分析学时就会遇到与此类似的情况：本书第一章講述“实数”，第三章講述“极限論”，从第五章起才开始微分学与积分学的系統的叙述。

在历史上的次序恰恰是与此相反的：微分学与积分学起源于十七世紀，而在十八世紀发現了很多重要的应用，有了进一步的发展；在十九世紀初，极限論才成为数学分析的基础，至于用来論証最精密的极限論原理的实数理論，它的明晰概念一直到十九世紀后半期才建立起来。

---

① 馬克思“政治經济学批判”中譯本，1955年人民出版社出版，第30頁。

这部书总結了我在列宁格勒大学教数学分析的多年經驗。希望它对苏联青年将会是有用的.

格·馬·費赫金哥尔茨

第一卷第一分册目录

第一卷第二分册目录

第一章　实数

§1. 实数集合及其有序化

1. 前言　从中学教程中讀者已熟悉有理数及其性質。同时由于初等数学的需要，有理数域的扩張也就成为必要了。事实上，在有理数中甚至連正整数（自然数）往往都沒有根，如$\sqrt{2}$就是一个例子，这就是說，沒有一个其平方能等于2的有理分数$\frac{p}{q}$（p与q是两个自然数）存在。

要証明这一点，我們用反証法：假定有这样的分数$\frac{p}{q}$存在，使得$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$。我們可設这个分数是既約的，也就是說，$p$与$q$无公因子。因为$p^2=2q^2$，所以$p$是偶数：$p=2r$（$r$是整数），因而，$q$是奇数。用$p$的表达式来代替$p$，得$q^2=2r^2$，由此推得$q$是偶数。所得到的这个矛盾就証明了我們的論断。

与此同时，假若我們所討論的只是含有理数的数域，那末在几何中显然就不是所有的綫段都能有长度。事实上，考慮边为单位长度的正方形。它的对角綫不能有有理长度$\frac{p}{q}$，因为如若不然，则由毕达哥拉斯定理，这个长度的平方就应等于2，但我們已知这是不可能的。

在本章中我們的任务是要扩張有理数的数域，把具有新的性質的数——无理数加入到这領域中来。

在数学实踐中含有根式表达式的无理数，事实上早在中世紀已开始出現，不过沒有把它看作是实在的数。十七世紀由笛卡儿①所創立的坐标方

---

① 笛卡儿(1596—1650)是法国的著名哲学家与科学家。

法，又以新的方法提出了用数来表达几何量的問題。在这种影响下无理数与有理数同样是数的观念逐漸地成熟起来；这种观念在牛頓的“普遍算术”(1707)①中所下的(正)数的定义里面有了透辟的叙述：

“我們所理解的数，与其說它是单位的集合，不如說它是任何一个量与另一个由我們取来作单位的同类量的抽象比”。

这时整数与分数表达和单位可通約的量，而无理数表达着和单位不可通約的量。

在十七世紀萌芽而在整个十八世紀蓬勃发展着的数学分析，长时期內滿足于这个定义，但是它是与算术格格不入的，并且仍然不能揭露出扩大了的数域的最重要的性质——連續性(参考后面第5段)。在十八世紀末与十九世紀初数学方面兴起了批判的潮流，提出了数学分析的基本概念要有正确的定义以及它的基本命题要有严格的証明。这种要求也就很快地使得根据无理数的純粹的算术定义来建立在邏輯上沒有錯誤的无理数論变成了必要的事情。在十九世紀的七十年代里，有关这方面的理論已經建立了几种，它們在形式上各不相同而实质上是一样的。所有这些理論与有理数的各种无穷集合联系起来，定义了无理数。

2. 无理数定义　我們仿效狄台金②来叙述无理数理論。这种理論的基础归于有理数域內的分割的概念。考虑把全部有理数的集合分成的两个非空的(即确实至少包含一个数的)集合 A, A'；換句話說，我們假定

1° 每一个有理数在而且只在 A 与 A' 两个集合的一个中。

如果下面的条件也能滿足，我們就称这种分法为分割：

2° 集合 A 中每一数 a 小于集合 A' 中每一个数 a'。

集合 A 叫做分割的下类，集合 A' 叫做上类。分割用 $A|A'$ 表示。

由分割的定义推知，凡小于下类中的数 a 的有理数，也属于下

① 有俄文譯本：“Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе”(АН СССР, 1948)；参考第8頁。

② 狄台金(Richard Dedekind)(1831—1916)是德国的数学家。

类。同样，凡大于上类中的数 a' 的有理数也属于上类。

例题 1）把 A 定义为所有一切满足不等式 $a<1$ 的有理数 a 的集合，而把使 $a'\geqslant 1$ 的全部有理数 a' 归入集合 A'。

不难檢驗，这样一来我們就确实得到一个分割。数 1 属于 A' 类并且显然是其中最小的数。另一方面，在 A 类中沒有最大的数；因为，不論我們取 A 中怎样的数 a，我們总可以在 a 与 1 之間指出一个有理数 a_1，因而，a_1 大于 a 而且也属于 A 类。

2）把所有小于或等于 1 的有理数 $a\leqslant 1$ 归入下类 A；所有大于 1 的有理数 $a'>1$ 归入上类 A'。

这也是一个分割，并且这时在上类中沒有最小的数，而在下类中有最大的数（就是 1）。

3）把一切使 $a^2<2$ 者的正有理数 a，零，以及一切負有理数都归入 A 类，而把一切使 $a'^2>2$ 者的正有理数 a' 归入 A' 类。

不难証实，我們又得到一个分割。这时在 A 类中既无最大的数，在 A' 类中也无最小的数。这两个論断中，我們可取第一个为例加以証明（第二个可同样地証明）。設 a 是 A 类中的任一正数（这时 $a^2<2$）。我們要指出，可以选得这样的正数 n，使得

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<2,$$

这就是說，$a+\frac{1}{n}$ 也要属于 A 类。

这一不等式与下面的不等式是等价的：

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2,$$

$$\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<2-a^2.$$

如果 n 滿足不等式 $\frac{2a+1}{n}<2-a^2$，則最后这个不等式成立；为此，只要取

$$n>\frac{2a+1}{2-a^2}.$$

由此可見，不論 a 是 A 类中怎样的一个正数，在 A 类中总找得到大于 a 的数；因为对于数 $a\leqslant 0$ 这个論断是很明显的，所以 A 类中任何数不能是其中最大的数。

不難了解，要在下类有最大的数 a_0 而同时在上类又有最小的数 a_0'，这样的分割不能存在。事实上，假定有这样的分割存在。我們就取介乎 a_0 与 a_0' 之間的任一有理数 c，$a_0<c<a_0'$。数 c 不能属于 A 类，因为要不这样，那 a_0 就会不是这类中的最大数；依同理 c 也不能属于 A' 类。可是这与在分割概念的定义中所包含的分割的性質 $1°$ 相矛盾。

由此可見，分割只能有由剛才的例題 1)、2)、3) 所說明的三个类型：

1) 在下类 A 中沒有最大的数，而在上类 A' 中有最小的数 r；

2) 在下类 A 中有最大的数 r，而在上类 A' 中沒有最小的数；

3) 既在下类中沒有最大的数，又在上类中沒有最小的数。

在前两种情形下我們說，这分割由有理数 r **产生**（r 是 A 与 A' 两类中間的**界数**），或者說，这分割**定义**了有理数 r。在例題 1) 与 2) 中这样的数 r 是 1。在第三种情形下界数不存在，分割不能定义任何有理数。我們現在引进新的对象——**无理数**，而規定說：任何属于类型 3) 的分割定义了某一个无理数 α。这个数 α 就代替着缺少了的界数，好象我們把它插在 A 类所有的数 a 与 A' 类所有的数 a' 的**中間**一样。在例題 3) 中这个新建立的数不难推想它就是 $\sqrt{2}$。

我們不再对于无理数引进統一的記号①，而常把无理数 α 和定义它的有理数域的分割 $A|A'$ 联系起来。

---

① 这里所指的是有限型的記号；在第 4 段中讀者会遇見一种无尽的記号。个别給定的无理数多半是依照它們的起源和作用来記的，如 $\sqrt{2}$，$\log 5$，$\sin 10°$ 等等。

为了一致起見，对于有理数 r 也作同样的处理，这对我們常常是方便的。可是对于每一个有理数 r 存在着两个定义它的分割：在两种情形之下都是数 $a<r$ 归入下类，数 $a'>r$ 归入上类，而数 r 本身則可任意地或者归入下类（这时 r 是其中最大的数），或者归入上类（这时 r 是其中最小的数）。为了确定起見，我們規定：凡說到定义有理数 r 的分割时，总把这个数归入上类。

有理数与无理数統称为实数。实数的概念是数学分析的基本概念之一，一般地說，也是整个数学的一个基本概念。

3. 实数集合的有序化 由两个分割 $A|A'$ 与 $B|B'$ 分别所定义的两无理数 α 与 β，在而且只在这两个分割相同时才算是相等；实际上只要 A 与 B 两个下类相同卽可，因为这时 A' 与 B' 两个上类也相同。这个定义在 α 与 β 是有理数时也一样成立。換句話說，如果两个有理数 α 与 β 相等，則定义它們的两个分割相同，反之，从这两个分割的相同卽可推出数 α 与 β 的相等。在这情况应該考慮到上面对于有理数所加上的条件。

我們現在来建立关于实数的"大于"的概念。对于有理数来說这个概念已从中学課本中知道了。对于有理数 r 与无理数 α 来說，"大于"的概念实际上已在第 2 段中建立了：就是說，如果 α 是由分割 $A|A'$ 定义的，我們就算作 α 大于所有属于 A 类的数，而同时所有 A' 类的数都大于 α。

現在設有两个无理数 α 与 β，幷且 α 由分割 $A|A'$ 确定，而 β 由分割 $B|B'$ 确定。我們把具有較大的下类的那个数算作是較大的。确切地說，我們算作 $\alpha>\beta$，只要 A 类完全包含 B 类且不与 B 类相同（这个条件显然和 B' 类完全包含 A' 类且不与 A' 类相同的条件是等价的）。不難驗証，这个定义在 α 与 β 两数中有一个为有理数时甚至两个都是有理数时也一样能成立。

"小于"的概念就可当作派生的概念引出来。就是說，在而且

只在 $\beta>\alpha$ 的情形下我們說 $\alpha<\beta$。

由我們的定义可以推到:

在任何两个实数 α 与 β 之間必有而且只有下列三种关系之一:

$$\alpha=\beta,\quad \alpha>\beta,\quad \alpha<\beta.$$

其次,

从 $\alpha>\beta$, $\beta>\gamma$ 推得 $\alpha>\gamma$。

显然也可

从 $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$ 推得 $\alpha<\gamma$。

最后,我們要建立两个在以后的叙述上常常有用的补助定理。

补助定理1. 不論 α 与 β 是两个怎样的实数,若 $\alpha>\beta$,总可找到这样的一个实数——甚至是有理数——r,使得 r 介在 α 与 β 之間: $\alpha>r>\beta$(因而也有无穷多个这样的有理数)。

因为 $\alpha>\beta$,所以定义着数 α 的分割的下类 A 完全包含了对于数 β 的下类 B,并且不与 B 相同。所以在 A 中可找到这样的有理数 r,它不包含在 B 中,因而,它属于 B';对于 r 有

$$\alpha>r\geqslant\beta$$

(等号只在 β 是有理数时才能成立)。但因在 A 中沒有最大的数,所以在必要时加大 r 可以取消等号。

补助定理2. 設 α 与 β 是两个給定的实数。如果不論取怎样的有理数 $e>0$,总能使数 α 与 β 夹在同样两个有理数的中間:

$$s'\geqslant\alpha\geqslant s,\quad s'\geqslant\beta\geqslant s,$$

其中

$$s'-s<e,$$

則数 α 与 β 必定相等。

我們用归謬法証明。例如,假定 $\alpha>\beta$。由补助定理1,在 α 与 β 之間可以插入两个有理数 r 与 $r'>r$:

$$\alpha>r'>r>\beta.$$