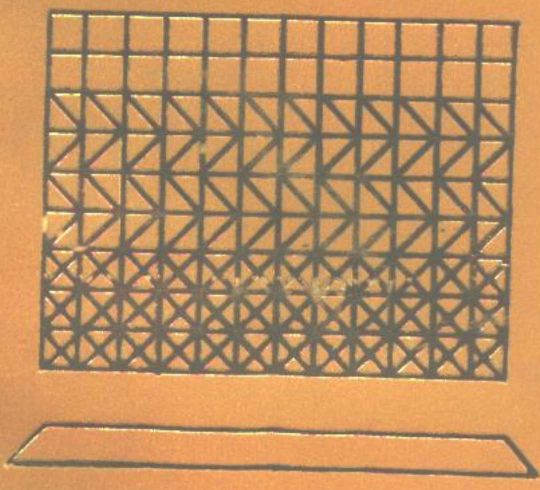
图象形态学

吴敏金 著



上海科学技术文献出版社

图象形态学

吴敏金 著

上海科学技术文献出版社

图象形态学
吴敏金 著
*
上海科学技术文献出版社出版
(上海市武康路2号)
邮政编码：200031
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 289,000
1991年9月第1版 1991年9月第1次印刷
印数：1—2,000
ISBN 7-80513-822-2/T·201
定价：6.70元
《科技新书目》247-342

前　言

图象形态学是数学形态学的概括与发展，而数学形态学又是与积分几何密切相联系的。其历史可回溯到19世纪的Euler，Steiner，Crofton以及本世纪初的Minkowski。1964年法国G. Matheron和J. Serra在积分几何研究成果的基础上，创立了数学形态学。此后，研制了基于数学形态学的图象处理系统（如Leitz等）。1982年出版的专著《Image Analysis and Mathematical Morphology》是数学形态学发展的一个重要里程碑。它表明数学形态学在理论上趋于完备及应用的不断深入。1986年CVGIP发表了数学形态学专刊。数学形态学蓬勃发展；由于其并行快速，易于硬件实现而引起人们的普遍关注。如今，数学形态学已成为图象学的一个重要分支。

然而，数学形态学是建立在经典的Minkowski和差运算的基础上的。Minkowski运算实质上是一种极值运算，因而不可避免导致图象信息的丢失，限制了它在图象分析中的应用及进一步发展。对此，作者将“顺序统计学”的思想注入数学形态学。有限数据排序发展为函数的百分位值与序化，Minkowski和差运算发展为图象与函数的百分位形态变换，从而建立了一般图象形态学。

本书系统地阐述图象形态变换原理与图象形态分析方法。不仅综论了经典数学形态学的基本内容及国内外学者的近期研究成果，而且汇集了作者十余年来在从事图象形态学的科研与教学中所取得的点滴成绩（约占全书的1/2，其中包括作者在一般图象形态学中的开创性工作）。

图象形态学是一门综合多学科的交叉学科。它既体现了逻辑推理与数学演绎的严谨性，又要求具备与实践密切相关的实验技术及计算技术。为了顺利地阅读本书，建议读者应掌握微分几何与

积分几何、测度论与泛函分析、随机过程等数学基础理论，并熟悉信号处理与图象分析、模式识别与计算机视觉、计算方法与数据处理等信息科学的基础知识，掌握实际从事图象处理的技能。

本书结构如下表所示：

《图 象 形 态 学》		形态变换	形态分析
数学形态学	连续集合	第一、二、三章	第四、五、六章
	离散点集	第七章	第八章
	多值图象	第九章	第十章
一般形态学	(离散)顺序形态学	第十一章	
	(连续)百分位形态学	第十二章	
图象形态学应用专题		第十三章	

作者感谢 Philips Research Laboratory Dr. C. Ronse 提供了一份关于复合顺序滤波的医学图象实验结果，感谢北京大学信息科学中心石青云教授的支持与帮助，特别要感谢华东师范大学万嘉若教授的悉心指教和热情鼓励。

限于作者水平，书中欠妥与错误之处在所难免，欢迎读者批评指正。

作 者

1990 年 10 月于上海

目　录

第一章　集合形态变换

§1　并行局部变换 ……………………………………1
§2　形态和差 ……………………………………5
§3　形态开闭 ……………………………………12
§4　形态变换的基本准则 ……………………………………18

第二章　拓扑与形态

§1　拓扑基础 ……………………………………23
§2　闭集族$\mathscr{F}(E^{(n)})$上的拓扑结构 ……………………………………31
§3　形态变换的拓扑特性 ……………………………………38

第三章　形态谱变换

§1　骨架与骨架加权变换 ……………………………………43
§2　广义骨架与形态谱 ……………………………………50
§3　形态粗细变换 ……………………………………55

第四章　凸集形态分析

§1　凸集几何特性 ……………………………………58
§2　Minkowski 函数 ……………………………………62
§3　Steiner 公式 ……………………………………70
§4　凸集的方向属性 ……………………………………75

第五章　紧致集形态分析

§1　连通示性数 ……………………………………81

§2　凸集扩展及其形态 ……………………………………87
§3　正则集及其形态 ……………………………………93
§4　紧致集的形态参量 ……………………………………97

第六章　形态结构及其分布

§1　整体形态结构 ……………………………………103
§2　方向形态结构 ……………………………………106
§3　弦长分布 ……………………………………111
§4　尺寸分布 ……………………………………114

第七章　离散形态变换

§1　$Z^{(n)}$ 空间与离散点集 ……………………………………119
§2　离散形态变换 ……………………………………122
§3　离散形态谱 ……………………………………128

第八章　离散形态分析

§1　网格分析基础 ……………………………………138
§2　三角形网格上的点集形态 ……………………………………144
§3　正方形网格上的点集形态 ……………………………………150
§4　立体网格上的点集形态 ……………………………………156

第九章　图象形态变换

§1　截集及其特性 ……………………………………160
§2　函数关于结构元素的形态变换 ……………………………………165
§3　函数关于结构函数的形态变换 ……………………………………170
§4　数字离散图象的形态变换 ……………………………………179

第十章　图象形态分析

§1　λ 凸图象的形态特性 ……………………………………188
§2　图象关于结构元素的形态特性 ……………………………………196

§3　连通性分析······200
§4　数字离散图象的形态熵······207

第十一章　顺序形态学

§1　离散点集的顺序形态变换······214
§2　数字图象的顺序形态变换······224
§3　数字图象顺序滤波及其统计特性······229
§4　数字图象的复合顺序滤波及其特性······235

第十二章　百分位形态学

§1　函数的百分位值及其特性······248
§2　函数的序化······254
§3　函数关于结构元素的百分位形态变换······261
§4　函数关于结构函数的百分位形态变换······266
§5　图象的百分位形态分析······280

第十三章　图象形态学应用专题

§1　细化与汉字特征提取······285
§2　立体学与颗粒分析······288
§3　形状因子与模式分类······291
§4　多刻度形态滤波······294
§5　复合百分位形态滤波与数字图象处理······297
附录一、符号说明······301
附录二、顺序滤波快速算法及其分析······307
附录三、图象百分位形态变换与复合顺序滤波程序······314
附录四、名词索引······322
参考文献······328

第一章　集合形态变换

Minkowski 结构和差运算，即形态和差（俗称为膨胀与腐蚀）是数学形态学的基础。形态和差之复合即为形态开闭。本章将在集合并行局部变换的一般性论述之后，系统地考察形态和差、形态开闭的一系列代数、几何特性及其极值滤波、复合极值滤波意义。形态和差将在形态交离变换下加以统一。最后，将阐述形态变换的四条基本准则（平移相容性、尺度变化相容性、局部可观测性及半连续性）。

§1　并行局部变换

一、集合与变换

设 n 维欧氏空间 $E^{(n)}$，点 $x\in E^{(n)}$，集合 $X\subset E^{(n)}$。人们所要考察的物体可用 $E^{(n)}$ 的一个集合 X 来表示，而 X 的补集 X^c 则表示该物体的背景。集合 X 的示性函数 $\chi_X(x)$：

$$\chi_X(x)=\begin{cases}1, & x\in X\\ 0, & x\in X^c\end{cases}\tag{1}$$

$E^{(n)}$ 中的集合 X 的全体记为 $\mathscr{P}$。对于 $\mathscr{P}$ 中的任意两个元素（即 $E^{(n)}$ 中的两个集合）X 和 B 至少符合如下一个关系：

(1) $B\subset X$，B 包含于 X 中　(2)

(2) $B\Uparrow X$，B 与 X 相交，$B\cap X\neq\varnothing$　(3)

(3) $B\not\Uparrow X$，B 与 X 相离（不相交），$B\subset X^c$，$B\cap X=\varnothing$　(4)

以下讨论将在 $\mathscr{P}$ 上进行（更加一般的是在 $E^{(n)}$ 上的一个 σ 代数）。

定义 1　$E^{(n)}$ 上的集合变换 Ψ 定义为 $\mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}$ 的一个映射，

$$\Psi: X \to \Psi(X) \tag{5}$$

常见的集合变换有原点对称，平移和尺度伸缩（位似）等变换：

$$\check{X} = \{-x: x \in X\} \tag{6}$$

$$X_h = \{x+h: x \in X\},\ h\text{ 为 }E^{(n)}\text{ 中的一个点} \tag{7}$$

$$\lambda X = \{\lambda x: x \in X\},\ \lambda\text{ 是一个非负实数} \tag{8}$$

定义 2 $E^{(n)}$ 上的两个集合变换 Ψ_1 和 Ψ_2,

$$\Psi_1 = \Psi_2 \Leftrightarrow \Psi_1(X) = \Psi_2(X),\ \forall X \in \mathscr{P} \tag{9}$$

$$\Psi_1 \geqslant \Psi_2 \Leftrightarrow \Psi_1(X) \supset \Psi_2(X),\ \forall X \in \mathscr{P} \tag{10}$$

定义 3 设 $E^{(n)}$ 上的集合变换 Ψ，对于 $\mathscr{P}$ 中的任意两个元素 X，Y，$X \subset Y$，满足

$$\Psi(X) \subset \Psi(Y),\ \forall X,\ Y \in \mathscr{P},\ X \subset Y \tag{11}$$

那末称变换 Ψ 在 $\mathscr{P}$ 上是单调上升的；反之，如果

$$\Psi(X) \supset \Psi(Y),\ \forall X,\ Y \in \mathscr{P},\ X \subset Y \tag{12}$$

那末称变换 Ψ 在 $\mathscr{P}$ 上是单调下降的。

定义 4 $E^{(n)}$ 上的二元集合变换定义为 $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ 到 $\mathscr{P}$ 的一个映射，

$$\varphi: (X,\ Y) \to \varphi(X,\ Y) \tag{13}$$

为简明起见，二元集合变换也简记为 $X*Y$。常用的二元集合变换有 $X \cup Y$，$X \cap Y$，$X-Y$ 等（这时，变换运算符 $*$ 相应地转化为 $\cup$、$\cap$、$-$ 等）。

定义 5 设 $E^{(n)}$ 上的两个集合变换 Ψ_1 和 Ψ_2。那末，Ψ_1 和 Ψ_2 的串行复合变换 $\Psi_2 \cdot \Psi_1$ 定义为

$$(\Psi_2 \cdot \Psi_1)(X) \triangleq \Psi_2[\Psi_1(X)],\ \forall X \in \mathscr{P} \tag{14}$$

而 Ψ_1 和 Ψ_2 的并行复合变换 $\Psi_1 * \Psi_2$ 定义为

$$(\Psi_1 * \Psi_2)(X) \triangleq \Psi_1(X) * \Psi_2(X),\ \forall X \in \mathscr{P} \tag{15}$$

串行与并行复合变换 $\Psi_2 \cdot \Psi_1$，$\Psi_1 * \Psi_2$ 如图 1·1·1 所示。

N 个集合变换 Ψ_1，…，Ψ_N 的串行与并行复合变换可分别简记为

$$\prod_{i=1}^{N} \Psi_i = \Psi_N \cdot \Psi_{N-1} \cdot \cdots \cdot \Psi_1 \tag{16}$$

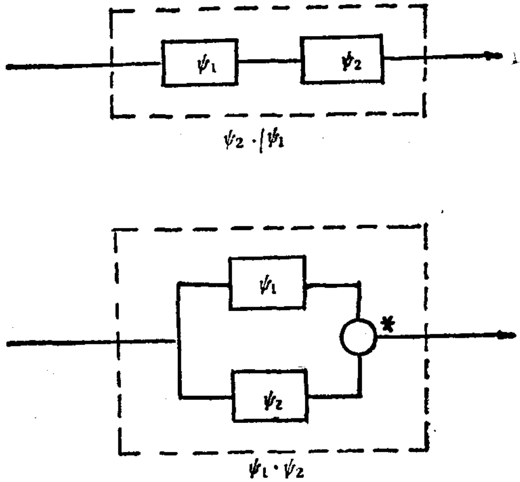


图1·1·1　串行与并行复合变换

$$\sum_{i=1}^{N} {}^{*}\Psi_i = \Psi_1 * \Psi_2 * \cdots * \Psi_N \tag{17}$$

特别当 $\Psi_i = \Psi(i=1, \cdots, N)$ 时，如不发生混淆，可简记为

$$\Psi^n = \Psi \cdot \Psi \cdot \cdots \cdot \Psi \tag{18}$$

$$_n\Psi = \Psi * \Psi * \cdots * \Psi \tag{19}$$

一般地讲，复合变换的运算顺序是不能任意更换的。下面关于串行与并行复合变换的结合律与分配律具有重要意义。

性质 1　$(\Psi_3 \cdot \Psi_2) \cdot \Psi_1 = \Psi_3 \cdot (\Psi_2 \cdot \Psi_1)$　(20)

$$(\Psi_3 * \Psi_2) \cdot \Psi_1 = (\Psi_3 \cdot \Psi_1) * (\Psi_2 \cdot \Psi_1) \tag{21}$$

此可由式(14)和(15)直接证得。

定义 6　设集合变换 Ψ 与 Ψ^* 满足

$$\Psi^*(X) = [\Psi(X^c)]^c,\ \forall X \in \mathscr{P} \tag{22}$$

那末称 Ψ 与 Ψ^* 互为对偶变换。

对偶变换在形态变换与形态分析中占有重要地位。例如：$\Psi(X) = X \cup B$, $\Psi^*(X) = X \cap B^c$。

定义 7　对于给定一个集合变换 Ψ，如果存在另一个集合变换 Ψ'，满足

$$\Psi \cdot \Psi' = \Psi' \cdot \Psi = I \tag{23}$$

其中，I 为恒等变换，即 $\forall X \in \mathscr{P}$, $I(X) = X$。那末称 Ψ' 为 Ψ 的逆变换，记为 Ψ^{-1}。否则，称 Ψ 为不可逆变换。

通常，形态变换是一种不可逆变换。

二、结构元素与并行局部变换

在形态学中，结构元素是最重要最基本的概念。

所谓结构元素 B 是 $E^{(n)}$ 或其子空间 $E^{(m)}$ 上的一个集合，具有一定的几何形状(如圆，球，有向线段，有向点对等)。结构元素 B 常包含原点，其尺寸相对地远远小于所考察的物体。$\{B(x), x\in E^{(n)}\}$ 称为结构元素族，点 x 为其"中心"。最常用的结构元素族是 $B(x) = \check{B}_x \triangleq \{x-b: b\in B\}$。结构元素在形态变换中的作用类似于信号处理时的"滤波窗口"，其特性和功能将在以后加以陆续阐述。

定义 8 设 $E^{(n)}$ 上的集合变换 Ψ，存在一个结构元素族 $\{B(x), x\in E^{(n)}\}$，使得

$$\Psi(X) = \{x: B(x) \cap X \text{ 满足一定条件}\} \tag{24}$$

那么称 Ψ 为集合的并行局部变换。

集合的并行局部变换的特征在于：1. 局部性：点 x 属于 $\Psi(X)$ 与否仅取决于集合 X 在点 x 的"周围" $B(x)$ 的局部形态，而不涉及集合 X 的整体属性；判定点 x 属于 $\Psi(X)$ 所需的信息大大地压缩了；2. 并行性：对于所有不同的点 x，它们是否属于 $\Psi(X)$ 可分开独立地加以确定；如果有适当的硬件的话，变换 $\Psi(X)$ 可以并行地进行。因此，这种变换具有实时快速的特点。

特别地，当取 $B(x) = \check{B}_x$ 时，变换 Ψ 又称为位不变并行局部变换。其并行、局部、实时、快速及易于硬件实现的特性使之在形态变换分析中占有重要的地位。

本书所引入的各种形态变换大多是位不变的并行局部变换。

§2 形态和差

一、形态和与形态差

形态和、形态差是最基本的形态变换。

定义 1 设 $E^{(n)}$ 中的集合 X，结构元素 B 为 $E^{(n)}$ 或其子空间 $E^{(m)}$ 中的一个点集。那么，集合 X 关于结构元素 B 的形态和、形态差分别定为如下点集：

$$X \oplus B \triangleq \{x: \check{B}_x \Uparrow X\} = \{x: \check{B}_x \cap X \neq \varnothing\} \tag{1}$$

$$X \ominus B \triangleq \{x: \check{B}_x \subset X\} \tag{2}$$

其中，$\check{B}_x = \{x-b: b \in B\}$，即集合 B 关于原点对称后沿向量 x 的平移。

形态和差是一类位不变的并行局部变换。形态和差又称为 Minkowski 和差运算。由图 1·2·1 可知，形态和差具有明显的几何特性，因而也俗称为膨胀与腐蚀。

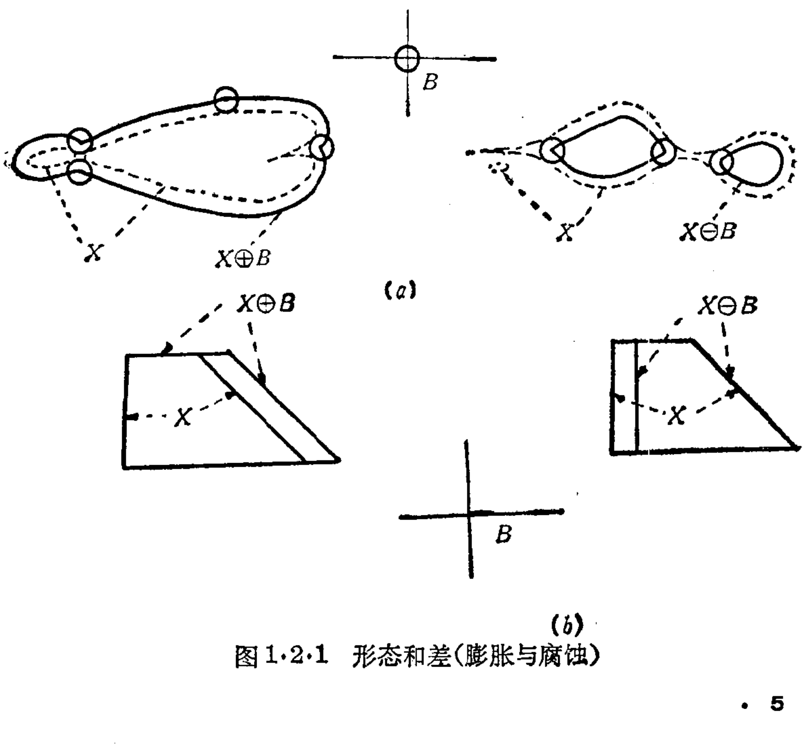


图 1·2·1 形态和差（膨胀与腐蚀）

形态和差的重要特征还在于它可转化为逻辑“与”、“或”、“非”运算。

定理1 $X\oplus B=\bigcup\limits_{\substack{x\in X\\ b\in B}}\{x+b\}=\bigcup\limits_{b\in B}X_b=\bigcup\limits_{x\in X}B_x$ (3)

$$X\ominus B=\bigcap_{b\in B}X_b \tag{4}$$

证明：由式(2)，$X\ominus B=\{x:\ \check{B}_x\subset X\}=\{x:\ x-b\in X,\ \forall b\in B\}=\{x: x\in X_b, \forall b\in B\}=\bigcap\limits_{b\in B}X_b$，故式(4)成立。

对于式(3)，若 $y\in X\oplus B$，则 $\exists x$，使得 $x\in\check{B}_y$，$x\in X$。因此，$x\in\{y-b:\ b\in B\}$，故 $\exists b'$，使得 $x=y-b'$，$b'\in B$。所以，$y=x+b'$，$x\in X$，$b'\in B$。此即表明：$X\oplus B\subset\bigcup\limits_{\substack{x\in X\\ b'\in B}}\{x+b'\}$。类似地可证明 $\bigcup\limits_{\substack{x\in X\\ b\in B}}\{x+b\}\subset X\oplus B$，故式(3)成立。 证毕

形态和差与逻辑非有如下对偶定理。

定理2 $(X\oplus B)^c=X^c\ominus B$ (5)

$$(X\ominus B)^c=X^c\oplus B \tag{6}$$

证明：利用式(3)和(4)可得

$$(X\oplus B)^c=(\bigcup_{b\in B}X_b)^c=\bigcap_{b\in B}(X_b)^c=\bigcap_{b\in B}(X^c)_b=X^c\ominus B$$

类似地，式(6)也成立。 证毕

定理2表明形态和差构成一对对偶变换。

由定义1及定理1、2可知，形态和差可转化为集合的逻辑运算(与、或、非)。因此，形态和差变换易于物理实现及并行处理。这就是形态变换分析之所以在图象分析与模式识别、计算机视觉中占有突出地位的重要原因之一。

从信号处理角度来看，形态和差是一种极值滤波。

定理3 设集合 X, $X\oplus B$, $X\ominus B$ 的示性函数分别为 $f(x)$, $g(x)$ 及 $h(x)$。那末

$$g(x)=\mathrm{Max}\{f(u):\ u\in\check{B}_x\} \tag{7}$$

$$h(x)=\mathrm{Min}\{f(u):\ u\in\check{B}_x\} \tag{8}$$

定理3表明，形态和差属于非线性变换。

二、形态和差的性质

由式(1)至(6)可方便地引出形态和差的一系列代数、几何性质。它们在物体的形态分析中具有重要的理论与实用价值。

性质 1 $X \oplus \{0\} = X \ominus \{0\} = X$ (9)

$$X \oplus \{h\} = X \ominus \{h\} = X_h \tag{10}$$

可见，当结构元素为一个点时，形态和差是集合的平移。

性质 2 原点对称性：

$$(X \oplus B)^{\vee} = \check{X} \oplus \check{B} \tag{11}$$

$$(X \ominus B)^{\vee} = \check{X} \ominus \check{B} \tag{12}$$

性质 3 平移性：

$$X_h \oplus B = (X \oplus B)_h = X \oplus B_h \tag{13}$$

$$X_h \ominus B = (X \ominus B)_h = X \ominus B_h \tag{14}$$

性质 4 尺度伸缩性：

$$\lambda(X \oplus B) = \lambda X \oplus \lambda B \tag{15}$$

$$\lambda(X \ominus B) = \lambda X \ominus \lambda B \tag{16}$$

性质 5 扩展性与反扩展性：

$$X \oplus B \supset X, \ (\text{当原点 } 0 \text{ 属于 } B \text{ 时}) \tag{17}$$

$$X \ominus B \subset X, \ (\text{当原点 } 0 \text{ 属于 } B \text{ 时}) \tag{18}$$

注意：如果原点 0 不属于 B，那末式(17)和(18)并不成立。

性质 6 交换律：

$$X \oplus B = B \oplus X \tag{19}$$

此由 $X \oplus B = \bigcup_{\substack{x \in X \\ b \in B}} \{x+b\}$ 即得。但是对于形态差，交换律并不成立，

$$X \ominus B \neq B \ominus X \tag{20}$$

性质 7 分配律：

$$X \oplus (B \cup C) = (X \oplus B) \cup (X \oplus C) \tag{21}$$

$$X \ominus (B \cup C) = (X \ominus B) \cap (X \ominus C) \tag{22}$$

$$(X \cup Y) \oplus B = (X \oplus B) \cup (Y \oplus B) \tag{23}$$

$$(X\cap Y)\ominus B=(X\ominus B)\cap(Y\ominus B) \tag{24}$$

但是，
$$X\oplus(B\cap C)\subset(X\oplus B)\cap(X\oplus C) \tag{25}$$
$$X\ominus(B\cap C)\supset(X\ominus B)\cup(X\ominus C) \tag{26}$$
$$(X\cap Y)\oplus B\subset(X\oplus B)\cap(Y\oplus B) \tag{27}$$
$$(X\cup Y)\ominus B\supset(X\ominus B)\cup(Y\ominus B) \tag{28}$$

证明：由式(3)，

$$X\oplus(B\cup C)=\bigcup_{x\in X}(B_x\cup C_x)=[\bigcup_{x\in X}B_x]\cup[\bigcup_{x\in X}C_x]$$
$$=(X\oplus B)\cup(X\oplus C)$$

故式(21)成立。

由交换律式(19)，式(23)成立。

由对偶定理，式(22)和(24)成立。

由式(3)， $X\oplus(B\cap C)=\bigcup_{\substack{b\in B\cap C\\ x\in X}}\{x+b\}\subset\bigcup_{\substack{b\in B\\ x\in X}}\{x+b\}=X\oplus B$。

同理有 $X\oplus(B\cap C)\subset X\oplus C$，于是式(25)成立。

由交换律知，式(28)也成立。

由式(4)， $X\ominus(B\cap C)=\bigcap_{b\in B\cap C}X_b\supset\bigcap_{b\in B}X_b=X\ominus B$。同理，

$X\ominus(B\cap C)\supset X\ominus C$，故式(26)成立。　　　　证毕

类似地，式(27)成立。

性质8　结合律：

$$(X\oplus B)\oplus C=X\oplus(B\oplus C) \tag{29}$$
$$(X\ominus B)\ominus C=X\ominus(B\oplus C) \tag{30}$$

证明：由式(3)，知

$$(X\oplus B)\oplus C=\bigcup_{\substack{x\in X\\ b\in B\\ c\in C}}\{x+b+c\} \tag{31}$$

故式(29)成立。利用对偶定理，对 X^c 应用式(29)，即得式(30)成立。　　　　证毕

式(29)和(30)的重要意义在于它说明了：把复杂的结构元素分解为简单的结构元素 B 与 C 的 Minkowski 和运算，复杂的形态和差可化为简单的形态和差之串行复合，从而使得形态和差易于

实现。

一般地，若

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_N \tag{32}$$

那么称 $B_1, \cdots, B_N$ 为结构元素 B 的 Minkowski 分解。

图 1·2·2 是若干常见结构元素的 Minkowski 分解。

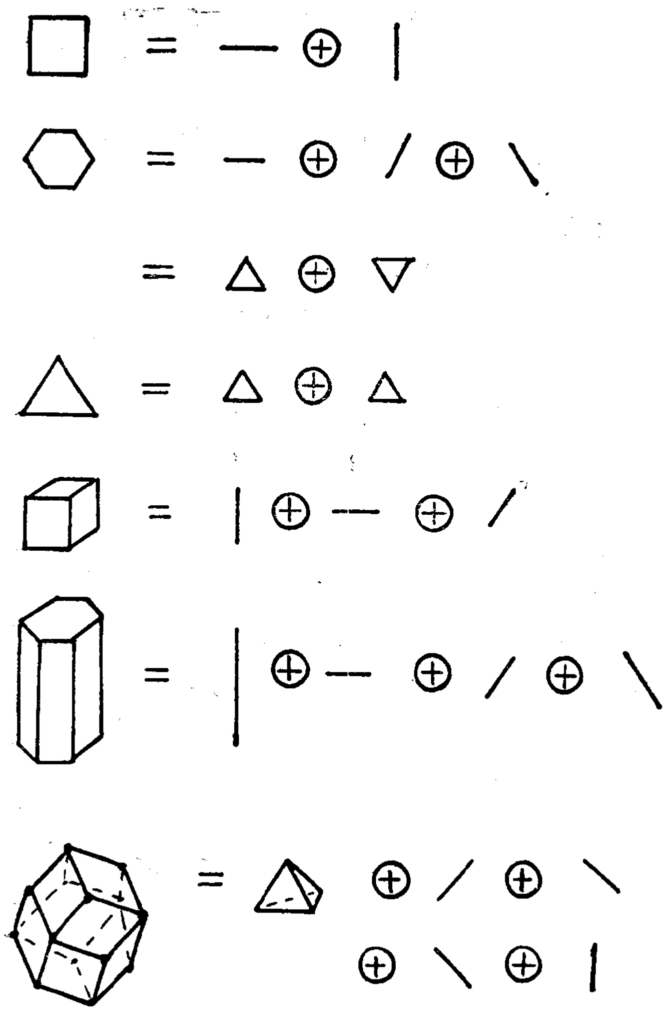


图 1·2·2　结构元素的 Minkowski 分解