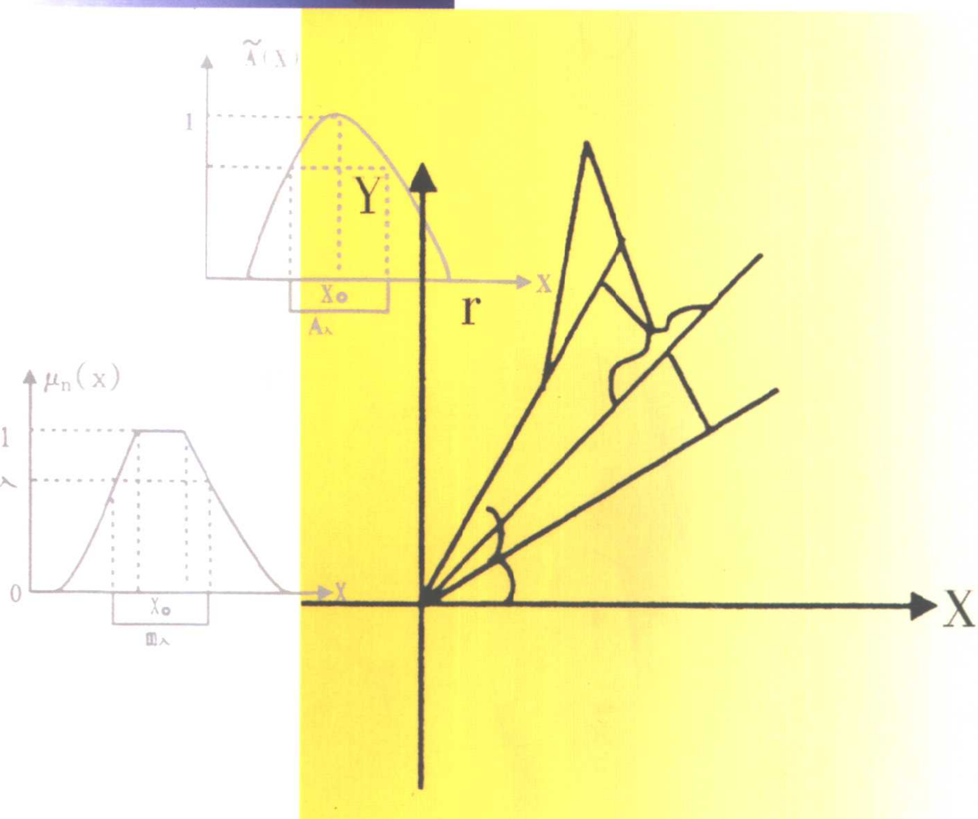
模糊复分析

马生全 曹纯 著



民族出版社

模糊复分析

马生全　曹纯　著

民族出版社

图书在版编目(CIP)数据

模糊复分析/马生全,曹纯著.－北京:民族出版社,
2001.10

ISBN 7－105－04702－X

Ⅰ.模… Ⅱ.① 马… ② 曹… Ⅲ.复分析
Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 076376 号

民族出版社出版发行
(北京市和平里北街 14 号 邮编 100013)
http://www.e56.com.cn
民族出版社微机照排 迪鑫印刷厂印刷
各地新华书店经销
2001 年 12 月第 1 版 2001 年 12 月北京第 1 次印刷
开本:850×1168 毫米 1/32 印张:7.875 字数:200 千字
印数:0001—1000 册 定价:25.00 元

前　言

自 1965 年美国 California 大学 L. A. Zadeh 教授提出模糊集论以来,在世界各国模糊学者的共同努力下,模糊数学理论及其应用研究取得了长足的进步,模糊数学业已成为一个具有广泛应用的新学科。其中模糊分析学的研究成果同样已相当丰富而深入,尤其是模糊实分析学的研究,在模糊数学界前辈吴从炘先生的带动下,其理论已相当深入。而关于模糊复分析的研究,目前尚不完善,目前还没有一本专门的著作系统地介绍该学科的内容。本书根据作者近年来的一些研究工作,综合国内外学者在此方面的研究,较系统地介绍模糊复分析分支的研究成果。虽然有些内容只是一些初步研究,但对于该学科的发展,将起到积极的作用。

本书试图以不大篇幅较系统地介绍目前国内外有关模糊复分析研究方面的概况,精炼地介绍了该领域的主要研究成果。在写作方式上,尽量较全面陈述主要结果,并不想对每个问题展开深入的讨论,为了节省篇幅,许多定理的证明均从略,有兴趣的读者可查阅书后所列参考文献。

全书共六章,第一章是预备知识;第二章全面介绍了

实模糊数的概念、模糊数的运算、模糊数的表现形式、模糊数的模糊距离、模糊数的模糊极限、模糊数空间及其中的运算与度量等;第三章介绍了模糊复集合、模糊复数、复模糊集、复模糊数的概念及基本运算,并讨论了它们相应的运算性质,为第四章打下基础;第四章介绍模糊复分析的基础,介绍了复模糊集值函数的基本概念(如极限、连续等)和基本运算、复模糊集值函数的微分(分一元与多元情形)、复模糊测度、复模糊集值函数的积分(定积分、曲线积分、曲面积分);第五章介绍了模糊复级数理论,讨论了实、复模糊数项级数与函数项级数的收敛性;第六章简单介绍了模糊数系的发展情况,并对模糊复分析需要进一步深入研究的问题进行了分析。

由于水平有限,书中难免有疏漏之处,敬请读者批评指正。

马生全

2001 年 7 月 27 日

于西北民族学院

符号约定

$I(C)$:C 上闭复区间数全体

$I(C^n)$:C^n 上闭复区间向量全体

$F(C)$:C 上 F 复集之全体

$F_0(C)$:C 上有界闭 F 复数全体

$C^F(C)$:C 上复 F 集全体

$C^u(C)$:C 上复集合套全体

$C_0{}^F(C)$:C 上有界闭复 F 数全体

$I_1(C)$:圆楔形闭复区间数全体

$CF_0^*(C)$:C 上圆楔形复 F 数全体

$P(U)$:普通集 U 的幂集

$F(U)$:U 上 F 集全体

$I(R)$:R 上闭区间数全体

$F(R^+)$:R 上正 F 数全体

$F(R^-)$:R 上负 F 数全体

$F_0(R)$:R 上有界闭 F 数全体

$\overline{C}$:一般 F 复数集

$\overline{C}^*$:广义一般 F 复数集

E^1:模糊实数空间

$F^*(R^{\pm})$:R 上正(负)F 数全体

$K(X)$:[0,1]上集合套全体

符　号

$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\supseteq$	包含
$\supset$	真包含
$\forall$	全称量词,对所有
$\exists$	存在量词,至少存在一个
$\geqslant$	大于或等于
$>$	大于
$\cup$	并
$\cap$	交
max, $\vee$	取最大值
mix, $\wedge$	取最小值
$\triangleq$	被定义为
$=$	等于
$\Rightarrow$	蕴涵

作者简介

马生全，男，回族，宁夏泾源县人。1962年3月出生，1985年毕业于西北民族学院数学专业并留校任教至今。现任西北民族学院数学系副教授，兼任中国模糊数学与模糊系统学会理事、甘肃省数学会理事、副秘书长等职。发表学术论文三十余篇，出版研究著作一部。曾获甘肃省三等科研成果奖两项、甘肃省优秀教学成果二等奖一项。为第五届甘肃省高等学校青年教师成才奖获得者。2001年3月荣获甘肃省优秀专家称号。主要研究方向为模糊系统理论及其应用。

作 者 简 介

曹纯，男，回族，天津市人。1968年毕业于兰州大学数学力学系。甘肃省数学会副理事长，西北民族学院教务处长，教授。多年来从事民族教育及教学管理工作，主要研究方向是模糊理论和数学教育，发表论文二十余篇。1985年参加研制的“计算机藏文信息处理系统”获甘肃省科技进步二等奖，1997年主持的《藏汉双语数学师资培养》获甘肃省教学成果二等奖，主持并完成了国家民委教育科学重点课题《藏汉双语数学教育研究》，主编了专著《藏汉双语数学教育研究》和全国第一部藏汉双语对照教材《高等代数》。

目　录

第一章　预备知识

§1.1　模糊集概念及运算

在经典集合论中一个元素 x 和一个集合 A 的关系只能有 $x\in A$ 和 $x\notin A$ 两种情况。然而,在现实客观世界中,大量存在着外延不分明的概念,即"亦此亦彼"现象,用经典集合论"非此及彼"的思想尚不能刻画所有元素和集合的关系,即不能简单地用"$x\in A$ 或 $x\notin A$"来表述,我们称这种外延不分明的概念为模糊概念。为了刻画模糊概念,1965 年 L. A. Zadeh 首先引入模糊集的概念,其基本思想是把经典集合中的绝对隶属关系灵活化,用普通集合的特征函数语言来讲就是:元素对"集合"的隶属度不再是局限于取 0 或 1,而是可以取 0 到 1 之间的任何一个实数。具体来讲我们有:

设给定论域 U 和一个资格函数把 U 中每个元素 x 和区间[0,1]中的一个数 $\mu_A(x)$ 结合起来。$\mu_A(x)$ 表示 x 在 A 中的资格的等级。此处的 A 即所谓 U 的一个模糊子集,而 $\mu_A(x)$ 相当于普通集的特征函数 $C_A(x)$,不过其取值不再是 0 和 1,而是扩展到[0,1]中的任一数值。

用数学语言我们给出:

定义 1.1.1　所谓给定论域(非空集)U 上的一个模糊子集 A,是指对任何 $x\in U$ 都有一个数 $\mu_A(x)\in[0,1]$ 与之对应,并称之

为 x 属于模糊子集 A 的隶属程度;即指的是映射

$$\mu_A : U \to [0,1]; x \to \mu_A(x).$$

而映射 μ_A 称为 A 的隶属函数,以下以 A(x)简记 $\mu_A(x)$.

显然,当隶属函数仅取值于{0,1}时就成为通常的特征函数。即分明子集是模糊子集的特例。U 上的所有模糊子集全体构成的集族记为 F(U),U 上所有分明子集全体构成的集族记为 P(U)

定义 1.1.2　设 $A,B\in F(U)$,若 $\forall x\in U, B(x)\leqslant A(x)$

则称 A 包含 B,记为 $B\subseteq A$.

如果　$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$

显然,包含关系"$\subseteq$"是 F 幂集 F(U)上的二元关系,它具有下列性质:

①自反性:$\forall A\in F(U), A\subseteq A$;

②反对称性:若 $A\subseteq B, B\subseteq A$,则 $A=B$;

③传递性:若 $A\subseteq B, B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

因此 $(F(U),\subseteq)$是偏序集.

定义 1.1.3　设 $A,B\in F(U)$,分别称运算 $A\cup B, A\cap B$ 为 A 与 B 的并集和交集。称 A^c 为 A 的补集,也称为 A 的余集。它们的隶属函数分别为:

$$\begin{aligned}(A\cup B)(x) &= A(x)\vee B(x)\\ &= \max(A(x),B(x))\\ (A\cap B)(x) &= A(x)\wedge B(x)\\ &= \min(A(x),B(x))\end{aligned}$$

$A^c(x)=1-A(x)$

任给 $a,b\in[0,1]$,由于

$0\leqslant a\vee b\leqslant 1,\quad 0\leqslant a\wedge b\leqslant 1,\quad 0\leqslant 1-a\leqslant 1$

故对任何 $A,B\in F(U)$,有 $A\cup B\in F(U)$,$A\cap B\in F(U)$,$A^c\in F(U)$.

一般地,模糊集 A 与 B 的并、交和余的计算,按论域 U 为有限和无限分两种情况表示:

① 设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$,设有 F 集

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)}{u_i}\quad,\qquad B=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(u_i)}{u_i}$$

则 $$A\cup B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\vee B(u_i)}{u_i};$$

$$A\cap B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\wedge B(u_i)}{u_i};$$

$$A^c=\sum_{i=1}^{n}\frac{1-A(u_i)}{u_i}.$$

② 设论域 U 为无限集,且 F 集

$$A=\int_{u\in U}\frac{A(u)}{u}\quad,\qquad B=\int_{u\in U}\frac{B(u)}{u}$$

则 $$A\cup B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\vee B(u)}{u};$$

$$A\cap B=\int_{u\in U}\frac{A(u)\wedge B(u)}{u};$$

$$A^c=\int_{u\in U}\frac{1-A(u)}{u}.$$

两个模糊集的并、交运算可以推广到任意多个模糊集上去。

定义 1.1.4 设 $A_t\in F(U)$,$t\in T$,T 为指标集.

对任意 $u \in U$,规定:

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)(u) = \bigvee_{t\in T} A_t(u) = \sup_{t\in T} A_t(u);$$

$$(\bigcap_{t\in T} A_t)(u) = \bigwedge_{t\in T} A_t(u) = \inf_{t\in T} A_t(u);$$

称 $\bigcup_{t\in T} A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的并集, $\bigcap_{t\in T} A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的交集.

显然 $\bigcup_{t\in T} A_t, \bigcap_{t\in T} A_t \in F(U)$.

定理 1.1.1 $(F(U), \cup, \cap, c)$ 具有下列性质:

①幂等律: $A \cup A = A, A \cap A = A$;

②交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

③结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

④吸收律: $(A \cup B) \cap A = A, (A \cap B) \cup A = A$;

⑤分配律: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

⑥零一壹律: $A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing$;

$A \cup U = U, A \cap U = A$;

⑦复原律: $(A^c)^c = A$;

⑧对偶律: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

若 $B_t \in F(U), t \in T$,则上述性质⑤和⑧具有更一般形式:

⑤′ $$(\bigcup_{t\in T} B_t) \cap C = \bigcup_{t\in T} (B_t \cap C)$$

$$(\bigcap_{t\in T} B_t) \cup C = \bigcap_{t\in T} (B_t \cup C)$$

⑧′ $$(\bigcup_{t\in T} B_t)^c = \bigcap_{t\in T} B_t^c$$

$$(\bigcap_{t\in T} B_t)^c = \bigcup_{t\in T} B_t^c$$

由于 $\varnothing, U \in F(U)$,故 $F(U)$ 具有最大元 U 及最小元 $\varnothing$,因此说

明$(F(U),\cup,\cap,c)$是软代数而不是布尔代数，因为$(F(U),\cup,\cap,c)$不满足互补律。这是 F 集与普通集之间的显著不同之处。F 集上的补运算不满足互补律，其原因是 F 集没有明确的边界。

$A\cap A^c\neq\varnothing$，说明 A 与 A^c 交迭，但是：

$$\forall A\in F(U),A(u)\wedge A^c(u)\leqslant\frac{1}{2},\forall u\in U$$

同样，$A\cup A^c\neq U$，说明 $A\cup A^c$ 不一定完全覆盖 U，但有下述结论：

$$\forall A\in F(U),A(u)\vee A^c(u)\geqslant\frac{1}{2}\quad,\quad\forall u\in U.$$

例：设 $U=[0,1]$，$A(u)=u$，则 $A^c(u)=1-u$

$$(A\cup A^c)(u)=\begin{cases}1-u, & u\leqslant\frac{1}{2}\\ u, & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(A\cap A^c)(u)=\begin{cases}u, & u\leqslant\frac{1}{2}\\ 1-u, & u>\frac{1}{2}\end{cases}$$

特别是：$(A\cup A^c)(\frac{1}{2})=(A\cap A^c)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

由于 F 集的运算不满足互补律，所以它比普通集合更能客观的反映实际中大量存在着的模棱两可的情况。

定义 1.1.5 若 $A\in F(U)$满足条件：$A(x)=\lambda>0,A(y)=0$，当 $y\neq x$ 时，则称 A 为模糊点，记为 x_λ，点 x 称为是模糊点 x_λ 的承点，而 λ 叫做模糊点 x_λ 的高度。以 U^* 记 U 上所有模糊点之集.

显然，分明点 $x\in U$ 即为以 x 为承点，1 为高度的模糊集 x_1，

由于模糊点是特殊的模糊子集，所以当 $x_\lambda \subset B$，即 $B(x) \geqslant \lambda$ 时，我们称模糊点 x_λ 属于B，记作 $x_\lambda \in B$.

模糊点与模糊子集的属于关系是分明点、分明集属于关系的推广。而分明的属于关系还有下列形式的推广：

定义 1.1.6 若 $x_\lambda \in U^*$，$A \in F(U)$，且 $A(x)+\lambda>1$，则称 x_λ 重于A，记作：$x_\lambda \widetilde{\in} A$.

定理 1.1.2 设$\{A_\alpha:\alpha \in T\} \subset F(U)$，则模糊点 $x_\lambda \widetilde{\in} \bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha$ 当且仅当存在

$\alpha_0 \in T$，使 $\quad x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$.

证：若 $\exists\,\alpha_0 \in T$，使 $x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$，则 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，所以

$\sup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha(x)>1-\lambda$，即 $x_\alpha \widetilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$.

反之：若 $x_\lambda \widetilde{\in} \bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$，则 $\sup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha(x)>1-\lambda$，

于是由上确界的性质有 $\alpha_0 \in T$ 使 $A_{\alpha_0}(x)>1-\lambda$，即 $x_\lambda \widetilde{\in} A_{\alpha_0}$.

证毕

例：取 $A_n=(1-\frac{1}{2n})^* \qquad (n=1,2,\cdots)$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n=U$，对任何 $x\in U$

均有 $x_1 \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$

但对任何 n 均有 $x_1 \notin A_n$，此处，A_n 表示 $A_n(x)\equiv 1-\frac{1}{2n}$，$x \in U$. 这说明定理 1.1.2 对模糊点与模糊子集的属于关系是不成立的，但对于分明属于关系，这又是一条非常基本的性质，因此，在