

# 目 录

## 前 言

### 主要符号表

### 第一章 有限元法的理论基础

- § 1-1 有限元法的基本概念 ..... (1)
- § 1-2 有限元法应用示例 ..... (3)
- § 1-3 有限元法的理论基础 ..... (9)

### 第二章 平面应力问题的有限元法

- § 2-1 平面问题的高离散化 ..... (16)
- § 2-2 单元位移函数 ..... (20)
- § 2-3 单元应变和应力 ..... (25)
- § 2-4 单元刚度矩阵 ..... (26)
- § 2-5 形函数的性质和面积坐标 ..... (30)
- § 2-6 整体刚度矩阵的组集 ..... (34)
- § 2-7 等效节点载荷 ..... (39)
- § 2-8 变温等效节点载荷 ..... (43)
- § 2-9 关于边界条件的处理 ..... (44)
- § 2-10 计算实例 ..... (46)
- § 2-11 平面应力问题的计算机程序 ..... (51)

### 第三章 轴对称问题的应力分析

- § 3-1 单元剖分及位移函数 ..... (65)
- § 3-2 单元应变与应力 ..... (67)
- § 3-3 单元刚度矩阵 ..... (71)
- § 3-4 刚度矩阵的精确计算方法 ..... (72)
- § 3-5 等效节点载荷计算 ..... (78)

### 第四章 空间问题的应力分析

- § 4-1 空间应力分析的基本方程 ..... (84)
- § 4-2 四面体单元 ..... (85)
- § 4-3 四面体单元的刚度矩阵和载荷矩阵 ..... (89)
- § 4-4 形成四面体的对角线划分法 ..... (91)
- § 4-5 六面体单元 ..... (93)

### 第五章 等参数单元

- § 5-1 等参数单元的概念 ..... (96)
- § 5-2 矩形单元与等参数四边形单元 ..... (98)
- § 5-3 平面对参数单元 ..... (103)

§ 5-4	轴对称等参数单元 .....	(111)
§ 5-5	空间等参数单元 .....	(114)
<b>第六章 弹性薄板及薄壳的弯曲</b>		
§ 6-1	薄板弯曲的基本理论 .....	(122)
§ 6-2	三角形薄板单元 .....	(130)
§ 6-3	采用平面三角形单元的壳体分析 .....	(136)
§ 6-4	局部坐标的方向余弦 .....	(141)
<b>第七章 传热问题的有限元法</b>		
§ 7-1	固体火箭发动机导热的基本方程 .....	(143)
§ 7-2	变分法 .....	(146)
§ 7-3	泛函变分问题的近似解法 .....	(159)
§ 7-4	微分方程边值问题的近似解法 .....	(165)
§ 7-5	平面温度场的有限元分析 .....	(170)
§ 7-6	轴对称温度场的有限元分析 .....	(180)
§ 7-7	有限元法的整体组集 .....	(187)
§ 7-8	温度场有限元法求解的步骤与特点 .....	(196)
§ 7-9	瞬态温度场计算机程序 .....	(202)
<b>第八章 断裂力学问题的有限元法</b>		
§ 8-1	概述 .....	(218)
§ 8-2	直接法 .....	(224)
§ 8-3	有限元与 $J$ 积分法 .....	(227)
<b>第九章 有限元法在固体火箭发动机传热问题中的应用</b>		
§ 9-1	固体火箭发动机结构的受热问题 .....	(231)
§ 9-2	喷管喉衬温度场的有限元法计算 .....	(232)
§ 9-3	复合结构喷管温度场计算及程序 .....	(241)
§ 9-4	贴壁液铸药柱燃烧室壳体的传热计算 .....	(258)
<b>第十章 有限元法在固体火箭发动机结构应力分析中的应用</b>		
§ 10-1	在内压作用下燃烧室壳体的应力分析与程序 .....	(259)
§ 10-2	复合喷管的应力分析及程序 .....	(287)
<b>附录 I 弹性力学基本方程的矩阵表达式 .....</b>		
<b>附录 II 有限元网格的自动剖分及程序 .....</b>		
<b>参考文献 .....</b>		

## 第一章 有限元法的理论基础

要用有限元法对弹性结构进行应力分析和传热分析，必须对有限元法的基本概念和基本理论有所了解；必须对弹性理论的基本概念和基本方程有所了解；必须对传热学的基本概念和基本方程有所了解。而本章的内容主要介绍有限元法的基本概念及其理论基础部分。

### § 1-1 有限元法的基本概念

#### 一、什么是有限元法

有限元法亦称有限单元法或有限元素法。概括地说，它是一种有效的、比较新颖的数值计算方法。其基本思想可以从两个不同的角度去理解，但其实质是一样的。

一种是朴素的工程的推想：运用离散化的概念，将连续介质或结构划分成许多个有限大小的子区域的集合，把每一个子区域称为单元或元素，将单元的集合称为网格。而实际的连续介质（或实际结构）可以看成是这些单元在它们的节点上相互连接而组成的等效集合体。

例如图1-1所示的变截面直杆，是由不同横截面的两段杆所组成。AB和BC段的长度分别为 $l_1$ 和 $l_2$ ，横截面积分别为 $A_1$ 和 $A_2$ ，材料的弹性模量均为 $E$ ，受有轴向载荷 $F_B$ 和 $F_C$ 。

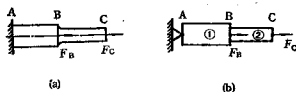


图 1-1 变截面直杆

用有限元法分析此结构时，首先应运用离散化的概念，将其离散化为有限数个目的单元和节点。我们可以假想的把它分成两段，即分成AB段和BC段，每一段都称为一个单元，AB段为第一个单元，记为①，BC段为第二个单元，记为②，则整个变截面杆可以看成由这两个单元组成的。单元的端点（或顶点）称为节点，如图1-1(b)中的A点、B点和C点均为节点。这些单元在有限个节点上连接起来，如单元①与单元②的连接是通过节点B象一个铰链似实现的。这样离散化的结构（图1-1(b)）即为真实结构（图1-1(a)）的等效集合体或计算模型。它与真实结构的区别在于单元与单元之间的连接除了节点之外，再无任何连接，但是这种连接要满足变形协调条件。因此，单元间的相互作用力只是靠节点传递。

作用在节点上的载荷称为节点载荷，如图1-1(b)中 $F_B$ 作用在节点B， $F_C$ 作用在节点

$C$ ,  $F_B$  和  $F_C$  称为节点载荷。离散后的结构在节点载荷的作用下发生变形, 节点位置的变动, 称为节点位移。节点与单元之间的相互作用力, 称为节点力。

这里需要指出的是, 节点载荷与节点力的概念是不相同的, 不能混淆。节点载荷是外力 (包括体积力简称体力、表面力简称为面力和集中力), 而节点力是内力, 是节点与单元间相互作用的力。例如节点  $B$  的节点载荷是  $F_B$ , 但是节点力不是  $F_B$ 。那么, 节点力是什么呢? 这就要看是哪一个单元对节点  $B$  的作用了, 这将在 § 1-2 节中进行分析。

上面通过分析一个简单的杆系结构, 引出了节点、节点载荷、节点位移及节点力的概念。这些概念是有限元法的重要概念, 也是用于任一问题的有限元法分析的术语。因此, 在后续章节中经常要用到这些概念, 希望读者能够较好地掌握上述概念。

对于杆系结构, 单元的划分可以按图 1-1(b) 所示的自然单元, 也可以不考虑结构的特点, 人为的多分几段, 那么节点也就多出现几个。而对于象喷管喉衬、喷管壳体、发动机壳体等结构, 不存在如图 1-1 所示的自然单元, 必须人为地将其划分为有限个子区域, 将这些子区域作为计算的单元, 如图 1-2 所示。图 1-2(a) 是火箭发动机喷管喉衬结构, 图 1-

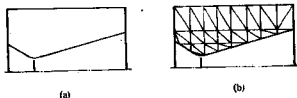


图 1-2 喷管喉衬结构及其离散化  
(a) 喷管喉衬; (b) 喉衬离散化

2(b) 是将喉衬结构离散化为有限个数目的单元。图(b)是图(a)的等效集合体或计算模型。

有限元法是将弹性连续体离散成为有限个单元的一种近似数值解法。由于离散后的单元与单元之间只通过节点相互连接, 且离散后的单元数目和节点数目都是有限的, 所以称这种方法为有限元法。将连续体离散成为有限个单元, 并建立描述其性态的各种公式, 此项工作称为连续体的离散化。

有限元法的优点是显而易见的, 因为离散后的单元都是性态容易了解的标准单元, 可为每个单元单独建立方程, 并可用有限个参数加以描述。而整个结构是由有限个数目的单元所组成的。将有限个单元的方程汇集起来, 称作单元的组集或集合; 也可以用有限个参数来描述, 其基本方程是一个代数方程组。在数学上讲, 就是把微分方程的连续形式转化为描述等效集合体性态的代数方程组, 以便于进行数值解。

从数学角度来看, 有限元法是求解数学物理方程的一种数值方法。它是各种经典数值方法, 如瑞利-里兹法、伽辽金法等的形式。有限元法与经典方法都能把一个连续体的偏微分方程组离散化为等效的代数方程组。从这一点讲, 它们的性质是相同的, 与前述工程推理是一致的。

但有限元法与上述经典方法也有重大差别, 其基本差别在于插值函数(或试探函数)的选取方式不同。在经典方法中, 是在整个求解域上选取统一的插值函数, 并要求该函数在域内和域的边界上均满足一定的条件。而在有限元法中, 插值函数要分片地分别在子域上或单元上选取, 并要求插值函数在各子域内部、子域之间的分界面上(称内部边界)以

及子域与外界分界面上(称外部边界)均满足一定条件。由于有这种差别,它使有限元法的实用价值远远超过了经典方法。

由上述分析可知,有限元法包含着近似。随着网格的加密,等效集合体逼近于实际弹性体或结构,或者说,计算模型逼近于实际求解域,收敛于精确解。

从上述分析中了解到,“离散化”、“分片插值”的理论是有限元法的基础理论之一,从这方面讲,有限元法是有有限差分法(或网格法)的一种发展。

有限元法首先应用于航空工业中结构力学的特性分析。由于它是求解数学物理方程的一种数值方法,所以它适用的学科和领域非常广泛。已从固体力学领域扩展到流体力学、传热学等领域。

有限元法解决实际问题的能力远远超出了经典的方法,它能成功地解决各种各样的固体力学问题和场问题。所以在航空航天工程设计中都已广泛采用有限元法。它已成为现代工程设计中的一个强有力的数值分析工具,已经受到普遍重视,并且已经取得显著成果。因此,掌握有限元法的原理及其应用,对于从事航空航天、机械、动力、造船等工程设计工作者来说,是必不可缺的。所以在许多工科院校中都开设了这门课程。

## 二、有限元法的内容

这本书的内容包括基础理论及应用两个部分。基础理论部分将系统通俗地介绍有限元法的基本理论和基本方法。并且从应用的角度来讨论有限元法,着重从工程方面做阐述,在涉及到数学基础理论时,只作简明的论证或直接引用其结论,而不做过多的数学推导。应用(或专题)部分将详细地介绍怎样用有限元法的理论来解决固体火箭发动机结构传热计算和强度计算问题。重点在于介绍有限元法在结构不稳定导热分析和线弹性静力分析中的应用。

用有限元法进行结构分析时,可分为两大部分。第一部分是单元分析。单元分析的任务是探讨单个单元的特性(力学特性、传热学特性等),并为求解单个单元的特性建立方程;第二部分是整体结构分析,即把所有的单元集合起来成为整体结构,并建立整体结构方程。

### § 1-2 有限元法应用示例

本节以图1-1所示的杆系结构为计算示例,用有限元法对其进行应力分析。通过该示例,具体地介绍有限元分析的基本思路、基本方法和步骤,为分析较复杂的问题打下基础。

进行有限元法分析的前提条件,是将结构进行离散化。现以图1-1(b)为计算模型,介绍有限元法分析的基本思路。

#### 一、单元特性分析

单元特性分析的目的是确定单元的力学特性,即确定单元的节点力与节点位移的关系。在位移法中,其关系是单元的刚度矩阵。

先对单元和节点进行受力分析,如图1-3所示。节点A和B对单元①有作用力 $P_A$ 和

力 $p_A^{\text{①}}$ 时, 单元①对节点A和B有大小相等, 方向相反的反作用力 $p_A^{\text{①}'}$ 和 $p_B^{\text{①}'}$ 。这里节点和单元之间的作用力和反作用力都称为节点力。对于单元来讲, 节点力是节点作用于单元的力, 而对于节点来讲, 节点力是单元作用于节点的力。节点力的上标表示单元的号码, 下标表示节点的号码。同理, 节点B和C对单元②有作用力 $p_B^{\text{②}}$ 和 $p_C^{\text{②}}$ 时, 则单元②对节点B和C的反作用力为 $p_B^{\text{②}'}$ 和 $p_C^{\text{②}'}$ 。

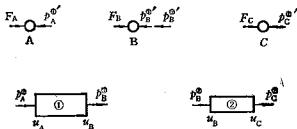


图1-3 对单元和节点进行受力分析

首先推导单元①的节点力与节点位移的关系。分析时单元①的受力情况可分解为两种状态。

状态一: 设节点A被固定, 位移 $u_A=0$ , 节点B产生位移 $u_B$ , 如图1-4所示。此时节点B作用在单元①上的力为

$$p_B^{\text{①}'} = k_1 u_B$$

而节点A作用在单元①上的力为

$$p_A^{\text{①}'} = -p_B^{\text{①}'} = -k_1 u_B$$

状态二: 与状态一刚好相反。设节点B被固定, 即 $u_B=0$ , 节点A产生位移 $u_A$ , 如图1-5所示。此时节点A对单元①的作用力为

$$p_A^{\text{①}''} = k_1 u_A$$



图1-4 节点A被固定

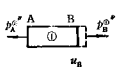


图1-5 节点B被固定

而节点B对单元①的作用力为

$$p_B^{\text{①}''} = -p_A^{\text{①}''} = -k_1 u_A$$

式中 $k_1$ 为单元①的刚度系数, 其表达式为

$$k_1 = \frac{EA_1}{l_1}$$

将图1-4及1-5所示的两种状态的结果叠加起来, 就得到图1-3。也就是说得到单元①的节点力与节点位移间的关系, 即

$$\left. \begin{aligned} p_A^{\text{①}} &= p_A^{\text{①}''} + p_A^{\text{①}'} = k_1 u_A - k_1 u_B \\ p_B^{\text{①}} &= p_B^{\text{①}''} + p_B^{\text{①}'} = -k_1 u_A + k_1 u_B \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

由上式可以看出, 一个节点上的节点力不仅决定于本节点的位移, 也决定于本单元其

它节点的位移。

式 (1-1) 用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_A \textcircled{1} \\ \dot{p}_B \textcircled{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

式中  $k_{11} = k_1$ ,  $k_{12} = -k_1$ ,  $k_{21} = -k_1$ ,  $k_{22} = k_1$

设  $\{\dot{p}\}^e$  表示单元节点力向量,  $\{\delta\}^e$  表示单元节点位移向量, 则有

$$\{\dot{p}\}^e = \begin{bmatrix} \dot{p}_A \textcircled{1} \\ \dot{p}_B \textcircled{1} \end{bmatrix}; \quad \{\delta\}^e = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}$$

则式(1-2)可改写成

$$\{\dot{p}\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (1-3)$$

式中

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

式(1-3)中诸矩阵右上标的“e”表示单元号码, 对于单元①而言,  $e = \textcircled{1}$ , 这时式(1-3)可以写成

$$\{\dot{p}\} \textcircled{1} = [k] \textcircled{1} \{\delta\} \textcircled{1}$$

式(1-3)就是单元节点力  $\{\dot{p}\}^e$  与单元节点位移  $\{\delta\}^e$  之间的转换关系。  $[k]^e$  就是其间的转换矩阵, 这个转换矩阵是由单元①的刚度系数组成的, 所以称  $[k]^e$  为单元刚度矩阵, 简称单刚。

由于刚度系数  $k_1 = EA/l_1$ , 则可知  $k_1$  仅与结构的几何尺寸及材料的物理性质有关, 而与结构的受力情况或变形情况无关, 所以, 单刚反映了单元的结构特性及物理特性。

从平衡方程式(1-3)可知, 单刚  $[k]^e$  就是式(1-3)的系数矩阵。因此, 求得  $[k]^e$  后就能列出单元的平衡方程式。由此可见, 从弹性力学观点讲, 单元特性分析的任务就是求出单元的刚度矩阵。因为求得  $[k]^e$ , 就找到了  $\{\dot{p}\}^e$  与  $\{\delta\}^e$  的转换关系, 就能列出平衡方程, 求解此方程, 就能求得  $\{\delta\}^e$ , 这就是位移法的特点。

公式(1-4)中的元素  $k_{11}, k_{12}, \dots$  有两个下标, 其意义是: 第1个下标代表该元素所在的行, 第2个下标代表该元素所在的列, 所以元素的两个下标表明了其在  $[k]^e$  中所处的位置。例如  $k_{12}$ , 表明该元素在单刚  $[k]^e$  中的位置是第1行第2列。

同理, 可以求得作用于单元②的节点力和节点位移之间的关系式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_A \textcircled{2} &= k_2 u_A - k_2 u_C \\ \dot{p}_C \textcircled{2} &= -k_2 u_A + k_2 u_C \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_A \textcircled{2} \\ \dot{p}_C \textcircled{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_C \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

或

式中  $e = \textcircled{2}$

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

其中

$$k_2 = \frac{EA_2}{l_2}$$

在这个例子里，由于预设了杆件材料弹性模量为常量，节点位移只沿轴向，因此，推导单元刚度矩阵比较简单，而对于复杂些的问题，分析过程要复杂得多。

## 二、整体结构的特性分析

用位移法对整体结构的力学特性进行分析，其主要内容是推导整体结构的刚度矩阵，称为整体刚度矩阵，简称总刚。因为求出总刚，就能够列出结构的节点荷载列阵与结构的节点位移列阵的关系，于是就得到了整个结构的平衡方程组，也就是有限元法的基本方程。

对于结构力学特性进行分析的根据是：

1. 在公共节点处的诸单元的节点位移必须满足变形协调条件。
2. 在公共节点处的诸单元的节点力与作用在该节点上的外力必须满足静力平衡条件。

每个节点，在节点力和节点荷载作用下，必须保持平衡。有限元法是以节点平衡来建立平衡方程式的。由节点平衡条件（参见图1-3上方以节点为分离体的受力分析）可建立各节点的平衡方程式。

节点A的平衡方程式：

$$F_A - p_A^{\text{①}} = 0$$

$$\text{或} \quad F_A = p_A^{\text{①}} = p_A^{\text{①}} = k_1 u_A - k_1 u_B \quad (1-8)$$

节点B的平衡方程式：

$$F_B - p_B^{\text{①}} - p_B^{\text{②}} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{或} \quad F_B &= p_B^{\text{①}} + p_B^{\text{②}} = p_A^{\text{①}} + p_B^{\text{②}} \\ &= -k_1 u_A + k_1 u_B + k_2 u_B - k_2 u_C \\ &= -k_1 u_A + (k_1 + k_2) u_B - k_2 u_C \end{aligned} \quad (1-9)$$

节点C的平衡方程式：

$$F_C - p_C^{\text{②}} = 0$$

$$\text{或} \quad F_C = p_C^{\text{②}} = p_C^{\text{②}} = -k_2 u_B + k_2 u_C \quad (1-10)$$

方程式(1-8)~(1-10)写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1-11)$$

或简写成

$$[P] = [K][\delta] \quad (1-12)$$

式中

$$[P] = \begin{pmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{pmatrix} \text{ 为整体结构节点荷载列阵}$$



$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad \text{为整体刚度矩阵}$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{bmatrix} \quad \text{为整体结构节点位移列阵}$$

由上述分析可知:

1. 应用有限元法求解弹性力学问题时,其核心内容是推导整体刚度矩阵,因为一旦建立了整体刚度矩阵,就等于建立了有限元法的基本方程组。

2. 整体刚度矩阵是由单元刚度矩阵叠加而成的。因此,为了求得整体刚度矩阵,必须首先求出单元刚度矩阵,然后再叠加。叠加的方法可从式(1-11)整体刚度矩阵看出,其左上方画虚线框的是单元①的刚度矩阵,右下方画虚线框的是单元②的刚度矩阵,而其重叠部分中的加号,表示将相同位置上两个单元刚度矩阵的元素 $k_1$ 与 $k_2$ 相加起来,组成在该位置上的整体刚度矩阵元素,即 $K_{22}=k_1+k_2$ 。由此可知,建立整体刚度矩阵的问题,不是简单的直接由单元刚度矩阵相加而得,而必须是将单元刚度矩阵中行号和列号相同的元素(即相同位置上的元素)送到整体刚度矩阵的相同位置上,在该位置上有几个元素送到,即把它们叠加起来组成在该位置上整体刚度矩阵的元素。这种方法叫做“对号入座”。

为了便于大家掌握由单元刚度矩阵集成整体刚度矩阵的方法,下面作进一步分析。先将单元刚度矩阵的阶数膨胀,使其与组集后的整体刚度矩阵阶数相等。例如前面讲过的示例,单元①和单元②的刚度矩阵阶数,都是 $2 \times 2$ 阶的,而组集后的整体刚度矩阵的阶数是 $3 \times 3$ 阶的。因此,需要把单元①,②的刚度矩阵阶数膨胀为 $3 \times 3$ 阶的。如何膨胀呢?方法是将与该单元无关的节点位移相对应的行和列的元素加零。这样:

对于单元①来讲,与它无关的节点C的位移 $u_C$ 所对应的行和列的元素加零后,式(1-4)即变为

$$[k]^{\circledast} = [k]^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对于单元②来讲,把与它无关的节点A的位移 $u_A$ 所对应的行和列的元素加零之后,式(1-7)变为

$$[k]^{\circledast} = [k]^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

采用对号入座的办法将上面两式叠加起来,得到整体刚度矩阵为

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}$$

式中  $K_{12}=k_1+k_2$ ,  $K_{13}=K_{31}=0$ 。上式与式(1-11)完全相同。

从式(1-11)可以看出,整体刚度矩阵具有下述性质:

1. 对称性。与单元刚度矩阵一样,也是对称矩阵,即整体刚度矩阵中的元素均对称

于主对角元素。例如式 (1-11) 中  $K_{ij} = K_{ji}^T$ , 即  $K_{12} = K_{21}^T$ ,  $K_{13} = K_{31}^T$  等。利用其对称性, 在电子计算机中只要存储上三角阵或下三角阵部分即可, 从而节省近一半的存储量。

2. 主对角元素恒为正值, 即  $K_{ii} > 0$ 。其物理意义是说明, 作用力方向与位移方向是一致的。

3. 整体刚度矩阵仅与材料的物理性质和结构的几何尺寸有关系。

4. 整体刚度矩阵中任一行 (或列) 元素之和为零, 这反映了平衡条件。

5. 整体刚度矩阵是奇异矩阵。这是因为建立整体刚度矩阵时, 没有消除结构的刚体位移。当加入边界约束条件, 消除结构的刚体位移之后, 整体刚度矩阵成为正定矩阵。

### 三、求解方程组

求解线性代数方程组 (1-11), 获得位移解并求出支反力。为此应当引入边界约束条件。根据示例知, 已知的是位移约束条件, 即  $u_A = 0$ , 代入式 (1-11) 得:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \\ u_C \end{Bmatrix}$$

分块求得

$$F_A = [-k_1 \quad 0] \begin{Bmatrix} u_B \\ u_C \end{Bmatrix} \quad (1-13)$$

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ u_C \end{Bmatrix} \quad (1-14)$$

对式 (1-14) 求逆矩阵, 得到位移分量为

$$\begin{Bmatrix} u_B \\ u_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} \quad (1-15)$$

将式 (1-15) 代入式 (1-13), 得

$$F_A = [-k_1 \quad 0] \begin{Bmatrix} \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} \\ \frac{1}{k_1} & \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = -(F_B + F_C) \quad (1-16)$$

### 四、求解各单元的应力

对于等截面弹性杆在受拉情况下, 其应力  $\sigma$ 、应变  $\epsilon$  和位移  $u$  的关系, 由材料力学知识可得:

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \quad \sigma = E\epsilon = E \frac{du}{dx}$$

对于单元①, 因为  $u_A = 0$ , 所以

$$\sigma^{\text{①}} = E \frac{du}{dx} = E \frac{u_B - u_A}{l_1} = \frac{E}{l_1} u_B$$

将式 (1-15) 中的  $u_B$  代入上式, 得

$$\sigma^{\text{D}} = \frac{E}{l_1} \frac{F_B + F_C}{k_1} = \frac{E}{l_1} \frac{F_B + F_C}{\frac{EA_1}{l_1}} = \frac{F_B + F_C}{A_1} \quad (1-17)$$

对于单元②

$$\sigma^{\text{D}} = E \frac{u_C - u_B}{l_2} = \frac{E}{l_2} (u_C - u_B)$$

由式 (1-15) 得

$$u_C - u_B = \frac{1}{k_2} F_C$$

将  $(u_C - u_B)$  值代入  $\sigma^{\text{D}}$  的表达式, 得

$$\sigma^{\text{D}} = \frac{E}{l_2} \frac{F_C}{k_2} = \frac{E}{l_2} \frac{l_2 F_C}{EA_2} = \frac{F_C}{A_2} \quad (1-18)$$

实际上这一简单一维问题, 用材料力学方法很容易求解。这里采用有限元法的目的是想通过这一大家比较熟悉的示例, 使大家对有限元法分析的基本思想和方法, 有一个概貌的了解。

### § 1-3 有限元法的理论基础

有限元法是一种离散化的数值解法, 对于结构力学特性的分析而言, 它的理论基础是能量原理, 得到的方程组中所含未知数的性质有三种情况: 一种是以位移作为未知量的分析法, 这种情况称作位移法。位移解法采用最小位能原理或虚位移原理进行分析; 另一种是以应力作为未知量的分析法, 称作应力法。应力解法常采用最小余能原理进行分析; 第三种是以一部分位移和一部分应力作为未知量的分析法, 属于位移法、应力法, 称作混合法, 采用修正的能量原理进行分析。

因为位移法在过去的研究中, 尤其是在实际应用中, 均占有优势, 所以本书仅限于介绍位移法。

对于结构的传热分析而言, 得到的方程组中所含的未知数是温度, 则采用变分法或加权余数法进行分析。

通过上述介绍可知, 虚位移原理或最小位能原理、最小余能原理、变分原理是有限元法的又一重要基础理论。为了学好有限元法, 关于能量原理将在下面进行介绍, 变分原理将在第七章中加以介绍。

#### 一、虚位移原理

##### (一) 弹性体的位移和虚位移

##### 1. 位移

弹性体的位移是弹性体在给定的外载作用下, 实际产生的确定的位移或实位移, 简称位移。它满足变形协调条件和几何边界条件。对应于受载物体某一点就有一个位移。可见实位移是与外载相对应的一个确定的位移, 它是在一定时间间隔内产生的, 或者说它是由作用在弹性体上的外载唯一确定的。研究与某点距离  $dx$  一点的位移变化, 在数学上用微分

$dw$ 表示。

## 2. 虚位移

弹性体的虚位移是假设的、约束条件允许的、任意的、无限小的位移。它并未实际发生，只是说明产生位移的可能性。弹性体的虚位移必须满足变形协调条件和几何边界条件。这里所说的约束条件是指弹性体内部之间的联系以及弹性体与外界的联系。前者限制弹性体内部的变形状态，即保证弹性体内部的连续性；后者限制弹性体边界上一些质点的位移，即在结构边界上的几何条件。约束条件允许的是指必须满足变形协调条件和几何边界条件。

虚位移与实位移的区别在于：它是在约束条件允许的范围内弹性体可能发生的任意的微小的位移，它的发生与时间无关，与弹性体所受的外载无关。而弹性体在外载作用下产生的实位移是可能的虚位移，因为它也满足变形协调条件和几何边界条件。

### (二) 功与应变能

图1-6(a)所示为一根刚度系数为 $K$ 的弹簧，左端固定，右端作用一轴向拉力 $F$ ，弹簧在拉力 $F$ 作用下，右端B点发生了位移 $u_B$ ，拉力 $F$ 作了功。弹簧拉力 $F$ 在实位移 $u_B$ 上所

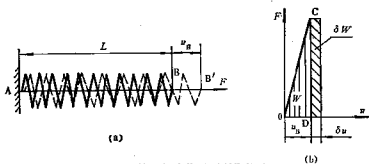


图 1-6 弹簧在拉力作用下所作的功

作的功称作外力的功或实功，简称功。此功就是图1-6(b)中三角形OCD的面积(线弹性变力作的功)：

$$W = \frac{1}{2} F u_B \quad (1-19)$$

在线弹性情况下，当 $F=0$ 时， $u_B=0$ ，拉力 $F$ 增加到一定值时， $u_B$ 也线性地增大到一定值。且在弹性范围内，有关系式：

$$F = K u_B$$

则式(1-19)可以改写成

$$W = \frac{1}{2} K u_B^2 \quad (1-20)$$

假设作用在弹性体上的外载有 $F_1, F_2, \dots, F_n$ ，它们从零开始增大到一定值时，弹性体变形也从零开始线性地增大到一定值，此时在外力作用点方向的位移分别为 $u_1, u_2, \dots, u_n$ ，则外力所作的功为

$$W = \frac{1}{2} (F_1 u_1 + F_2 u_2 + \dots + F_n u_n) \quad (1-21 a)$$

写成矩阵表达式时



$$W = \frac{1}{2} [f]^T [F]$$

式中:

外载列阵  $[F] = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$

位移列阵  $[f] = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

若不考虑变形过程中的热量损失、弹性体的动能及外界阻尼等, 则外力功将全部转变为贮存于弹性体内的位能——应变能。当外载去掉时, 贮存于弹性体内的位能或应变能将使弹性体恢复原状。因此图1-6(a)所示弹簧的应变能为

$$U = \frac{1}{2} K u_n^2 \quad (1-22)$$

如果把图1-7所示的微元体, 看成是一个长度为 $dx$ , 截面积为 $A=dy \times 1$  (设微元体的厚度为1) 的弹簧, 在拉力 $F$ 的作用下, 右端相对左面位移了 $\epsilon_x dx$ , 此过程所作的功为

$$dW = \frac{1}{2} F \epsilon_x dx$$

由于  $F = \sigma_x A = \sigma_x dy \times 1$

则  $dW = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy \times 1 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy \quad (1-23 a)$

贮存在微元体内的应变能 $dU$ 为:

$$dU = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy \quad (1-23 b)$$

如果用 $\bar{U}$ 表示单位体积内的应变能, 即

$$\bar{U} = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x \quad (1-24 a)$$

则结构的总应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iint \sigma_x \epsilon_x dx dy = \iint \bar{U} dx dy \quad (1-24 b)$$

在应力-应变曲线上, 式(1-24 a)的 $\bar{U}$ 就是图1-8画垂线部分的面积。

如果微元体上(图1-7)不仅有 $\sigma_x$ , 还有 $\sigma_y$ 和 $\tau_{xy}$ 作用, 根据力的独立作用原理, 得外力功贮存在微元体内的应变能为

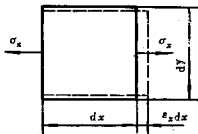


图 1-7 微元体

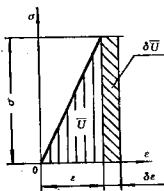


图 1-8 单位体积的应变能和虚应变能

$$\begin{aligned}
 dU &= \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dx dy + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y dx dy + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy
 \end{aligned} \quad (1-25)$$

令 
$$\bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) \quad (1-26 a)$$

写成矩阵形式, 得

$$\bar{U} = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma] \quad (1-26 b)$$

式中  $\bar{U}$  是单位体积内的应变能。

弹性体的总应变能为

$$U = \frac{1}{2} \iint \bar{U} dx dy = \frac{1}{2} \iint [\varepsilon]^T [\sigma] dx dy \quad (1-27)$$

对于一般弹性体来讲, 单位体积的应变能为

$$\bar{U} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

写成矩阵形式为

$$\bar{U} = \frac{1}{2} [\varepsilon]^T [\sigma]$$

一般弹性体的总应变能为

$$U = \frac{1}{2} \int_V \bar{U} dV = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon]^T [\sigma] dV \quad (1-28)$$

式中  $dV$  为微元体的体积。

### (三) 外力虚功与虚应变能

弹性体在平衡状态下发生虚位移时, 不仅在外载的作用点上发生虚位移  $(\delta f)$ , 而在虚位移的过程中, 弹性体内部将产生虚应变  $(\delta \varepsilon)$ , 则外载在虚位移上所作的功称为虚功, 用  $\delta W$  表示, 得

$$\delta W = (\delta f)^T [F] \quad (1-29)$$

应力在虚应变上所作的虚功, 是贮存在弹性体内的虚应变能, 用  $\delta U$  表示, 因此可得

$$\delta U = \int_V [\delta \varepsilon]^T [\sigma] dV \quad (1-30)$$

由于在平衡状态下发生虚位移时, 外载已作用于弹性体, 而且在虚位移过程中, 外载和应力均保持不变, 是恒力所作的功, 因此, 在式 (1-29) 和 (1-30) 中均不带有  $\frac{1}{2}$  因子。在单轴情况下, 图 1-6(b) 右边画斜线的矩形面积表示虚功; 图 1-8 中右边画斜线的矩形面积表示单位体积的虚应变能

$$\delta \bar{U} = [\delta \varepsilon]^T [\sigma]$$

### (四) 弹性体的虚位移原理

虚位移原理亦称虚功原理, 是最基本的能量原理, 它用功的概念来阐述弹性体或结构的平衡条件。

由虚功和虚位移的概念，虚位移原理叙述为：如果在虚位移发生之前，弹性体处于平衡状态，那么在虚位移发生时，外力在虚位移上所作的虚功就等于弹性体的虚应变能——应力在虚应变上所作的虚功，即

$$\delta W = \delta U \quad (1-31)$$

或 
$$[\delta f]^T [F] = \int_V [\delta \epsilon]^T [c] dV \quad (1-32)$$

式(1-32)就是用于弹性体分析时的虚位移原理的一般表达式。应用时必须指出的是：对于虚位移原理，在虚位移过程中，原有的外力、应力、温度及速度均保持不变，也就是说，没有热能或动能的改变。这样，按照能量守恒原理，虚应变能的增加应当等于外力位能的减小，也就是等于外力所作的虚功。

外力包括集中力、体积力和表面力，对于平面弹性体而言，上述外力的虚功为：

$$\delta W = [\delta f]^T [R] + \int_V [\delta f]^T [g] dV + \int_S [\delta f]^T [q] dS \quad (1-33)$$

式中： $[\delta f] = [\delta u \ \delta v]^T$ ；第一项为集中力虚功或位能；第二项为体积力虚功或位能；第三项为表面力虚功或位能。

## 二、最小位能原理

最小位能原理亦称最小势能原理，它是虚位移原理的另一种形式。根据虚位移原理，则有

$$\delta U - \delta W = \delta U + (-\delta W) = 0 \quad (1-34)$$

由于虚位移是微小的，在虚位移过程中，外力的大小和方向可以看成常量，只是作用点有了改变，这样，就可以把式(1-34)中的变分记号 $\delta$ 提到括号外面，即

$$\delta(U - W) = 0 \quad (1-35)$$

令 
$$\Pi = U - W \quad (1-36)$$

则 
$$\delta \Pi = 0 \quad (1-37)$$

$\Pi$ 称为弹性体的总位能，它就等于弹性体的应变能 $U$ 与外力位能 $W$ 的代数和。由于弹性体的总位能的变化是虚位移或位移的变分引起的，那么，给出不同的位移函数，就可以求出对应于该位移函数的总位能，而使总位能最小的那个位移函数，接近于真实的位移解。从数学观点来说， $\delta \Pi = 0$ ，表示总位能对位移函数的一次变分等于零。因为总位能是位移函数的函数，称作泛函，而 $\delta \Pi = 0$ 就是对泛函求极值。如果考虑二阶变分，就可以证明：对于稳定平衡状态，这个极值是极小值。这就是最小或极小位能原理。

根据上述分析，最小位能原理可以叙述为：弹性体在给定的外力作用下，在满足变形协调条件和位移边界条件的所有各组位移解中，实际存在的一组位移使总位能成为最小值。这样，可以利用最小位能原理求得弹性体的位移。知道了位移，进一步可以求得应力，以分析弹性体的强度。

## 三、最小余能原理

上面介绍的虚位移原理和最小位能原理，都是以位移分量作为未知函数，所得到的解是位移解。这样求得的位移比较精确。然后由位移求应力。而在工程中最感兴趣的还是应

力。所以以应力作为未知函数来求解很有必要，这时就需要利用最小余能原理。

### (一) 余功和余虚功

对于简单拉伸曲线，左边画横线图形部分的面积，定义为余功，记为  $W_c$ 。它可以看作矩形面积OABC内的余面积，如图1-9所示。显然，对于线弹性问题而言， $W_c=W$ 。

若是位移不变，处于平衡状态的外力  $F$  有微小变动  $\delta F$  时，称  $\delta F$  为虚力，虚力在平衡状态的位移 ( $u$ ) 上所作的功，称为余虚功，用  $\delta W_c$  表示。如图1-9中左上方画垂线的矩形面积所表示的。

假设弹性体在体积力和表面力作用下处于平衡状态，这时弹性体的位移为  $[f]$ ，如果虚体积力为  $[\delta g]$ ，虚表面力为  $[\delta q]$ ，则余虚功为

$$\delta W_c = \int_V [f]^T [\delta g] dV + \int_S [f]^T [\delta q] dS \quad (1-38)$$

### (二) 余应变能和余虚应变能

在应力-应变曲线中，左边横线所示的面积，表示单位体积的余应变能  $\bar{U}_c$ ，见图1-10。

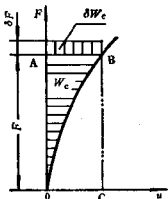


图 1-9 余功和余虚功

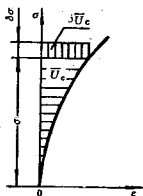


图 1-10 单位体积余应变能和余虚应变能

在线弹性情况下， $\bar{U}_c$  的表达式为

$$U_c = \frac{1}{2} [\epsilon]^T [\sigma]$$

将上式中的应变用应力来表示，并令对称矩阵

$$[d] = [d]^T = [D]^{-1}$$

则得

$$\bar{U}_c = \frac{1}{2} [\sigma]^T [d] [\sigma] \quad (1-39)$$

将式 (1-39) 进行体积分，得弹性体的余应变能为

$$U_c = \int_V \frac{1}{2} [\sigma]^T [d] [\sigma] dV \quad (1-40)$$

在平衡状态下保持应变  $[\epsilon]$  不改变，当弹性体内发生虚应力  $[\delta \sigma]$  时，则虚应力在应变上所作的功，称为余虚应变能，其表达式为

$$\delta U_c = \int_V [\epsilon]^T [\delta \sigma] dV \quad (1-41)$$



单位体积的余虚应变能, 用 $\delta\bar{U}_e$ 表示, 如图1-10左上方用垂线表示的矩形面积, 其表达式为

$$\delta\bar{U}_e = [\epsilon]^T [\delta\sigma] \quad (1-42)$$

则式(1-41)也可以写成为

$$\delta U_e = \int_V \delta\bar{U}_e dV \quad (1-43)$$

### (三) 最小余能原理

如果在弹性体的一部分边界 $S_0$ 上给定了位移 $[f]$ , 设作用在 $S_0$ 上的边界面力为 $[q]$ , 则面力的余位能为

$$W_e = \int_S [f]^T [q] dS$$

弹性体的余能定义为弹性体的余应变能与给定位移边界 $S_0$ 上边界面力余位能之差, 即

$$\Pi_e = U_e - W_e \quad (1-44 a)$$

余应变能为

$$U_e = \int_V \frac{1}{2} [\sigma]^T [d] [\sigma] dV$$

则

$$\Pi_e = \int_V \frac{1}{2} [\sigma]^T [d] [\sigma] dV - \int_S [f]^T [q] dS \quad (1-44 b)$$

最小余能原理可叙述如下: 在弹性体内部满足平衡条件并在边界上满足静力边界条件的应力分量中, 只有同时在弹性体内部满足应力-应变关系并在边界上满足边界位移条件的应力分量, 才能使弹性体的总余能取极值, 且可以证明, 若弹性体处于稳定平衡状态, 总余能为极小值, 即

$$\delta \Pi_e = \delta U_e - \delta W_e = 0 \quad (1-45)$$

弹性力学的变分原理, 主要包括虚位移原理、最小位能原理和最小余能原理。它们是有限元法的理论基础。

最小位能原理与虚位移原理的本质是一样的。它们都是在实际平衡状态的位移发生虚位移时, 能量守恒原理的具体应用, 只是表达方式有所不同而已。可根据不同的需要, 采用其中一种。

最小余能原理与最小位能原理的基本区别在于: 最小位能原理对应于弹性体或结构的平衡条件, 以位移为变化量; 而最小余能原理对应于弹性体的变形协调条件, 以力为变化量。