部 定 大 學 用 書

工 程 數 學

（上 册）

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版

正 中 書 局 印 行

中華民國六十一年十月臺初版
中華民國六十五年九月臺四版

部定大學用書　工程數學　全二册

上册　基本定價　精八元五角　平七元

（外埠酌加運費滙費）

主編者	國立編譯館大學用書編審委員會
編著者	朱越生
出版者	國立編譯館
發行人	黎元譽
發行印刷	正中書局 （臺灣臺北市衡陽路二十號）
海外總經銷	集成圖書公司 （香港九龍油蔴地北海街七號） 海風書店 （日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番點） 東海書店 （日本京都市左京區田中門前町九八番地）

新聞局出版事業登記證　局版臺業字第〇一九九號（6651）泰
（1000）

部定大學用書

工程數學

（下册）

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱越生編著

國立編譯館出版

正中書局印行

工 程 數 學

（上 冊）

章 次 內 容 頁次

第一章

概論，基本項目之複習及其他

工 程 數 學

章 次 內 容 頁次

下册

第 九 章

向 量 分 析

目次	內　容	頁 次

第十章 矩　　陣

第十一章

複變數函數

目次	內容	頁次

第 十 二 章

偏微分方程

第一章　概論，基本項目之複習及其他

學習「工程數學」，目的在利用數學之分析及計算，而求出工程問題或實際問題所需之量，並藉此對該問題之性質及現象，作明確且深入之瞭解。因此自實用之觀點而言，數學並非純為抽象之科學，而為確切且有效之工具以供吾人研究一切實際現象時所使用。再吾人若對數學作深入且廣泛之學習，則可打定根基、充實經驗、非但有助於實際問題之分析與計算；瞭解其性質及現象；且可誘導靈感、觸類旁通、而進入前人未抵達之領域。

現代工程師之從事實際工程工作者，常發現其日常工作中，直接利用以往所受數學訓練之部分甚為微少；但此並不意指其餘部分毫無用途或無價值，蓋數學訓練無形中已培養吾人思考、分析、判斷、歸納之能力；且可激發吾人之潛力，創造或發展解決問題之新方法也。

本章除說明工程或實際問題之一般數學處理之手續外，且對以往學習數學時之重要項目，作重點之複習，並對數值計算作初步之簡介，以備今後之應用。

1-1　工程或實際問題之一般性數學處理手續

一個實際問題，用數學方法處理，自開始以至結束，其經過之歷程，甚為複雜微妙，並非用片言兩語而可作原則性之說明者。

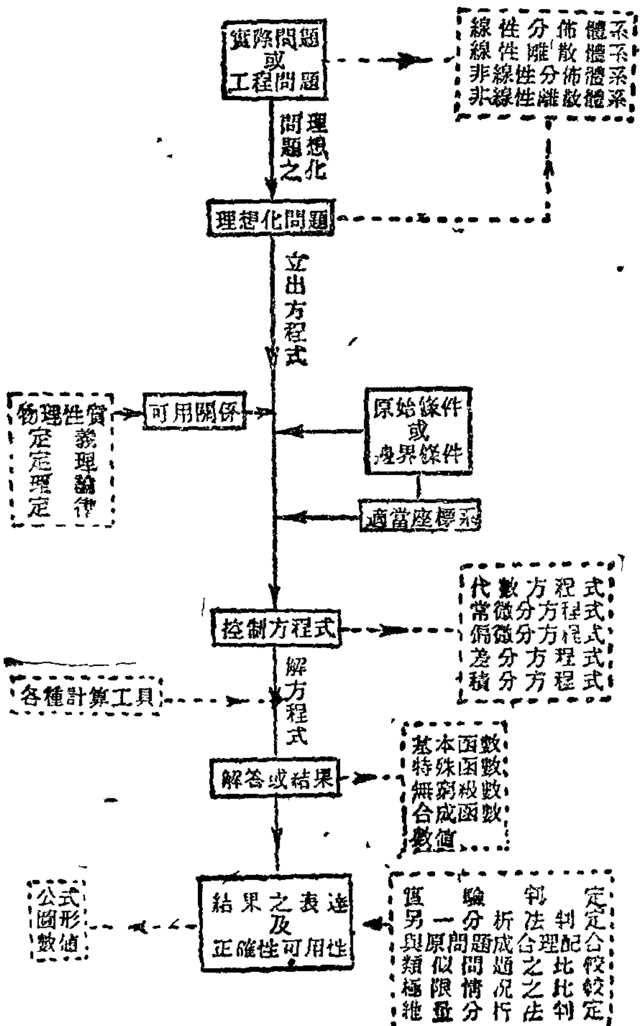
實際問題到達研究者手中，其原始形態常為資料不足、輪廓模糊之勢態，故得先行確定該問題之性質及所需之結果，並博覽有關典籍以發掘是否有類似之問題存在。否則主體未定或重覆、或目的未定、即行著手研究，其結果之有價值者幾希。實際問題可分為**線性分佈體系**(Linear distributed systems)、**線性離散體系** (Linear lumped systems)、**非線性分佈體系**及**非線性離散體系**等等，因其處理方式有異，故在開始時即應予以區分，以免徒勞無功也。

問題之性質確定以後，即着手將實際問題化成數學語言以便數學處理，在此階段應採用足够之資料作爲變數以供使用。若原始資料不足，則須假定合理之資料以作補充。常有種種場合，資料並非不足而係資料太多；若將全部資料納入，則問題成爲過度複雜之型式，不適宜於數學處理之用；因此研究人員得在原始資料中定其取捨，捨其無關大要之資料，取其重要部分，而形成適宜於數學處理之問題，此項手續常稱爲**問題之理想化**。上述之兩步手續有時成爲研究實際問題時最困難之部分，因其雖有原則性之說明，但乏確切之步驟以資遵循，恒由研究人員之根基，經驗及天份所決定也。

問題既經理想化，下一步驟即爲立出數學方程式，常需利用各項資料之原始定義、物理性質、定理、理論以及各種自然律、或幾何性質以決定各個變數間之關係；並利用已知之原始條件或邊界條件，選定使用之座標系，以立出該問題之**控制方程式**。此類立出之控制方程式，可爲**代數方程式**、**常微分方程式**、**偏微分方程式**、**積分方程式**、**差分方程式**及**混合方程式**等等。而工程數學一科中主要研究之項目即在討論利用種種之方法，以求此類方程式之通解或特解，其中恒有完整之理論以作依據，確切之步驟以資遵循。故若能勤加學習，並有足够時間作多方之獵涉，當可求得所研究問題之答案。

用數學方法分析而求得之解，經常將變數間之關係，寫成函數或關係式，最簡單之函數即吾人所熟悉之「基本函數」，包含多項式、指數、對數、三角、雙曲線函數等；亦有由定積分所定義，微分方程所定義之函數，以及無窮級數，合成函數之解及數値解答等等。故對如此衆多之函數，其性質必須分別予以判析，始能對所求得之解，有確切眞實之感。

最後卽進入將求得之結果予以適當之表達及瞭解其含義之階段。一方面可將研究之結果作自我之宣揚，另一方面對該問題之性質及現象，配合所得之解是否合理，應予以批判及作成結論。所得結果之表達方式，一般常用**公式，圖形，數値表**等所表示。爲使工程上應用方便計，常有將研究結果繪成圖形，可使變化之趨勢一目了然，又若該項結果具通用之價值者，且其公式甚爲複雜時，此種用**圖形**以表達結果之方式，雖其精確性有限，但甚合實用，且頗爲一般工程工作人員所樂用也。



研究實際問題時，自分析開始至分析結尾之漫長歷程中，難保無微小之差錯而影響其解答之正確性，故除詳細覆核分析之過程外；一般常採用，實驗方式、與原問題成合理配合、用另一分析法、與已知結果之類似問題相比較、用維量分析、或用極限情況分析等等方法以判別結果之正確性及可用性。

茲將上述討論，用表解之方式，附列於前，以供參考。

1-2 近似計算之準確度

利用工程數學以求解實際或工程問題時，所得之結果經常並非絕對正確，亦不可能絕對正確，即恒具某種程度之誤差在內，該項誤差之來源可分成下列數種：

① 將實際問題化成理想化之問題以使適合數學方法之處理，因而產生誤差。

② 所引用之物理現象，理論，定律本身並非絕對正確者，因而產生誤差。

③ 所求得之公式，因計算數值時遭遇困難而採用**截尾** (Truncation) 方法而求出其數値者，因而產生誤差。

④ 度量或觀察所產生之誤差。

⑤ **捨位**(Round-off)而引起之誤差。

⑥ 計算錯誤而得之誤差。

除最後一項因錯誤而產生之誤差，可由小心之覆核而獲消除者外；由於其他原由而產生之誤差，則無法避免。只能在可能範圍內減少至某種程度。何況所謂絕對正確之答案，其本身恒爲未知之數也。因此任何工程問題中凡包含數値之計算者，多少具有某種近似之性質在內，蓋自開始時之各項數據起，及其分析中逐步所採取之步驟中，經常含有近似之性質在內。本節主要之目的，首在研究因**捨位**而引起之誤差，並包括

近似計算中誤差之衡量及其準確度估計等等。至於關於誤差之深入理論部分當於以後再行論及之。

(A)近似數(Approximate numbers)及有效數字(Significant figure)

吾人常用之數中,只有一小部分可稱爲**正確數**(Exact numbers)如自然數及有理數屬之,又如無理數 $\sqrt{2}$, π, e等亦爲**正確數**,但不能用有限之小數表示,只能寫出其近似之小數,如 3.1416、1.4142、2.7183等等。此種寫出之形式並非原正確數,只爲原正確數之近似値而已,常稱爲**近似數** (Approximate numbers),而在實用問題中,所欲求之**正確數**的確値常不易求得,惟有用**近似數**以表示爲與**正確數**相差甚爲微小之數。此種近似數之觀念,實際上包括兩個數,一個稱爲**基數**如 (N),另一個爲附屬之微小正數如(E_a),再用N與 E_a以定義正確數如($\overline{N}$)之誤差界値,三者相互之關係如下:

$$\boxed{N-E_a \leqq \overline{N} \leqq N+E_a} \qquad (1)$$

而所謂**近似數**通常即以下列形式表示

$$\boxed{N(\pm E_a)} \qquad (2)$$

例如1.724($\pm$0.0135)即表示某一**正確數之近似數**,而正確數介乎1.7105與 1.7375之間。

上述近似數中所附屬之微小正數如 E_a 者,稱爲**一數一量**,或**一計算之絕對誤差** (Absolute error)。此種寫法,以該誤差之範圍甚屬重要時始予引用。一般而論,實際計算中,對**絕對誤差**之正確估計,並非絕對必須,且一連串之計算中,欲嚴格將絕對誤差包含在內予以運算,事實上亦不可能,因此實用上常將**近似數**縮寫成一個數,並規定其縮寫之法則俾使其精確度憑此而可判定。此即**有效數字** (Significant figures) 觀念介入之由來。

現規定縮寫一個近似數時,所寫出之每位數字,除用以定小數點位置之 0 以外,每一位數字 0, 1, 2, 3, ……9 均具確定之意義,而最後之一位數至多只有半單位之出入。如此而寫出之數,即稱爲**有效數字**。茲將有效數字之寫法及其含義說明如下:

0.00263	共有**有效數字** 2, 6, 3。係代表**近似數** 0.00263 (±.000005)。故稱該數正確至三位有效數字。
3809	共有**有效數字** 3, 8, 0, 9。係代表**近似數** 3809(±0.5)。正確至四位有效數字。
46300	共有有效數字 4, 6, 3, 0, 0。係代表近似數 46300 (±0.5)。正確至五位有效數字。
4630×10^1	共有有效數字 4, 6, 3, 0, 係代表近似數 46300(±5)。正確至四位有效數字。
4.63×10^4	共有有效數字 4, 6, 3, 係代表近似數 46300(±50)。正確至三位有效數字。

利用**有效數字**之觀念,訂定寫出之法則,且可憑此而判定其準確度,誠屬方便之至。但有時並不能嚴格實施此種辦法而縮寫近似數。例如有一已知之近似數如前所述者 1.724(±0.0135),表示其正確值介乎 1.7105 與 1.7375之間。若縮寫成1.724,則代表1.724(±.0005),故$1.7235<\overline{N}<1.7245$。若寫成1.72,則代表1.72(±.005),故$1.715<\overline{N}<1.725$。若寫成 1.7,則代表1.7(±0.05)。故$1.65<\overline{N}<1.75$。

上述三種寫法,並無一種實足表示原有誤差之範圍,唯有第三種寫法,始將原有誤差之區間包括在內,但因將誤差之區間作人爲之放大,反將原「正確數」之不定界限增加過度,失却縮寫該近似數之原意,且只有兩位有效數字,將影響今後連續計算之精密度,因此通常採用中庸之道,而將該近似數縮寫成三位有效數字之數如 1.72,雖然犧牲誤差限值之精確意義,但有較多之有效數字可供今後之運算也。

設有正確數 27 及 13.1，相除而得無窮小數

$$27/13.1=2.061068702\cdots\cdots$$

爲使該數在今後計算中具實用價値，經常用四捨五入之**捨位**法而寫成近似數如，

$$2.06,\ 2.061\text{ 或 }2.06107\text{ 等等。}$$

因**捨位**而產生之誤差，恒在前述有效數字所規定之誤差極限之內，因此成爲近似數。如寫成：

2.06　則正確至小數二位，正確至三位有效數字。

2.061　則正確至小數三位，正確至四位有效數字。

2.06107　則正確至小數五位，正確至六位有效數字。

(B) 絕對誤差，相對誤差 (Relative errors) 及百分誤差 (Percentage errors)

設一**正確數**爲$\overline{N}$，其**近似數**用其**基數** N 表示，則二者相差之數，稱爲該近似數之**實際誤差** E。有下列關係

$$\boxed{\overline{N}-N=E}\text{ 或 }\boxed{\overline{N}=N+E}\qquad(1)$$

此項實際誤差可爲正數或負數，且恒爲不能確定之數。但有時可決定該實際誤差之界值 E_a，即上述近似數 N 之**絕對誤差** E 與 E_a 有下列關係

$$\boxed{|E|\leq E_a}\qquad(2)$$

因此原正確數$\overline{N}$ 介乎 $N-E_a$ 及 $N+E_a$ 之間，此即(A)節中所引用之

$$\boxed{N-E_a\leq\overline{N}\leq N+E_a}\qquad(3)$$

如有近似數 4.629，係正確至三位小數，且具四位有效數字者，其絕對誤差 $E_a=0.0005$，故其所代表之正確數 $\overline{N}$ 爲