

部 定 大 學 用 書  
工 程 數 學  
(上 冊)

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版  
正 中 書 局 印 行



版權所有

翻印必究

中華民國六十一年十月臺初版  
中華民國六十五年九月臺四版

部定 大學用書 工程數學 全二冊

上册 基本定價  $\frac{8.5}{7}$  元

(外埠酌加運費滙費)

主編者 國立編譯館大學用書編審委員會  
編著者 朱 越 生  
出版者 國 立 編 譯 館  
發行人 黎 元 譽  
發行印刷 正 中 書 局  
(臺灣臺北市衡陽路二十號)  
海外總經銷 集 成 圖 書 公 司  
(香港九龍油麻地北海街七號)  
海 風 書 店  
(日本東京都千代田區神田神保町一丁目五六番點)  
東 海 書 店  
(日本京都市左京區田中門前町九八番地)

新聞局出版事業登記證 局版臺業字第〇一九九號(6651)泰  
(1000)

部·定·大·學·用·書  
工·程·數·學

(下 册)

國立編譯館部定大學用書編審委員會主編

朱 越 生 編 著

國 立 編 譯 館 出 版  
正 中 書 局 印 行

# 工 程 數 學

(上 冊)

章 次	內 容	頁次
序言		
第 一 章	概論，基本項目之複習及其他 ……	1
第 二 章	無窮級數與冪級數 ……………	151
第 三 章	由定積分所定義之特殊函數 ……	211
第 四 章	常微分方程總論及一階常微分 方程 ……………	275
第 五 章	高階線性常微分方程，聯立常微 分方程及全微分方程……………	409
第 六 章	Fourier(福里哀)氏級數，積分式 及變換式 ……………	579
第 七 章	常微分方程之冪級數解法及數 種特殊函數……………	651
第 八 章	Laplace (拉伯拉斯)氏變換及其 在常微分方程中之運用 ……………	811

# 第一章

## 概論，基本項目之複習及其他

目次	內 容	頁次
1•1	工程或實際問題之一般性數學處理手續	1
1•2	近似計算之準確度	4
1•3	觀察或度量之誤差及精密度	21
1•4	經驗公式	47
1•5	插值法	64
1•6	數值積分法	78
1•7	多變數函數之微分	94
1•8	複數及複變數	131

# 工 程 數 學

章 次	內 容	頁 次	
下冊			
第 九 章	向量分析 .....	903	
第 十 章	矩陣 .....	1149	
第 十 一 章	複變數函數 .....	1359	
第 十 二 章	偏微分方程 .....	1639	
附錄：英漢名詞對照表 .....			1905
中譯姓氏錄 .....			1925
參考書目 .....			1927

# 第九章

## 向量分析

目次	內 容	頁 次
9.1	基本觀念，有關定義以及向量之基本性質與代數運算。.....	903
9.2	向量之點積，叉積及其應用。.....	928
9.3	向量~點函數之微分，積分，線性常微分方程以及曲線之稟性。.....	958
9.4	向量在力學中之數項應用。.....	979
9.5	向量偏微分運算子 $\nabla$ 及其運用。.....	1006
9.6	曲線座標系中之向量分析及正交曲線座標系。.....	1031
9.7	向量函數之線積分，平面內之面積分及(格林) Green 氏平面定理。.....	1071
9.8	向量函數在空間內之面積分，體積分及其有關定理。.....	1099
9.9	應用示範。.....	1122

# 第十章 矩 陣

目次	內 容	次 頁
10 · 1	基本定義及記法. ....	1149
10 · 2	矩陣元素之重組. ....	1156
10 · 3	矩陣之加法及乘法. ....	1166
10 · 4	線性變換或線性方程之矩陣表示法. ....	1182
10 · 5	方陣之乘法反元素, 逆方陣及可逆方陣. ....	1187
10 · 6	行列式 ....	1194
10 · 7	矩陣之分割. ....	1216
10 · 8	特殊矩陣. ....	1228
10 · 9	矩陣在線性方程組中之應用. ....	1239
10 · 10	線性相關性質之應用. ....	1256
10 · 11	矩陣變換及相似變換. ....	1266
10 · 12	實數及複數域內之行向量 (行矩陣). ....	1279
10 · 13	雙線式, 二次式, Hermite (厄密特) 氏式. 及 反號 Hermite 氏式. ....	1294
10 · 14	矩陣之特徵方程. ....	1308
10 · 15	矩陣之微分, 積分, 以及微分方程. ....	1337
10 · 16	張量之初步簡介及張量之矩陣表示法. ....	1346



# 第十一章

## 複變數函數

目次	內 容	頁 次
11 · 1	複變數函數之初步說明	1359
11 · 2	複變數函數之微分及解析函數	1380
11 · 3	複函數之積分與 Cauchy 氏定理及其推論	1415
11 · 4	Cauchy 氏積分公式及有關定理	1437
11 · 5	複數之序列，無窮級數及幕級數之主要性質	1460
11 · 6	Taylor 氏級數及 Laurent 氏級數	1475
11 · 7	殘數定理及其應用	1500
11 · 8	用複函數之圍線積分求實函數之定積分	1517
11 · 9	保形映像及數種基本映像	1541
11 · 10	基本函數及特殊函數之映像	1566
11 · 11	二維穩態之流體流動	1594
11 · 12	二維靜電場及二維熱流問題之分析	1619

# 第十二章

## 偏微分方程

目次	內 容	頁 次
12. 1	偏微分方程概說。.....	1639
12. 2	一階線性偏微分方程通解之 Lagrange 氏求法及其他。.....	1650
12. 3	三變數一階偏微分方程之全解及 Charpit 氏求法。.....	1669
12. 4	一階偏微分方程全解之 Jacobi 氏求法以及特解之求法。.....	1688
12. 5	三變數，常係數之高階線性偏微分方程。.....	1704
12. 6	三變數，變係數之二階偏微分方程。.....	1723
12. 7	二階半線性偏微分方程之 Monge 氏解法。.....	1739
12. 8	偏微分方程之立出以及數學物理中之主要通式。.....	1753
12. 9	一維波動方程式之特解。.....	1768
12. 10	變數分離解法及其初步討論。.....	1788
12. 11	Laplace 方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1802
12. 12	擴散方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1821
12. 13	波動方程式之乘積解及邊界值問題。.....	1842
12. 14	積分變換以及求解偏微分方程時之運用。.....	1863
12. 15	積分變換解偏微分方程之範例。.....	1868

# 第一章 概論，基本項目之複習及其他

學習「工程數學」，目的在利用數學之分析及計算，而求出工程問題或實際問題所需之量，並藉此對該問題之性質及現象，作明確且深入之瞭解。因此自實用之觀點而言，數學並非純為抽象之科學，而為確切且有效之工具以供吾人研究一切實際現象時所使用。再吾人若對數學作深入且廣泛之學習，則可打定根基、充實經驗、非但有助於實際問題之分析與計算；瞭解其性質及現象；且可誘導靈感、觸類旁通、而進入前人未抵達之領域。

現代工程師之從事實際工程工作者，常發現其日常工作中，直接利用以往所受數學訓練之部分甚為微少；但此並不意指其餘部分毫無用途或無價值，蓋數學訓練無形中已培養吾人思考、分析、判斷、歸納之能力；且可激發吾人之潛力，創造或發展解決問題之新方法也。

本章除說明工程或實際問題之一般數學處理之手續外，且對以往學習數學時之重要項目，作重點之複習，並對數值計算作初步之簡介，以備今後之應用。

## 1-1 工程或實際問題之一般性數學處理手續

一個實際問題，用數學方法處理，自開始以至結束，其經過之歷程，甚為複雜微妙，並非用片言兩語而可作原則性之說明者。

實際問題到達研究者手中，其原始形態常為資料不足、輪廓模糊之勢態，故得先行確定該問題之性質及所需之結果，並博覽有關典籍以發掘是否有類似之問題存在。否則主體未定或重覆、或目的未定、即行著手研究，其結果之有價值者幾希。實際問題可分為線性分佈體系(Linear

## 2 工程數學(上冊)

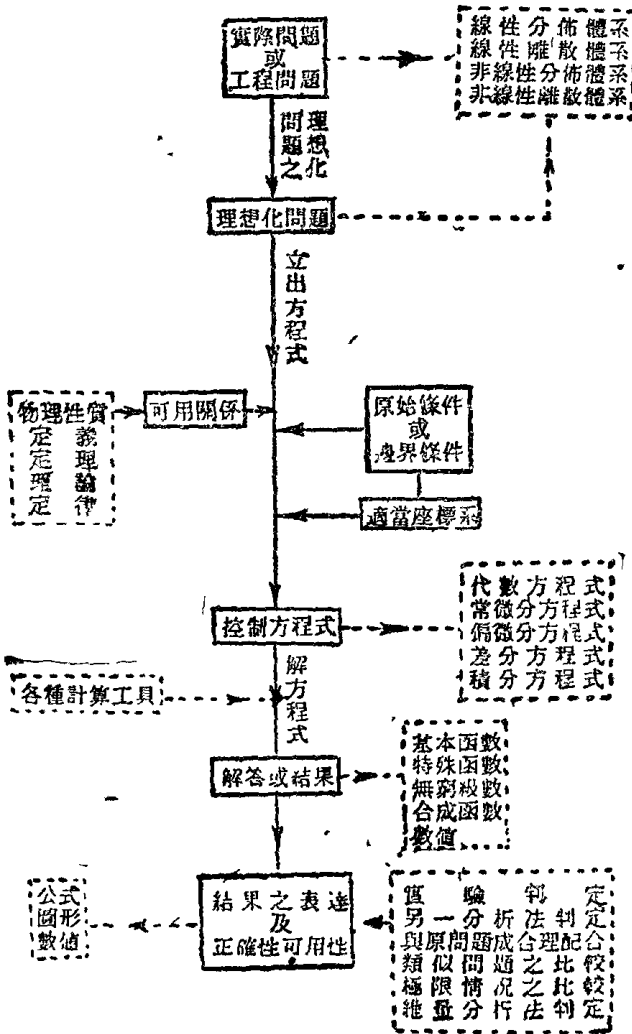
distributed systems)、線性離散體系 (Linear lumped systems)、非線性分佈體系及非線性離散體系等等，因其處理方式有異，故在開始時即應予以區分，以免徒勞無功也。

問題之性質確定以後，即着手將實際問題化成數學語言以便數學處理，在此階段應採用足夠之資料作為變數以供使用。若原始資料不足，則須假定合理之資料以作補充。常有種種場合，資料並非不足而係資料太多；若將全部資料納入，則問題成為過度複雜之型式，不適宜於數學處理之用；因此研究人員得在原始資料中定其取捨，捨其無關大要之資料，取其重要部分，而形成適宜於數學處理之問題，此項手續常稱為問題之理想化。上述之兩步手續有時成為研究實際問題時最困難之部分，因其雖有原則性之說明，但乏確切之步驟以資遵循，恒由研究人員之根基，經驗及天份所決定也。

問題既經理想化，下一步驟即為立出數學方程式，常需利用各項資料之原始定義、物理性質、定理、理論以及各種自然律，或幾何性質以決定各個變數間之關係；並利用已知之原始條件或邊界條件，選定使用之座標系，以立出該問題之控制方程式。此類立出之控制方程式，可為代數方程式、常微分方程式、偏微分方程式、積分方程式、差分方程式及混合方程式等等。而工程數學一科中主要研究之項目即在討論利用種種之方法，以求此類方程式之通解或特解，其中恒有完整之理論以作依據，確切之步驟以資遵循。故若能勤加學習，並有足夠時間作多方之獵涉，當可求得所研究問題之答案。

用數學方法分析而求得之解，經常將變數間之關係，寫成函數或關係式，最簡單之函數即吾人所熟悉之「基本函數」，包含多項式、指數、對數、三角、雙曲線函數等；亦有由定積分所定義，微分方程所定義之函數，以及無窮級數，合成函數之解及數值解答等等。故對如此眾多之函數，其性質必須分別予以判析，始能對所求得之解，有確切真實之感。

最後即進入將求得之結果予以適當之表達及瞭解其含義之階段。一方面可將研究之結果作自我之宣揚, 另一方面對該問題之性質及現象, 配合所得之解是否合理, 應予以批判及作成結論。所得結果之表達方式, 一般常用公式, 圖形, 數值表等所表示。為使工程上應用方便計, 常有將研究結果繪成圖形, 可使變化之趨勢一目了然, 又若該項結果具通用之價值者, 且其公式甚為複雜時, 此種用圖形以表達結果之方式, 雖其精確性有限, 但甚合實用, 且頗為一般工程工作人員所樂用也。



研究實際問題時，自分析開始至分析結尾之漫長歷程中，難保無微小之差錯而影響其解答之正確性，故除詳細覆核分析之過程外；一般常採用，實驗方式，與原問題成合理配合，用另一分析法，與已知結果之類似問題相比較，用維量分析，或用極限情況分析等等方法以判別結果之正確性及可用性。

茲將上述討論，用表解之方式，附列於前，以供參考。

## 1-2 近似計算之準確度

利用工程數學以求解實際或工程問題時，所得之結果經常並非絕對正確，亦不可能絕對正確，即恒具某種程度之誤差在內，該項誤差之來源可分成下列數種：

- ① 將實際問題化成理想化之問題以使適合數學方法之處理，因而產生誤差。
- ② 所引用之物理現象，理論，定律本身並非絕對正確者，因而產生誤差。
- ③ 所求得之公式，因計算數值時遭遇困難而採用截尾 (Truncation) 方法而求出其數值者，因而產生誤差。
- ④ 度量或觀察所產生之誤差。
- ⑤ 捨位 (Round-off) 而引起之誤差。
- ⑥ 計算錯誤而得之誤差。

除最後一項因錯誤而產生之誤差，可由小心之覆核而獲消除者外；由於其他原由而產生之誤差，則無法避免。只能在可能範圍內減少至某種程度。何況所謂絕對正確之答案，其本身恒為未知之數也。因此任何工程問題中凡包含數值之計算者，多少具有某種近似之性質在內，蓋自開始時之各項數據起，及其分析中逐步所採取之步驟中，經常含有近似之性質在內，本節主要之目的，首在研究因捨位而引起之誤差，並包括

近似計算中誤差之衡量及其準確度估計等等。至於關於誤差之深入理論部分當於以後再行論及之。

#### (A) 近似數 (Approximate numbers) 及有效數字 (Significant figure)

吾人常用之數中,只有一小部分可稱為**正確數** (Exact numbers) 如自然數及有理數屬之,又如無理數  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$ ,  $e$  等亦為**正確數**,但不能用有限之小數表示,只能寫出其近似之小數,如 3.1416、1.4142、2.7183 等等。此種寫出之形式並非原**正確數**,只為原**正確數**之近似值而已,常稱為**近似數** (Approximate numbers),而在實用問題中,所欲求之**正確數**的確值常不易求得,惟有用**近似數**以表示為與**正確數**相差甚為微小之數。此種**近似數**之觀念,實際上包括兩個數,一個稱為**基數**如 ( $N$ ),另一個為附屬之微小正數如 ( $E_a$ ),再用  $N$  與  $E_a$  以定義**正確數**如 ( $\bar{N}$ ) 之誤差界值,三者相互之關係如下:

$$\boxed{N - E_a \leq \bar{N} \leq N + E_a} \quad (1)$$

而所謂**近似數**通常即以下列形式表示

$$\boxed{N(\pm E_a)} \quad (2)$$

例如  $1.724(\pm 0.0135)$  即表示某一**正確數**之**近似數**,而**正確數**介乎 1.7105 與 1.7375 之間。

上述**近似數**中所附屬之微小正數如  $E_a$  者,稱為**一數一量**,或一**計算之絕對誤差** (Absolute error)。此種寫法,以該誤差之範圍甚屬重要時始予引用。一般而論,實際計算中,對**絕對誤差**之**正確估計**,並非絕對必須,且一連串之計算中,欲嚴格將**絕對誤差**包含在內予以運算,事實上亦不可能,因此實用上常將**近似數**縮寫成一個數,並規定其縮寫之法則俾使其精確度憑此而可判定。此即**有效數字** (Significant figures) 觀念介入之由來。

現規定縮寫一個近似數時，所寫出之每位數字，除用以定小數點位置之 0 以外，每一位數字 0, 1, 2, 3, ……9 均具確定之意義，而最後之一位數至多只有半單位之出入。如此而寫出之數，即稱為有效數字。茲將有效數字之寫法及其含義說明如下：

- 0.00263 共有有效數字 2, 6, 3。係代表近似數 0.00263 ( $\pm 0.000005$ )。故稱該數正確至三位有效數字。
- 3809 共有有效數字 3, 8, 0, 9。係代表近似數 3809 ( $\pm 0.5$ )。正確至四位有效數字。
- 46300 共有有效數字 4, 6, 3, 0, 0。係代表近似數 46300 ( $\pm 0.5$ )。正確至五位有效數字。
- $4630 \times 10^1$  共有有效數字 4, 6, 3, 0。係代表近似數 46300 ( $\pm 5$ )。正確至四位有效數字。
- $4.63 \times 10^4$  共有有效數字 4, 6, 3。係代表近似數 46300 ( $\pm 50$ )。正確至三位有效數字。

利用有效數字之觀念，訂定寫出之法則，且可憑此而判定其準確度，誠屬方便之至。但有時並不能嚴格實施此種辦法而縮寫近似數。例如有一已知之近似數如前所述者  $1.724 (\pm 0.0135)$ ，表示其正確值介乎 1.7105 與 1.7375 之間。若縮寫成 1.724，則代表  $1.724 (\pm 0.0005)$ ，故  $1.7235 < \bar{N} < 1.7245$ 。若寫成 1.72，則代表  $1.72 (\pm 0.005)$ ，故  $1.715 < \bar{N} < 1.725$ 。若寫成 1.7，則代表  $1.7 (\pm 0.05)$ ，故  $1.65 < \bar{N} < 1.75$ 。

上述三種寫法，並無一種實足表示原有誤差之範圍，唯有第三種寫法，始將原有誤差之區間包括在內，但因將誤差之區間作人為之放大，反將原「正確數」之不定界限增加過度，失却縮寫該近似數之原意，且只有兩位有效數字，將影響今後連續計算之精密度，因此通常採用中庸之道，而將該近似數縮寫成三位有效數字之數如 1.72，雖然犧牲誤差限值之精確意義，但有較多之有效數字可供今後之運算也。



設有正確數 27 及 13.1, 相除而得無窮小數

$$27/13.1 = 2.061068702 \cdots$$

爲使該數在今後計算中具實用價值, 經常用四捨五入之捨位法而寫成近似數如,

$$2.06, 2.061 \text{ 或 } 2.06107 \text{ 等等.}$$

因捨位而產生之誤差, 恒在前述有效數字所規定之誤差極限之內, 因此成爲近似數. 如寫成:

2.06 則正確至小數二位, 正確至三位有效數字.

2.061 則正確至小數三位, 正確至四位有效數字.

2.06107 則正確至小數五位, 正確至六位有效數字.

(B) 絕對誤差, 相對誤差 (Relative errors) 及百分誤差 (Percentage errors)

設一正確數爲  $\bar{N}$ , 其近似數用其基數  $N$  表示, 則二者相差之數, 稱爲該近似數之實際誤差  $E$ . 有下列關係

$$\boxed{\bar{N} - N = E} \quad \text{或} \quad \boxed{\bar{N} = N + E} \quad (1)$$

此項實際誤差可爲正數或負數, 且恒爲不能確定之數. 但有時可決定該實際誤差之界值  $E_a$ , 卽上述近似數  $N$  之絕對誤差  $E$  與  $E_a$ . 有下列關係

$$\boxed{|E| \leq E_a} \quad (2)$$

因此原正確數  $\bar{N}$  介乎  $N - E_a$  及  $N + E_a$  之間, 此卽(A)節中所引用之

$$\boxed{N - E_a \leq \bar{N} \leq N + E_a} \quad (3)$$

如有近似數 4.629, 係正確至三位小數, 且具四位有效數字者, 其絕對誤差  $E_a = 0.0005$ , 故其所代表之正確數  $\bar{N}$  爲