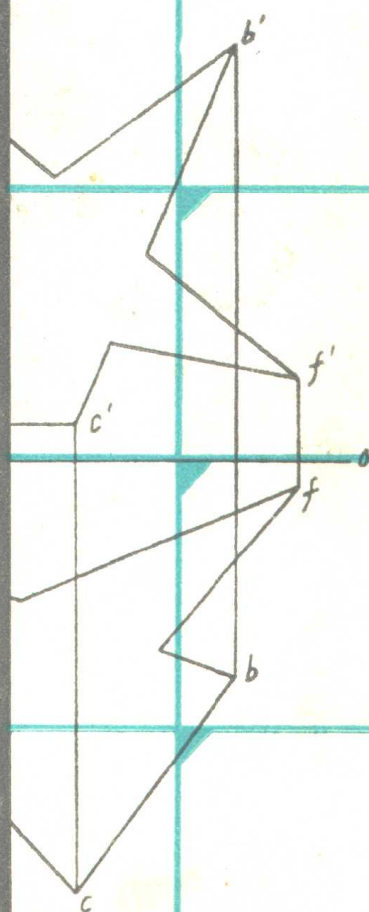
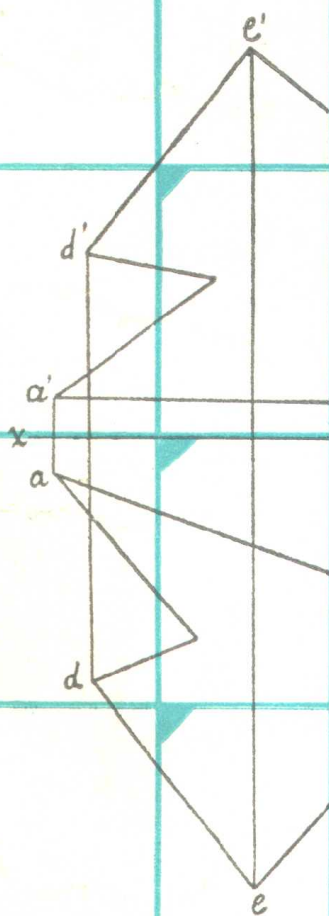


画法几何学

刘志海

主编

中国林业出版社



画法几何学

刘志海 主编

中国林业出版社

210733

画法几何学

刘志海 主编

中国林业出版社出版（北京西城区刘海胡同七号）

新华书店北京发行所发行 河北省昌黎县印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 14.875印张 174千字

1989年6月第一版 1989年6月第一次印刷

印数1—18,000册 定价：4.80元

ISBN7-5038-0453-X/O·0012

前 言

本书根据国家教委关于《画法几何及工程制图》课程的基本要求，在参考各院校自编教材、讲义，并总结了近年来各院校教学改革经验的基础上编写而成的。

本书着重考虑以下几点进行编写：

1. 力求加强基本理论。点、直线、平面及其相对位置的投影是研究图示法及图解法的基础，对培养学生投影能力、空间想象能力都是很重要的。因此本书对这部分内容及论述作了适当加强。

2. 在内容安排及叙述上，由浅入深，由易到难；选用的例题附有适当的立体图，以培养学生的自学能力。

3. 为培养学生解决问题的能力，根据不同情况灵活运用各种解题方法，本书各章编有解题分析一节。

4. 各章后还附有复习思考题，便于学生进一步掌握本章的基本内容。

本书可作为高等林业院校工科有关专业的教材，亦适用于其他工科院校有关专业、职工大学、电大、函大的学生学习使用。

与本书配套的尚有《画法几何习题集》一书同时出版。

本书由刘志海主编，赵荣文、吴仕英、才育杰、牛河任副主编。张凤兰、蔡保慧参加了本书部分插图的绘图工作。

本书由范垂和、樊昌文主审。

本书在编写过程中得到有关院校领导的热情帮助和支持。北京林业大学、东北林业大学、西南林学院、吉林林学院、内蒙古林学院、福建林学院、西北林学院制图教师代表提供了不少宝贵的意见。在此，谨表诚挚的谢意。

由于水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请教师、学生及其他读者批评指正。

编者

1988年6月

目 录

绪论	(1)
一、本课程的研究对象、学习任务和学习方法	(1)
二、投影法的基本知识	(2)
三、工程上常用的几种投影图简介	(4)
复习思考题一	(7)
第一章 点	(8)
§ 1—1 点在二投影面体系中的投影	(8)
§ 1—2 点在三投影面体系中的投影	(11)
§ 1—3 两点的相对位置	(14)
§ 1—4 解题分析	(15)
复习思考题二	(18)
第二章 直线	(19)
§ 2—1 直线的投影	(19)
§ 2—2 特殊位置直线的投影	(20)
§ 2—3 一般位置线段的实长及其对投影面的倾角	(23)
§ 2—4 点与直线的相对位置	(25)
§ 2—5 两直线的相对位置	(27)
§ 2—6 直角投影定理	(30)
§ 2—7 解题分析	(32)
复习思考题三	(36)
第三章 平面	(37)
§ 3—1 平面的表示法	(37)
§ 3—2 各种位置平面的投影	(39)
§ 3—3 平面内的点和直线	(43)
§ 3—4 平面内的特殊位置直线	(45)
§ 3—5 解题分析	(47)
复习思考题四	(51)
第四章 直线与平面、平面与平面的相对位置	(52)
§ 4—1 直线与平面平行, 两平面平行	(52)
§ 4—2 直线与平面相交, 两平面相交	(55)

§ 4—3 直线与平面垂直, 两平面垂直	(59)
§ 4—4 解题分析	(64)
复习思考题五	(68)
第五章 投影变换	(69)
§ 5—1 换面法	(70)
§ 5—2 旋转法	(76)
§ 5—3 解题分析	(84)
复习思考题六	(88)
✓第六章 曲线与曲面	(89)
✓§ 6—1 曲线	(89)
✓§ 6—2 曲面	(96)
§ 6—3 解题分析	(110)
复习思考题七	(112)
✓第七章 立体	(113)
✓§ 7—1 平面立体	(113)
✓§ 7—2 曲面立体	(116)
§ 7—3 解题分析	(123)
复习思考题八	(126)
✓第八章 平面与立体相交	(127)
✓§ 8—1 平面与平面立体相交	(128)
✓§ 8—2 平面与曲面立体相交	(133)
§ 8—3 解题分析	(142)
复习思考题九	(147)
✓第九章 直线与立体相交	(149)
✓§ 9—1 直线与平面立体相交	(150)
✓§ 9—2 直线与曲面立体相交	(153)
§ 9—3 解题分析	(157)
复习思考题十	(161)
✓第十章 立体相交	(162)
§ 10—1 概述	(162)
✓§ 10—2 两平面立体相交	(164)
✓§ 10—3 平面立体与曲面立体相交	(167)
✓§ 10—4 两曲面立体相交	(169)
§ 10—5 解题分析	(181)
复习思考题十一	(188)
✓第十一章 立体的表面展开	(189)

§ 11—1 概述	(185)
§ 11—2 平面立体的表面展开	(185)
§ 11—3 曲面立体的表面展开——可展曲面的展开	(194)
§ 11—4 不可展曲面的近似展开	(197)
§ 11—5 变形接头的展开	(202)
§ 11—6 解题分析	(205)
复习思考题十二	(207)
第十二章 轴测投影	(208)
§ 12—1 概述	(208)
§ 12—2 正轴测投影	(211)
§ 12—3 斜轴测投影	(224)
复习思考题十三	(227)
附录	(228)

绪 论

一、本课程的研究对象、学习任务和学习方法

(一) 研究对象

(1) 研究空间几何元素(点、线、面)、空间物体及其相对位置在平面上的各种表示法。

(2) 研究在平面上用几何作图的方法来解决空间几何问题。因此,画法几何是一门研究空间几何问题的图示法和图解法的学科。

(二) 学习任务

在森林工业生产以及其它学科领域中,都要求用图样表示各种机械设备和工程建筑物来进行施工和安装。但在不同场合下,图样在工程技术中所起的作用不完全相同,所以对图样的要求也就不一样。一般应满足下列几方面的要求:一是图样的直观性,即图样给人们以逼真的形象或近似物体本身的形象,又称为立体感;二是图样的度量性,即根据图样能方便而准确的判断出物体真实形状和大小;三是作图简便。

画法几何是满足上述条件的图示法,对工程技术界来说图样的度量性具有头等重要的意义,因为任何机器和其它工程建筑都必须根据图样来制造和施工。所以在工程技术界任何部门,图样是最重要的技术文件之一,被喻为工程界的语言,而画法几何就是这种语言的文法。在平面上用几何作图的方法来解决空间几何问题的图解法,在工程技术活动中是一个重要的手段。而图解法与解析几何中所讨论的解析方法比较,由于作图技巧和仪器工具的限制,在精度上有一定的局限性。但在一定精度要求范围内,图解法比解析法来得简便、迅速、直观。目前已广泛应用到各学科领域中:例如力学、机械原理、刀具、化学等方面。并在研究图示规律及图解法的应用中与解析法相结合,因而使图解法的应用得到了新的发展。

在学习图示法和图解法的过程中,还能逐步培养空间想象力和空间的构思能力。而空间想象力对工程技术人员来讲是极为重要的。因此本课程的任务有以下几方面:

(1) 画法几何为工程制图提供了理论基础,在学习上要贯彻理论与实际相结合的原则,注意与工程制图密切配合。

(2) 在学习过程中使我们的空间想象力和空间构思能力得到锻炼,并不断提高和发展。

(3) 为其它有关学科提供解决有关空间几何问题的方法。

(三) 学习方法

(1) 画法几何学是一门有系统理论的学科,在学习过程中,要注意空间几何关系的分析和必须把空间形体和投影对应关系有机地联系起来。也就是说贯彻“从空间到平面,反之再由平面到空间”是本课程较为有效的学习方法。

(2) 本课程是一门基础课,要想掌握好必须通过大量的实践。在学习基本理论的同时,要认真研究各种图例的分析方法和作图步骤。独立地完成一定数量的习题。

(3) 应及时对每章进行复习小结,不断总结经验,不断改进自己的学习方法,使所学的知识得到巩固、提高。

二、投影法的基本知识

投影现象广泛存在于自然界和日常生活中,如物体被灯光或日光照射后,物体在地面或墙上就会产生影子(图1)。人们在长期生产和生活实践中积累了丰富的经验,找到了影子与物体之间的几何关系,经过科学的概括和抽象,逐步形成了各种投影方法,常用的投影法有两大类:中心投影法和平行投影法。

(一) 中心投影法

如图2所示,光源抽象为一点 S ,称为投影中心;光线(S 点与空间 A 、 B 、 C 等点的连线)称为投射线; P 面称为投影面。自 S 点通过 $\triangle ABC$ 的各顶点作投射线 SA 、 SB 、 SC ,延长各投射线与投影面 P 分别交于 a 、 b 、 c 三点,该三点称为空间点 A 、 B 、 C 在 P 面上的投影。作出投影的过程称为投射,用通过固定投影中心的投射线,对物体进行投影的方法称为中心投影法(图2)。

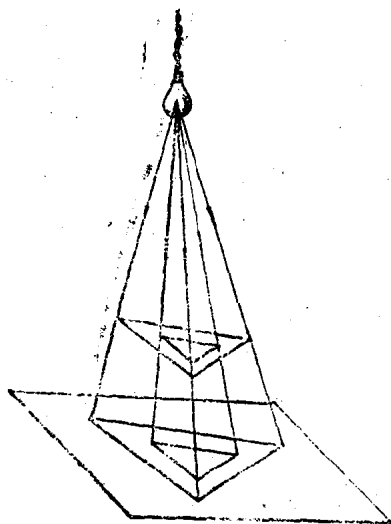


图1 物体的投影

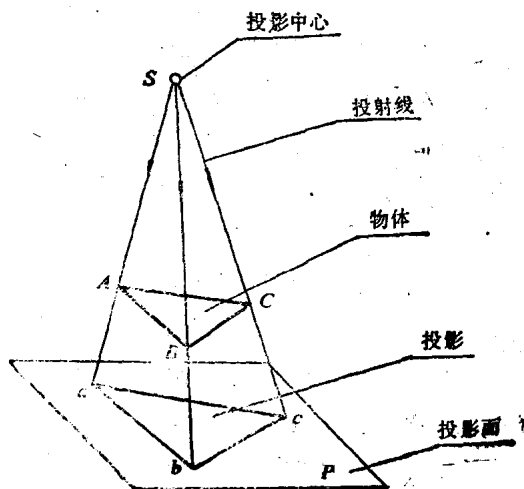


图2 中心投影法

(二) 平行投影法

如果把中心投影的投影中心移到无限远处, 这时各投射线被认为是相互平行的, 如图 3 所示。在这种特殊情况下, 投影中心只能用投射方向 S 来表示, 这样的投影就称为平行投影。要自空间各点 (A 、 B 、 C) 分别引与 S 平行的投射线, 在 P 面上的交点处 (a 、 b 、 c) 即可得到空间各点在 P 面上的平行投影 (图 3)。用相互平行的投射线, 对物体进行投影的方法称为平行投影法。

由于投射线与投影面之间的倾角不同, 平行投影又可分为两种。

设投射线与投影面之间夹角为 θ 。

(1) 当 $\theta \neq 90^\circ$ 时称为斜投影, 如图 4 所示。

(2) 当 $\theta = 90^\circ$ 时称为正投影, 如图 5 所示。

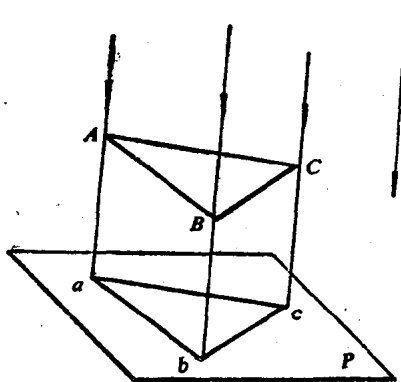


图 3 平行投影法

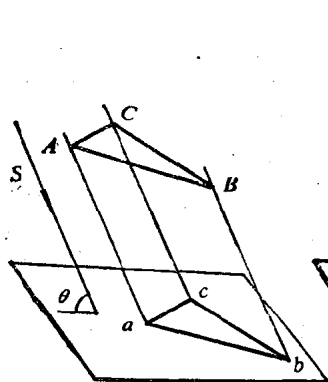


图 4 斜投影

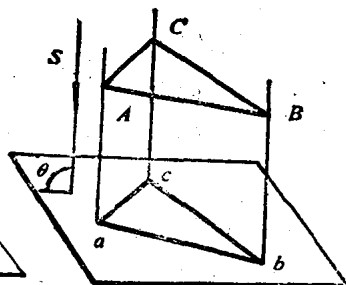


图 5 正投影

当空间的平面图形 (图 4 和图 5 中的三角形) 和投影面平行时, 则它的投影反映出真实形状和大小。这是平行投影的一个特点。

(三) 平行投影法的基本性质

(1) 直线的投影一般还是直线, 如图 6 所示。因为组成直线 AB 的每一个点其投影为点, 而过投影各点的所有投射线则组成一投射平面 $ABba$, 该平面与投影面的交线 ab 则为直线的投影。因此直线的投影一般情况下还是直线。

点的投影是点, 直线的投影还是直线, 其投影所具有的这一性质称为同素性。

(2) 点在直线上, 则该点的投影一定在该直线的投影上, 即点和直线的从属性不变如图 7 所示。

(3) 点分割线段之比, 其投影后保持不变, 即在同一条直线上任意三点的简单比是平行投影的不变量, 如图 7 所示, 即 $AC : CB = ac : cb$ 。

(4) 平行二直线的投影仍平行, 即已知 $AB \parallel CD$ 则 $ab \parallel cd$ 如图 8 所示。

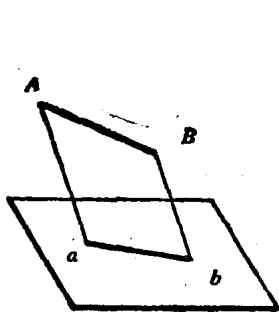


图6 直线的投影

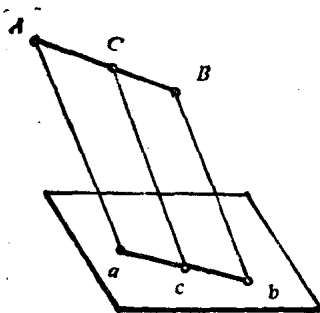


图7 直线上点的投影

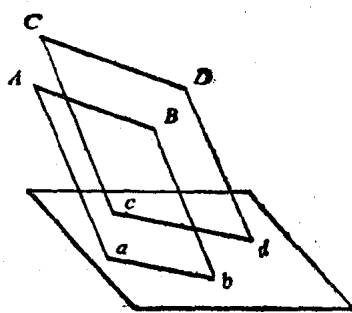


图8 平行二直线的投影

上述规律，均可用初等几何的知识，得出证明。

三、工程上常用的几种投影图简介

我们知道工程上所用的投影图，必须确切地反映空间的几何关系。但是，只凭一个投影不能真实反映空间情况（空间物体的形状和位置）。如图9所示，投影图上相互平行二直线（ $ab \parallel cd$ ），但对应到空间可能平行，也可能是不平行的二直线（ AB 和 CD ）。

图10所示投影图上c点属于线段ab，但对应到空间C点有可能属于线段AB，也有可能不属于线段AB。

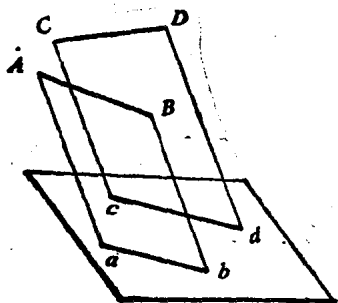


图9 空间二直线不平行

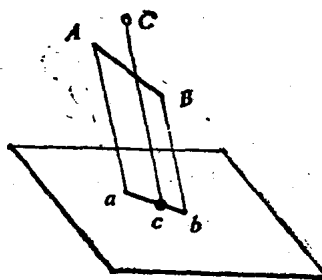


图10 C点不属于线段AB

图11投影面H上的投影所表示的物体可能是物体I，也可能是物体II，还有可能是其它形状的几何体。

这是因为一个空间点有唯一确定的投影（图2），每一条投射射线只与投影面交于一点。但是点的一个投影不能确定该点在空间的位置，如图12所示，其在H面上的投影

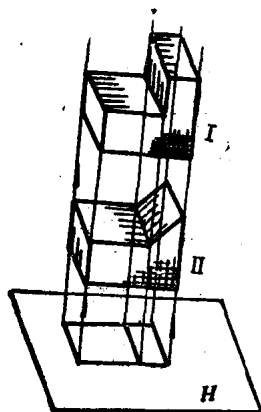


图11 一个投影不能确定空间几何形体

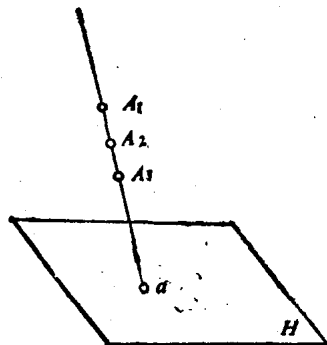


图12 点的空间位置不能确定

a. 有可能对应空间在同一条投射线上的任何点（如 A_1 、 A_2 、 A_3 ）。

因此，为了使投影图附合要求，就必须在投影面上附加某些条件和规定。

根据投影法和附加条件的不同，工程上常采用以下四种投影图：透视投影图、轴测投影图、标高投影图和正投影图。

下面分别介绍这四种投影图的特点和应用范围。

（一）透视投影图

透视投影图是根据中心投影法而绘制的，它与照像成影的原理相似，画出的图样近于用眼睛看到的形象，所以这种图看起来比较自然、直观性强。按照特定附加条件和规则画出来的透视投影图，完全可以确定空间几何元素的几何关系。

图13是一几何体的一种透视投影图，由于采用中心投影法，原空间相互平行的直线有的投影就不平行了。

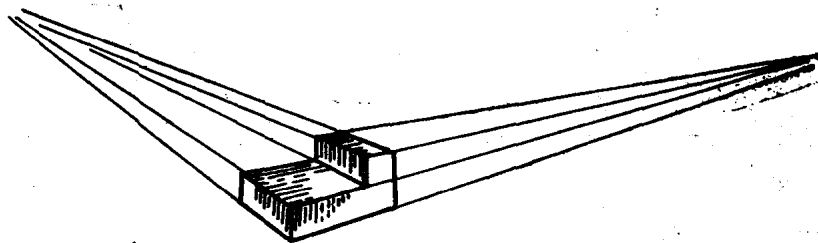


图13 几何体的透视图

透视投影图广泛应用于工艺美术及宣传广告图样。

（二）轴测投影图

轴测投影图是根据平行投影法（正的或斜的），把物体连同确定它的直角坐标系一

起投影到一个投影面上而获得的图，因此是单面投影图。图14 (a) 所示，俗称立体图如图14 (b)。轴测投影图立体感强，容易看懂，所以有时用作工程图样和书籍中的插图。

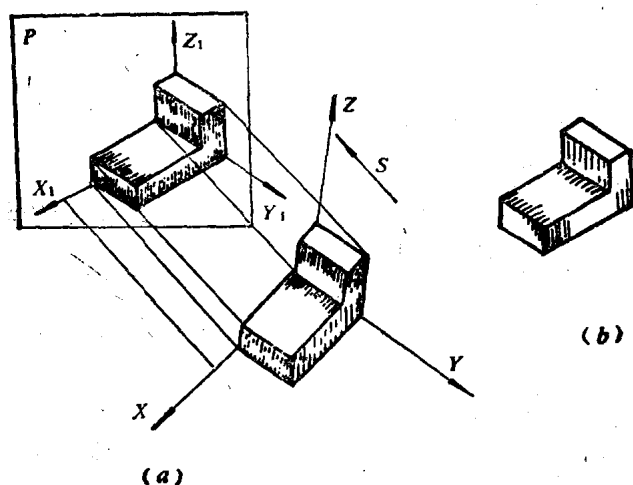


图14 轴测投影图

(a)几何体的轴测投影 (b)几何体的轴测投影图

(三) 标高投影图

标高投影图是根据平行直角投影法而绘制的，将物体投影到一个投影面上，为了解决物体高度方向的度量问题，在投影图上画出一系列的等高线，如图15 (b) 所示，在等高线上标出高度尺寸(标高)，是单面投影图，该图广泛地应用于表达复杂曲面。图15(a) 是表示投影过程，是曲面的标高投影。

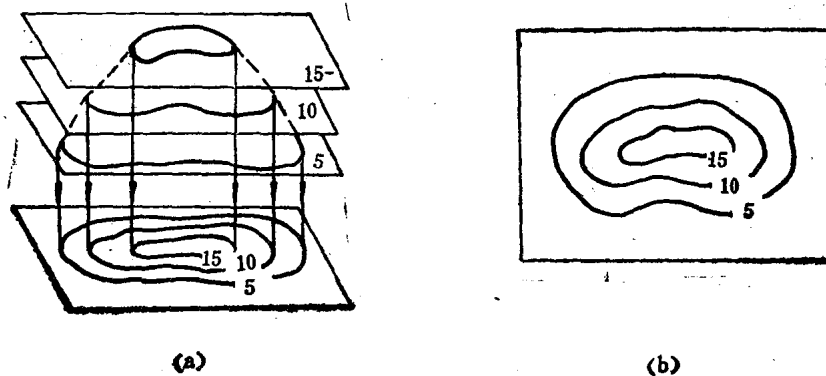


图15 标高投影图

(a)曲面的标高投影 (b)曲面的标高投影图

(四) 正投影图

正投影图是一种多面投影图。为了确定物体的形状和空间位置,18世纪法国学者蒙诺建立了两个互相垂直的投影面,并以此代表空间,把物体置于该空间分别对两个互相垂直的投影面进行平行垂直投影——蒙诺法(1795年)。如图16(a)所示,然后再按一定规律把这些投影面展成一个平面,便得到正投影图[图16(b)]。这样的投影图能完全确定物体的形状和空间位置。

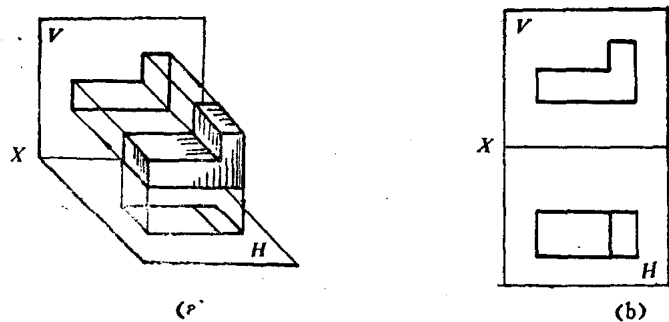


图16 正投影图

(a) 几何体的正投影

(b) 几何体的正投影图

根据正投影图很容易确定物体的形状和大小,也就是说正投影图有很好的度量性,而且作图也很简便。尽管直观性稍差,但是由于上述突出的优点,在机械制造业和森林工业以及其它工程部门中被广泛地采用,也是我们今后学习的重点。

复习思考题一

1. 学习画法几何的任务是什么?
2. 中心投影法和平行投影法区别何在? 平行投影法有哪些基本性质?
3. 工程上对图样有哪些要求? 为什么?
4. 工程上常用的几种投影图各有何特点? 使用范围如何?

第一章 点

在空间几何元素中，点是最基本的元素，而线、面、体都可以看成是点的集合。因此，研究和掌握点的投影性质和规律是研究和掌握一切几何元素的基础。下面将从点开始研究正投影图的建立及其基本原理。

§ 1—1 点在二投影面体系中的投影

在绪论中已经提出，点的一个投影不能确定点的空间位置。因此，本节引入点的二投影面体系。

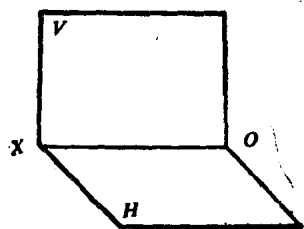


图 1—1 二投影面体系

一、二投影面体系的建立

如图 1—1 所示，有两个互相垂直的投影面，直立的是正立投影面，用 V 表示；水平放置的是水平投影面用 H 表示，它们组成一个二投影面体系。二投影面的交线称为投影轴，用 OX 表示。

二、点的投影及规律

在二投影面体系中有一 A 点，由 A 点分别向 H 面和 V 面作垂线，则与 H 面的交点称为 A 点的水平投影，用 a 表示；与 V 面的交点称为 A 点的正面投影，用 a' 表示。如图 1—2 (a) 所示。

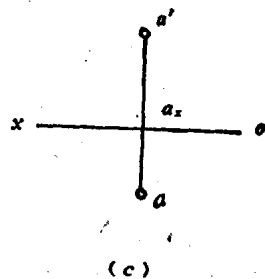
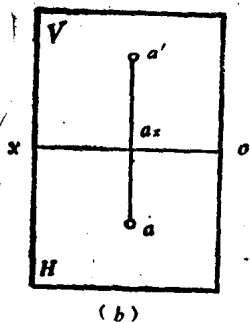
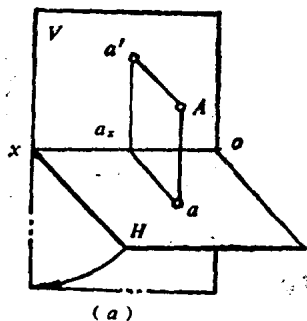


图 1—2 点在二投影面体系中的投影

这里我们规定：空间点用大写字母表示，如 A 、 B 、 C ……；水平投影用相应的小写字母表示，如 a 、 b 、 c ……；正面投影用相应的小写字母并在右上角加一撇表示，如 a' 、 b' 、 c' ……。

为了把空间 A 点的两个投影表示在一个平面上，故规定 V 面不动，将 H 面绕 OX 轴按图1—2 (a) 所示箭头方向旋转 90° ，使其与 V 面展成一个平面，便可得到 A 点的两面投影图，如图1—2 (b) 所示。为了作图简便，可以不必画出投影面的边框，如图1—2 (c) 所示。

反之，如果在投影图中有了 A 点的水平投影 a 和正面投影 a' ，可将 H 面复原与 V 面成 90° ，然后再分别通过 a 、 a' 作所在投影面的垂线，则两垂线的交点即为空间 A 点。因此知道了点的二面投影图就完全可以确定点在空间的位置。

从图1—2 (a) 中可以看出，因为 $Aa \perp H$ 面 $Aa' \perp V$ 面，所以 Aa 和 Aa' 所组成的平面 Aaa_xa' 垂直于 V 面和 H 面，并垂直于它们的交线 OX 轴。因此，该平面与 H 面的交线 aa_x 和与 V 面的交线 $a'a_x$ 均垂直于 OX 轴，即 $aa_x \perp OX$ ， $a'a_x \perp OX$ 。当 a 随着 H 面旋转与 V 面展成同一平面时， $aa_x \perp OX$ ， $a'a_x \perp OX$ 的关系不变。因此，在投影图中的 a 、 a_x 、 a' 三点共线，故 a 、 a' 连线 $\perp OX$ 。

此外，从图1—2 (a) 中可以看出 $Aa a_x a'$ 是个矩形，所以 $aa_x = Aa'$ ， $a'a_x = Aa$ 。

根据以上分析，可得出点在二投影面体系中的投影规律：

(1) 点的水平投影和正面投影连线垂直于 OX 轴，即 $aa' \perp OX$ 。

(2) 点的水平投影到 OX 轴的距离 (aa_x) 等于该点到 V 面的距离 (Aa')；其正面投影到 OX 轴的距离 ($a'a_x$) 等于该点到 H 面的距离。即 $aa_x = Aa'$ ， $a'a_x = Aa$ 。

三、点在四个分角内的投影

由于在空间建立的二投影面体系中，其投影面是没有边际的，因此二投影面将空间分成四个部分，称为四个分角。并按规定顺序称为第I、II、III、IV分角，如图1—3(a)

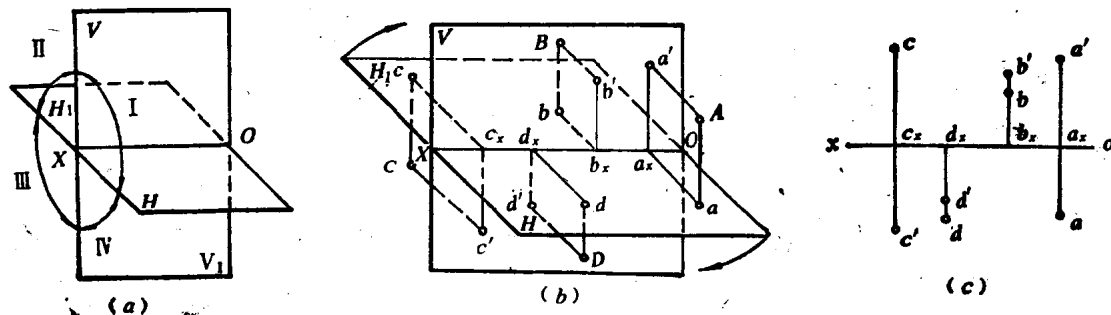


图1—3 点在四个分角内的投影

所示。图1—3 (b) 所示空间A、B、C、D四个点，分别处于第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ分角内。由各点分别再向两投影面作投射射线，就可以得到各点的水平投影 (a 、 b 、 c 、 d) 和正面投影 (a' 、 b' 、 c' 、 d')。当画它们的投影图时，按规定V面不动，将H面向下旋转 90° ，于是H面的前半面与 V_1 重合，而后半面 H_1 则与 V 重合，这样就可以得到各点的投影图，如图1—3 (c) 所示。综上所述，可以得出点在不同分角内有如下的投影特点：

(1) 点的水平投影和正面投影同在OX轴的上方时，该点在第Ⅱ分角；若同在OX轴的下方时，则该点在第Ⅳ分角。

(2) 点的水平投影和正面投影分别在OX轴的两侧，其水平投影在下，正面投影在上时该点在第Ⅰ分角；若水平投影在上，正面投影在下时，则该点在第Ⅲ分角。

四、特殊位置点的投影

空间点除了在四个分角内不同位置外，亦可在投影面内或投影轴上，如图1—4 所示。

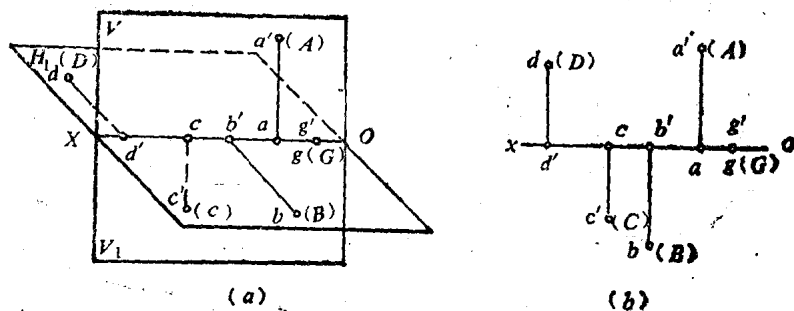


图1—4 在投影面内及投影轴上的点的投影

(一) 在投影面内的点

图1—4 中A、B、C、D四个点分别在H面和V面内，由于各点到所在投影面的距离为零，故投影有以下特性：

- (1) 点的一个投影与该点本身重合。
- (2) 点的另一投影在OX轴上。

(二) 在投影轴上的点

如图1—4 中G点在OX轴上，显然，由于G点到两个投影面的距离均为零，所以它的两个投影与该点都重合在OX轴上。

例1 已知空间B点距H面为20mm，距V面为15mm，试作B点的投影图。

解：根据点的两面投影规律可知B点到H面的距离等于 $b'b_x = 20$ ，到V面的距离等