

目 錄

第一篇 質點動力學

第一章 動力學緒論

1. 沿革與近代的應用 3 / 2. 基本概念 4 / 3. 牛頓定律 6
4. 單位 6 / 5. 重力 8 / 6. 因次 11 / 7. 動力學問題的
擬式和解題 11

第二章 質點運動學

1. 緒論 15 / 2. 直線運動 16 / 3. 平面曲線運動 38 /
4. 直角坐標系 ($x-y$) 41 / 5. 法線、切線坐標 ($n-t$) 52
6. 極坐標 ($r-\theta$) 67 / 7. 空間曲線運動 82 / 8. 相對運
動 (移動軸) 91 / 9. 問題的整理與複習 101

第三章 質點動力學

1. 緒論 109 / 2. 牛頓第二定律 109 / 3. 運動方程和問題
的解 114 / 4. 直線運動 116 / 5. 曲線運動 132 / 6. 功
與功能 149 / 7. 位能 171 / 8. 衝量與動量 186 / 9. 動
量守恒 207 / 10. 問題的整理與複習 213

第四章 特殊的應用

1. 緒論 221 / 2. 中心力運動 221 / 3. 碰撞 235 / 4.

相對運動 248 / 5. 振動與時間響應 259

第五章 質點系統動力學

1. 緒論 277 / 2. 定義方程式 277 / 3. 總定質量流 293
4. 可變質量 311

第二篇 剛體動力學

第六章 剛體平面運動學

1. 緒論 327 / 2. 轉動 329 / 3. 絕對運動 338 / 4. 相對速度 350 / 5. 瞬時零速度中心 365 / 6. 相對加速度 373
7. 相對於轉動坐標的運動 387 / 8. 問題的整理與複習 406

第七章 剛體平面動力學

1. 緒論 413 / 2. 一般運動方程式 414 / 3. 移動 419 /
4. 固定軸的轉動 431 / 5. 平面一般運動 446 / 6. 功能關係式 463 / 7. 由功—能量探討加速度；虛功 484 / 8. 衝量與動量方程式 493

第八章 三維剛體動力學介紹

1. 緒論 521 / 2. 移動 521 / 3. 固定軸的轉動 522 / 4. 平行平面運動 523 / 5. 繞一固定點的轉動 523 / 6. 一般的運動 533 / 7. 角動量 546 / 8. 動能 550 / 9. 運動的動量和能量方程式 557 / 10. 平行面運動 559 / 11. 迴轉運動：穩態運動 566

附錄 A 質量慣性矩

1. 對一軸的質量慣性矩 587 / 2. 慣性積 602

附錄 B 一些數學論題

1. 緒論 613 / 2. 平面幾何 613 / 3. 立體幾何 614 / 4. 代數 614 / 5. 解析幾何 615 / 6. 三角學 615 / 7. 向量運算 616 / 8. 級數 619 / 9. 微分 620 / 10. 積分 620

附錄 C 常用表格

1. 性質 623 / 2. 太陽系常數 624 / 3. 平面圖的特性 625
4. 均勻固體之特性 626

索 引 631

第一篇

質點動力學

第一章

動力學緒論

1/1 沿革與近代的應用

動力學為力學的一支，用以處理物體在受力情況下的運動情形。工程動力學的研讀一般都緊跟在靜力學之後，此靜力學為研究有關靜止物體的受力情況。動力學包括兩個迥然不同的部分——運動學（kinematics），此只研究運動的情況，而不管引起運動的力量，和動力學（kinetics），此銜接作用在物體上的力與所造成之運動的關係。學工程的學生將會發現：對動力學的全盤了解，將會使他們獲得一種在工程分析上最有用、最有力的工具。

就發展的歷史而言，與靜力學相較之下，動力學算是較新的學問。對動力學的合理解肇始於伽利略（Galileo, 1564~1642），他曾對自由落體、斜面上的運動、和單擺運動作過仔細的觀察；他主要是將科學的研究方法引入物理問題的探討中；由於他拒絕接受當時根深蒂固的觀念，如亞理斯多得理論認為重的物體掉得比輕的物體快，以致一直備受嚴苛的批評。測量時間的精確工具之缺乏，對伽利略來說實是一大障礙，而動力學的發展也在1657年海更斯（Huygens）發明擺鐘後，才有更重大的進展。牛頓（Newton, 1642~1727）遵循伽利略的工作成果，作出了運動定律精確的公式說明，而為動力學奠定了堅實的基礎；牛頓著名的成果發表於第一版的原理*（Principia）中，舉世公認此乃知識上最偉大的貢獻之一。除了提出控制粒子運動的定律外，牛頓也是第一個正確而系統地將萬有引力公式化的人。雖然他的數學描述正確無誤，但他却認為沒有支撐媒體而能將重力傳到遙遠的地方是一個很荒謬的觀念。緊接在牛頓

*牛頓（Sir Isaac Newton）的原始導式，可在原理（Principia）的翻譯本中找到，此由F. Cajori校正，University of California Press, 1934.

之後，對力學有重大貢獻著有奧依勒（Euler），達朗白（D'Alembert），拉格朗日（Lagrange），拉卜拉斯（Laplace），潘索（Poinsot），柯若利士（Coriolis），愛因斯坦（Einstein）及其他人。

而動力學在工程上的應用，則是一門更新近的科學，因為機器或結構物只有在高速和有一點加速下，才須以動力學原理來作計算，而不用靜力學原理。現今科技的快速發展，越來越需用力學的原理，特別是動力學的原理；這些原理對移動結構物的分析與設計，對受到衝擊負荷（shock load）的固定結構物，對高速計算機構體，對自動控制系統，對火箭、飛彈、太空船及陸上、空中的運輸工具、對電動器械的電子彈道學，對任何形式的機器，如渦輪機、泵、往復機、起重機、工作母機等等來說都是基本的。對這些有興趣而從事某一或多方面工作以及其他許多活動的學生，將會發現經常需要應用到動力學的基本知識。

1/2 基本概念

力學的基本概念已在第一冊靜力學 1/2 節中作了說明。今再作扼要摘述，並特就與動力學之學習有直接相關的部分補充說明如下：

空間（space）為物體所佔有的幾何領域，空間上的位置則由相對於某一幾何參考系統作直線及角度量度來決定。牛頓力學定律的參考基架為主慣性系統（primary inertial system）或稱參考天文坐標（astronomical frame of reference），這是一個在空間中既不會移動也不會轉動的假想直角坐標軸；經測量顯示：只要任一速度較光速小很多，那牛頓力學定律在此參考系統中是正確無誤的*。依此參考系統所作的測量即是所說的絕對的（absolute），而此系統可視為“固定”於空間中。一定於地球表面的參考坐標，在主系統中的運動情況會略為複雜，且作相對於地球參考坐標的量度時，必須採用力學基本方程式的修正式；如在計算火箭和太空飛行的軌道時，地球的絕對運動就變成一個很重要的參數了。但對於大部分仍處於地球表面的工程問題而言，修正量非常小，可略

*對於和光速（300000 km/s 或 186000 mi/sec）同階秩的速度，必須應用相對理論。可看 3/2 節中對此理論的扼要討論及一可顯其效應之數值例子。

而不計，對此類問題可直接用力學定律來做相對於地球的量測，且在實質的意義上，此種量測將被認為是絕對的。

時間 (time) 為事件不斷進行的量度，在牛頓力學中，為一絕對量。

質量 (mass) 為改變一物體之運動的阻力或慣性的數量量度。質量亦是因重力的吸引而生的性質。

力 (force) 為一物體對另一物體的向量作用。力的性質已在第一冊靜力學中作過詳盡的論述。

一個質點 (particle) 為一可忽略尺寸的物體。當物體之尺寸與對其運動之描述或作用在其上之作用力無關時，此物體也可視為一質點。如在描述一飛行軌道時，飛機即可看作一質點。

一剛體 (rigid body) 為一形變與其全尺寸比較時，或是與整體之位置改變量相較時，可略而不計之物體，如飛機在亂流中航行，翼尖的微小撓曲振動顯然對飛機整體沿其飛行路徑之運動描述毫無影響，即為可假設為剛性的例子；為達描述的目的，將飛機當作剛體的處理方式，才不會增加問題的複雜性。但話又說回來，如果是一個處理因變動動負荷而生之機翼結構內的內應力問題，那麼結構可變形的特性就必須加以研究，為達此目的，飛機就不能再視為剛體。

向量 (vector) 和純量 (scalar) 在第一冊靜力學中已作了廣泛的討論，其間的區別現應已相當清楚。純量以細斜體字印，向量則用粗黑體字印，所以 V 為向量 $\mathbf{V}$ 的矢量長；另宜特別注意對手寫向量，我們用了一個等值符號，諸如加底線 $\underline{V}$ ，以代替印刷的粗黑體字；對兩個不平行的向量，回想一下，如 $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ 和 $V_1 + V_2$ 代表兩種完全不同的意義。

在此我們假定讀者研讀過靜力學及數學，對幾何與向量代數已相當熟悉。如果同學們有必要複習這些論題的話，附錄 B 有一簡要的摘述及一些在力學中經常用到的數學關係式。經驗顯示：力學幾何常常是產生困難之所在，但力學的本質就是幾何的，同學在複習數學時宜牢記此點於心。此外，向量幾何動力學須用到向量微積分，其要點將會在書中必要之處加以說明。

動力學也常常用到向量和純量的時間導函數。為了符號的速寫起見，

我們經常在一量上方加一點來代表對時間的導函數，所以 $\dot{x}$ 表示 dx/dt ，而 $\ddot{x}$ 表示 d^2x/dt^2 。

1/3 牛頓定律

第一冊靜力學 1/4 節曾提過的牛頓三大運動定律，在此再重述一次，因其對動力學有特殊的意義。以現代術語來說，即

第一運動定律 (Law I)：若沒有不平衡力的作用，則質點不是保持靜止不動，就是作等速直線運動。

第二運動定律 (Law II)：質點的加速度與作用在其上之合力成比例，其方向則為該力之方向*。

第三運動定律 (Law III)：交互作用中的物體，其間的作用力與反作用力大小相等，方向相反，且共線。

這些定律已經無數次的物理測量而得到證實。前兩個定律須在絕對參考坐標中作測量才成立，但若對運動所作的測度係相對於某一加速參考系統，如固定在地表的系統，就必須作修正。

牛頓第二運動定律為動力學大部分解析的基礎，對一質量為 m 的質點，受到合力 F 的作用時，本定律可表為：

$$F = ma \quad (1/1)$$

其中 a 為在非加速參考坐標中測得之加速度。牛頓第一運動定律為第二定律的特例，因當力量為 0 時，就沒有加速度，所以質點不是靜止就是以等速前進；第三定律構成了作用與反作用定律，從靜力學的研究中，我們應該十分熟悉此一定律。

1/4 單位

在第二冊動力學中，將說明且採用米制國際系統 (SI)。要熟悉此系

* 有些人喜歡把牛頓第二定律解釋為：作用在質點上的力和該質點之動量變化率成比例，而其變化係在力的方向上，當用在一質量固定的質點上時，這兩種解說法都對。

統，必須直接以公制單位去想。雖然在工程的實際應用中，從美國習慣系統或稱英制系統到公制系統的轉換，須在數年之後才會達成，但別誤以為只靠舊系統的數字轉換，就可以熟悉公制單位。公制單位之定義及英制、公制單位之轉換因子列於封面內頁的表中，一些經選出的公制、美制數量比較圖，列於封底內頁，以便利其轉換，並幫助建立兩系統中，單位相對尺度的感覺。

兩系統中，四個力學基本量的單位及符號，現摘述如下表：

量	因次符號	公 制		美 制	
		單 位 符 號		單 位 符 號	
質量	M	基本 單位	公斤 kg	斯勒格	—
長度	L		米 m	呎	ft
時間	T		秒 s	秒	sec.
力	F		牛頓 N	磅	lb

在公制單位中，取質量，長度，時間為基本量，力的單位可由牛頓第二定律，1/1 式中導出；但在美制系統中，基本單位為力、長度和時間，而質量的單位可由第二定律導出。公制系統又稱為絕對（absolute）系統，因我們將質量視為一絕對量，或是基本量，美制系統則稱為重力系統，因其取力（由重力引力測得）為基本量。此一區別為此二系統間的根本相異點。

在公制單位中，根據定義，一牛頓即為使質量為一公斤的物體產生加速度大小為 1 m/sec^2 的力量；在美制單位中，一質量為 32.1740 磅（1 斯勒格）的物體在 1 磅力的作用下，將產生 1 ft/sec^2 的加速度。因此就每一系統，由 1/1 式可得：

公 制 單 位	美 制 單 位
$(1 \text{ N}) = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2)$ $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$	$(1 \text{ lb}) = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/sec}^2)$ $\text{slug} = \text{lb} \cdot \text{sec}^2/\text{ft}$

在公制單位中，每個單位及符號僅代表一個量，公斤將只用作質量單位，而決不當作力的單位；但在另一方面，美制單位中的磅，既用作力量單位（lbf），也用作質量單位（lbm），至於是當作質量或是當作力量，通常可從手邊的情況明顯地看出。一般磅力的符號都只寫成 lb。

力學用到的附加量及其相當的基本單位，將在以後的章節中引入時加以定義，然而為了方便查詢，這些量及其公制基本單位都集中列於封面內頁的第一表中。

詳細的指導方針已配合公制單位的使用建立起來，本書從頭到尾都遵循這些指導方針，其中最重要的都摘述於封面內頁，同學們應仔細觀察這些規則。

1/5 重 力

控制物體間彼此相吸的牛頓萬有引力定律為

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1/2)$$

式中 F = 兩質點彼此間的吸引力
 K = 通用常數，稱為重力常數
 m_1, m_2 = 兩質點的質量
 r = 質點中心間的距離

由實驗資料知引力常數之值 $K = 6.673 (10^{-11}) \text{ m}^3 / (\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ 。唯一可察覺到重力乃是地球的吸引力，例如，在第一冊靜力學中，我們曾說明過直徑為 100 mm 的兩鐵球中，任一個都受到重力為 37.9 N 的地心引力，此即其重量，但若兩球剛好接觸，則其間的吸引力只有 0.000 000 099 4 N。

既然重力或物體的重量是一力量，我們就應將其表為力的單位，在公制單位中為牛頓（N），在美制單位中為磅力（lb）。非常遺憾的是：質量單位公斤（kg）在一般實際應用中，已經廣泛用作重量的量度，當表為公斤時，“重量”在技術上意味著質量。在本書中為避免“重量”一

詞產生混淆，我們限定其意義為重力引力，並以牛頓或磅力表示。

作用在物體的地球重力引力係依此物體相對於地球的位置而定。若地球為等體積的球體，則一位於地表面質量恰為一公斤的物體，必受 9.824 N 的地球引力，在高度為 1 公里處為 9.821 N，高度為 100 公里處為 9.523 N，高度為 1000 公里為 7.340 N，與地球等半徑 6371 公里的高度處為 2.456 N；高空火箭及太空船所受重力引力的變化將是一個主要的考慮因素，由此可馬上很明顯地看出。

任一物體在真空中由地表面某定點落下時，都具有相同的加速度 g ，這可從合併 1/1 及 1/2 式，消去代表物體質量之項，而得到：

$$g = \frac{K m_0}{r^2}$$

式中 m_0 為地球的質量， r 為地球半徑^{*}；地球質量 m_0 及平均半徑 r 經實驗測量，發現分別為 $5.976(10^{24})$ 公斤， $6.371(10^6)$ 米。將這些值及前已引用過的 K 值代入，求 g ，可得

$$g = 9.824 \text{ m/s}^2$$

由萬有引力定律求得的重力加速度，為從原點位於球心之坐標量測得的加速度，而該中心並不隨地球旋轉，計及這些固定軸，此值可稱為 g 的絕對值，但因事實上地球是在轉動，所以附著於地表面某位置測得之自由落體加速度比絕對值稍小一些。相對於地表面所測得之重力加速度精確值，說明了地球為一旋轉扁球體，兩極平坦的現象，其值可由如下之國際重力公式 (International Gravity Formula) 求得：

$$g = 9.78049(1 + 0.0052884 \sin^2 \gamma - 0.0000059 \sin^2 2\gamma)$$

式中 γ 為緯度， g 以 m/s^2 表示，裡面的常數計及了地球與正球形之偏差量，以及地球自轉效應；對一不自轉之地球，因重力而生之絕對加速度之

* 當將地球視為一球體，且其質量分佈對稱於球心時，我們可證明可將地球看成一質點，而其整個質量都集中於球心。

決定，可將相對值加上一項 $3.382(10^{-7}) \cos^2 \gamma \text{ m/s}^2$ 而得極近似之值。此項是移去地球自轉之效應。 g 之絕對值及相對值在海平面上隨緯度變化之情況如圖 1/1^{*}。國際間所採用的相對於自轉地球的重力加速度標準值，在海平面上、緯度 45° 處為 9.80665 m/s^2 或 32.1740 ft/s^2 。

大陸塊的毗接及地殼密度的變化也都會影響到當地的 g 值，其影響量不大，但却可查探得出來。絕大部分在地表面作測量的工程問題中，重力加速度之絕對值與相對值之差及局部變化效應可略而不計，在海平面上的 g 值，在公制單位中取 9.81 m/s^2 ，在美制單位中用 32.2 ft/sec^2 。

g 隨高度的變化可由萬有引力定律很容易決定出來。若 g_0 為在海平面上的絕對重力加速度，則在高度為 h 處為

$$g = g_0 \frac{r^2}{(r + h)^2}$$

式中 r 為地球半徑。

作用在物體上的地球重力引力可由簡單的重力實驗之結果計算出來。若一物體之重力引力或實重為 W ，那麼因物體在真空中以絕對加速度 g 掉

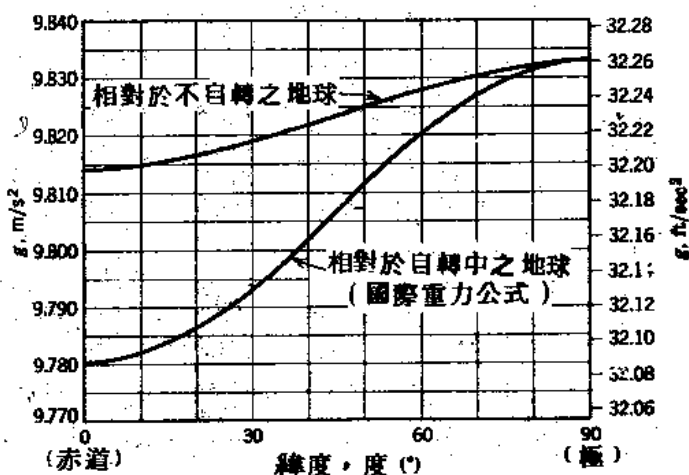


圖 1/1

同學們在學完第三章之相對運動後，就能導出這些圓球形地球的關係。

下來，所以式 1/1 可得

$$W = m_g \quad (1/3)$$

一個有刻度可讀出正確力量，且附著於地表面之彈簧秤所秤出之物體視重，將比實重稍輕些，其差值是因地球自轉產生的。視重與視重力加速度或相對重力加速度之比值仍為物體之正確質量；視重和因重力而生之相對加速度當然是指在地表面作實驗所測得之值。

1/6 因次

一已知的因次，如長度可用許多種不同的單位表示，如米、毫米或千米，因此因次 (dimension) 一詞不同於單位 (unit)。物理等式必須為同次元，即在一方程式中各項的因次要一致。一般我們習慣於用符號 L 、 M 、 T 和 F 來表示長度、質量、時間和力。在公制單位中，力為導出量，由 1/1 式知其因次為質量乘以加速度或

$$F = ML/T^2$$

因次理論的一個重要用途是可用來檢查一些導出的物理方程式的因次正確性。一質量為 m 之物體受到一力 F 的作用，由靜止運動了一段距離 x ，速度可由下式導出：

$$Fx = \frac{1}{2}mv^2$$

式中的 $\frac{1}{2}$ 係由積分而來，為無因次係數。此方程式在因次上是正確的，因為代入 L 、 M 、 T ，可得：

$$[MLT^{-2}][L] = [M][LT^{-1}]^2$$

齊次元為正確性的必要條件，但非充分條件，因為無因次係數的正確性不能以此方式檢查。

1/7 動力學問題的擬式和解題

動力學的學習是針對物體在運動時所含各項之了解與描述，這大半是

數學的描述使得可由預測推斷動力行為，要將此描述以公式表示須有雙重思考程序，必須同時以物理的情況及其相對應之數學描述二途來思考。每一道問題的分析都須在物理與數學間重複轉移思考，毫無疑問地，同學們遭遇到的最大困難之一，是無法作靈活的轉換，我們應該瞭解一個物理問題的數學公式化說明，只是代表一種理想和限定的描述，或稱模型，這只是一個近似真正的物理情況，而無法真正與之一致。

對任一已知的工程問題，在建立理想的數學模式過程中，總是會包含某些近似；其中部分是數學上的近似，另一些則是物理上的近似。例如，我們經常必須忽略和大距離、角度或力量相較下之小距離、角度或力量；若物體速度隨時間之改變量幾乎一定時，那作一等加速度的假設是可接受的；一段不易作整段描述的運動區段，經常會被分割為可資模擬逼近的數小段；由於外力或外來的力矩使機器產生運動時，軸承摩擦之阻尼效應在摩擦不大時可略之，但若我們研究的目的是在求導因摩擦過程而導致之效率減損量時，這些同樣的摩擦力就不可略而不計。因此，所牽涉到的假設之尺度須視所欲求之情報及所需的準確度而定，同學們應隨時留意實際問題在公式化時所需的各式各樣的假設。在工程問題的擬式以及求解的過程中，去了解並利用適當的假設之能力，是一個成功的工程師最重要的特徵之一。在演導現代動力學所需的原理及分析工具的同時，本書的主要目的之一，是要提供最多的機會來發展擬出漂亮的數學模式的能力。我們將強調的重點擺在廣泛的實際問題中，這些問題不僅須要理論的完全應用，而且會強制作決定有關切題假設的考慮。

在所有的工程問題中，一個解決動力學問題的有效方法是必要的，在問題的擬式及其解的陳述上養成良好的習慣將會證實是無價之寶，每一個題解由假設到結論都應依一合邏輯的步驟循序漸進，且其陳述過程應包括下列各部分的清楚陳述，各部分可清晰地看出為：

1. 已知條件
2. 所要的結論
3. 必要的插圖
4. 計算
5. 答案與結論

此外，在解題中宜穿插一系列計算的檢驗，要留意數值大小之合理性，也應隨時檢查各項的正確性及其因次齊次性。將解題作得條理分明，乾淨清爽也是很重要的，不易為他人閱讀的粗率的解答，是少有甚或毫無價值的，嚴守良好格式的訓練本身對擬式以及分析能力的發展將有莫大的幫助；許多乍看之下似乎是既困難又複雜的題目，一旦從合邏輯又受過訓練的解題方法著手，將會變得清晰簡明。

動力學這個學科是以少得出奇的基本概念和定則為基礎，然而這些概念定則却可擴充並應用到極廣泛的情況。學習動力學最有價值的方面之一，是其所提供由基本原理得來的經驗，這些經驗並非是只須死記描述各種運動的運動及動力方程式就可獲取的，而是須飽經種種不同問題的情況，去選擇、利用、擴充基本定理以配合已知的條件才能獲得。

在描述力與其所生之運動的關係時，基本上，要把一原理應用的系統定義清楚。有時候，一單一質點或是剛體是須隔離的系統，但有時候是數個物體一起形成一個系統，要被分析之系統的定義可由建立自由體圖（free-body diagram）而變得清楚，此圖包含一個定義該系統外邊界的封閉輪廓，所有與該系統接觸且施力於其上，但不是該系統部分之物體都應該移去，而代之以作用在其上之力的向量，以此方式，我們可清楚地辨出任一力的作用力與反作用力，而且所有作用在系統上之外力都應考慮進去。

在用動力學定律時，可直接將各量的數值代入解題的過程中，或者也可用代數符號來代有關的各量，將答案留成一公式；代入數值後，在各個計算步驟中，以特定單位表示的量就很清楚了，當各項大小之實際意義很重要時，用此方法較佳；然而符號解也有數個數值解所未具備的優點；第一，使用符號所得之縮寫有助於將注意力集中在物理情況與相關的數學描述的銜接；第二、符號解可檢查每一步驟的因次，而用數值解時，就無法檢查因次的齊次性；第三、當使用不同組單位和尺寸時，符號解可重複使用求出同一題目的解。熟練此二種形式的解是有必要的，在作習題時，要有充分的練習。

同學們將發現各式各樣動力方程式的解，可以三種方法中的任一一個獲得：第一、直接以手算的數學解，答案可以代數符號或是數值結果表示，

大部份的問題都屬於此類；第二、一些問題可馬上以圖解方式來處理，如決定二維剛體相對運動的速度和加速度；第三、在第二冊動力學中，有許多問題適於用計算機解，有機會接觸數值計算設備的同學可用以解一些問題。最佳解題方法之選擇，是由練習解題所獲得經驗當中重要的一面。