

内 容 简 介

本书主要讲述通用电子测量仪器的基本原理,同时,结合电子测量仪器,较系统地阐述了锁相、频率合成、取样、同步及模-数转换等方面的基本知识。对仪器中的重要电路部件有较详细的讨论,并介绍了设计方法。本书还介绍了电子测量仪器的新技术和新电路。

全书分上、下两册。上册主要讨论各种信号发生器和通用示波器。下册主要讨论取样示波器、频谱分析仪和各种数字式测量仪器。

本书可作为高等学校工科电子类测量和仪器专业的试用教材,也可供从事电子测量仪器工作的工程技术人员参考。

电子测量仪器原理

下 册

成都电讯工程学院

陈杰美 古天祥 编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092¹/₁₆ 印张23¹/₄ 541千字

1981年2月第一版 1981年2月第一次印刷 印数:00,001—13,000册

统一书号:15034·2137 定价:2.40元

前 言

本书系高等学校工科电子类测量和仪器专业统编教材（试用）。

本书主要讲述通用电子测量仪器的基本原理。其目的是使读者掌握仪器整机和主要电路部件的电气设计方法，了解电子测量仪器的发展情况，巩固和加深基础课中所学的有关知识，并帮助读者用这些知识来解决电子测量仪器中的实际问题。本课程应在全部基础课程及《电子测量原理》课完成后进行。

书中的内容是以仪器为线索来安排的，使读者建立起仪器的整机概念。同时，系统地阐述了锁相、频率合成、取样、同步、模-数转换等方面的基本知识。

本书主要讨论信号发生器、信号波形与频谱分析仪器、数字式测量仪器等三类仪器。在信号发生器中，着重分析合成信号发生器和扫频信号发生器。在信号分析仪器中，着重分析通用示波器、取样示波器和频谱分析仪。在数字式测量仪器中，主要分析电子计数器和数字电压表。这几种仪器是最通用的基本测试仪器，且在电路上各有其代表性，其他仪器大都可以由它们变换或组合而成。

本书是按讲授 200 学时编写的。实际授课学时可根据各校具体情况酌减，但最好不要低于 140 学时。在书中标有“*”的章节可以少讲或自学。每章皆附有思考题、习题和主要参考资料，以便复习和查阅。

为使理论联系实际，使用本书时，应配合一定数量的示教和实验。实验内容建议包括：取样式锁相环、示波器时基和数字面板表（双积分式或比较式）。

本书是按照 1978 年 3 月高等学校工科电子类专业教材会议所讨论审定的教学大纲编写的，由陈杰美同志主编。第一章、第六章至第十章，以及第十四章由陈杰美同志编写；第二章至第五章由钱学济同志编写；第十一章至第十三章由古天祥同志编写。

本书由南京工学院主审。下册的主审人为李樟云、邹家禄、詹宏英等同志。参加下册审稿的单位还有天津大学、南京邮电学院、上海科技大学、同济大学、华南工学院等。在编写过程中，成都电讯工程学院 103 教研室的同志提供了许多宝贵意见，在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平所限，书中定有不少缺点和错误，恳切希望读者批评指正。

编 者

目 录

第八章 取样示波器1

§ 8-1 概述1

- 一、取样的基本概念1
- 二、取样示波器的原理1
- 三、取样示波器的发展概况3

§ 8-2 取样技术4

- 一、取样过程4
- 二、取样定理及其应用5
- 三、取样系统的分析方法8
- 四、取样门的频率特性和过渡特性15

§ 8-3 取样示波器的取样电路21

- 一、开环取样电路21
- 二、闭环取样电路21
- 三、取样门30
- 四、取样脉冲发生器35

§ 8-4 取样示波器的X信道36

- 一、产生步进脉冲的原理36
- 二、阶梯波发生器39
- 三、取样示波器的时基因数41
- 四、取样示波器X信道的总体方框42
- 五、取样示波器的分频电路44

§ 8-5 随机取样示波器的原理46

§ 8-6 取样技术在其他电子测量仪器 中的应用48

第九章 示波器的应用及发展51

* § 9-1 用示波器测量电压51

- 一、标尺法51
- 二、直流偏移法52
- 三、数字法53

* § 9-2 用示波器测量时间54

- 一、标尺法54
- 二、比较法54
- 三、延时法55

* § 9-3 李沙育图形及其应用56

- 一、李沙育图形的形成56
- 二、李沙育图形的应用57
- 三、圆扫描及其应用58

§ 9-4 示波器功能的扩展60

- 一、显示晶体管的特性曲线60
- 二、时域反射计61

§ 9-5 存贮示波器62

- 一、存贮示波管的工作原理63
- 二、存贮示波器的工作特点65

§ 9-6 逻辑示波器67

* § 9-7 示波器的发展动向70

- 一、自动化70
- 二、字符显示70
- 三、实用化71

第十章 频谱分析仪73

* § 10-1 信号分析中时域和频域的关系73

- 一、傅里叶变换73
- 二、离散傅里叶变换(DFT)79
- 三、快速傅里叶变换(FFT)79

§ 10-2 频谱分析仪的工作原理80

- 一、模拟式频谱分析仪80
- 二、数字式频谱分析仪83

§ 10-3 频谱分析仪的主要工作特性84

- 一、工作特性的分类及其含义84
- 二、频率分辨率87

§ 10-4 外差式频谱分析仪90

- 一、外差式频谱分析仪的实用方框图90
- 二、外差频谱仪的主要电路部件96

* § 10-5 频谱分析仪的应用107

- 一、测试正弦信号107
- 二、测试调制信号110
- 三、测试脉冲噪声113
- 四、测试瞬变信号113
- 五、测试线性网络114
- 六、测试非线性网络114

* § 10-6 自动频谱分析仪115

第三篇 数字式测量仪器

第十一章 电子测量仪器的数字化121

§ 11-1 模拟测量和数字测量121

- 一、模拟量和数字量121
- 二、模-数转换121
- 三、模拟式测量仪器和数字式测量仪器122

§ 11-2 数字式测量仪器的特点123

第十二章 电子计数器125

| | | | |
|----------------------------|-----|--------------------------------|-----|
| § 12-1 概述 | 125 | 一、数字电压表的基本原理 | 240 |
| 一、电子计数器的分类 | 125 | 二、数字电压表的主要工作特性 | 241 |
| 二、通用计数器的基本原理 | 126 | § 13-2 模-数转换原理 | 245 |
| 三、通用计数器的几种主要测试功能 | 128 | 一、 $A-D$ 转换器的分类 | 245 |
| 四、通用计数器的主要技术指标 | 133 | 二、积分式 $A-D$ 转换器 | 246 |
| § 12-2 输入通道及其抗干扰电路 | 135 | 三、比较式 $A-D$ 转换器 | 271 |
| 一、输入通道 | 135 | 四、复合式 $A-D$ 转换器 | 287 |
| 二、抗干扰电路 | 143 | § 13-3 双斜积分式数字电压表 | 294 |
| § 12-3 十进计数器 | 147 | 一、DS-14型数字电压表 | 294 |
| *一、构成十进制计数器的基本方法 | 147 | 二、双斜积分式数字电压表的误差分析 | 306 |
| 二、异步十进计数器 | 151 | § 13-4 数字电压表的干扰及其抑制 | 320 |
| 三、同步十进计数器 | 157 | 一、串模干扰 | 320 |
| 四、中、大规模集成化的十进计数器 | 167 | 二、共模干扰 | 322 |
| § 12-4 高速十进计数器 | 173 | § 13-5 数字多用表 | 327 |
| 一、概述 | 173 | 一、交流-直流($AC-DC$)转换器 | 327 |
| *二、电流型开关 $\div 2$ 电路 | 174 | 二、电流-电压($I-V$)转换器 | 336 |
| 三、电流型 $\div 5$ 环形计数器 | 181 | 三、电阻-电压($\Omega-V$)转换器 | 337 |
| 四、高速整形电路 | 187 | *四、数字多用表的发展 | 338 |
| 五、集成化高速计数器 | 193 | 第十四章 电子测量仪器的设计制造 | |
| § 12-5 数字显示器及其驱动电路 | 197 | 与可靠性 | 347 |
| 一、译码驱动器 | 197 | § 14-1 电子测量仪器设计制造的 | |
| 二、几种主要数字显示器件 | 201 | 一般过程 | 347 |
| 三、显示器的驱动电路 | 207 | 一、设计制造电子测量仪器的步骤 | 347 |
| § 12-6 时基与控制电路 | 214 | 二、技术条件的拟定 | 348 |
| 一、时基电路 | 214 | 三、仪器的机助设计 | 350 |
| 二、控制电路 | 219 | § 14-2 电子测量仪器的可靠性 | 352 |
| § 12-7 微波计数器 | 224 | 一、概述 | 352 |
| 一、变频法 | 224 | 二、可靠性的数学表征 | 352 |
| 二、置换法 | 225 | 三、失效率的基本类型和失效的分布规律 | 354 |
| 三、取样法 | 226 | 四、元、器件的可靠性 | 357 |
| 四、转换外差法 | 226 | 五、系统的可靠性 | 360 |
| § 12-8 以时间测量为基础的计数器 | 228 | 六、提高仪器可靠性的方法 | 363 |
| 一、倒数计数器 | 229 | § 14-3 电子测量仪器的检验 | 365 |
| 二、内插法计数器 | 231 | 一、定型试验 | 365 |
| 三、游标法计数器 | 233 | 二、交收试验 | 365 |
| 第十三章 数字电压表 | 240 | 三、例行试验 | 365 |
| § 13-1 概述 | 240 | | |

第八章 取样示波器

§ 8-1 概 述

一、取样的基本概念

取样,就是从原始的大量数据甚至无穷多数据中取出少量数据作为样品,用以表达原数据的部分特性或全部特性。取样技术早已应用于各种生产活动和科学实验,而且深深地渗透到人们的日常生活中,例如,电影图象实际上就是按 24次/秒的速率对演员的表演进行取样。因此,取样技术的第一个特点是用少量样品代表大量的甚至无穷多的原始数据,以减少重复的或不必要的工作,简化制造、计算和分析过程。

快速旋转的飞轮,很难用肉眼直接观测其转速,为此可先在轮沿上注上标记,然后用闪光灯照射轮沿上的标记。当闪光灯的闪烁频率与飞轮转速相等或成整数比时,轮沿上的标记看起来是静止不动的;当闪光频率与转速不成整数比时,轮沿上的标记将按两者的差频慢慢地旋转。这种观测快速周期运动的方法称为频闪观测法。利用这种方法进行观测时,仅仅在闪光灯发光的那些时刻读取数据,因此也是一种取样法。通过频闪观测法,可以清楚地看到取样技术的第二个特点是具有频率变换的作用,它能把高频的、快速的、重复发生的现象变换成低频的、慢速的现象,从而便于观测和分析。

在通用示波器中,利用时间分割原理来进行双踪显示;在通讯和遥测、遥控等技术领域中,利用时间分割原理来实现多路传输;在模-数变换器中,把连续信号转换为离散信号,这些实际上都利用了取样技术。由此可知,取样技术的第三个特点是具有时间上的不连续性,即经取样得到的信号在时间上是离散的,因此对取样系统和取样信号的分析方法也不完全同于一般的模拟系统和连续信号。

二、取样示波器的原理

(一) 通用电子射线示波器的频带限制

目前,通用电子射线示波器所能达到的最高工作频率是 1000MHz。要把工作频率进一步提高到几千兆赫以上是有困难的,主要受到如下三方面的限制:

1. 示波管的上限工作频率首先受到偏转系统的限制(如第六章所述)。虽然采用螺旋偏转系统后,示波管的工作频率提高到 3~4GHz^[1],但是示波管的成本也提高了。利用具有行波偏转系统的行波示波管,虽然可以工作到 10GHz 以上的频段^[2],但图象尺寸小、亮度暗、灵敏度低,观测时需加上光学放大镜等辅助设备。另外,示波管的上限工作频率还受到光速的限制。例如,若要求在 6×10cm 的屏幕上显示 1GHz 正弦信号的一个周期,那么电子射线在屏幕上的运动速度应约为 2×10⁸m/s,这已经接近 3×10⁸m/s 的光速了。根据相对论可知,电子的动质量 m 和静质量 m_0 之间有如下关系:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

因此，电子运动速度 v 愈接近光速 c ，使电子偏转所需的能量就愈大，即偏转灵敏度就愈低。此外，扫速愈快，单位时间内轰击在荧光屏上的电子数就愈少，故光迹的亮度愈低。

2. Y 信道的频带宽度受到放大器件的增益-带宽积的限制，尤其是输出放大器中的晶体管，既要有高的增益-带宽积，又要有足够的输出功率和动态范围。此外，在 1GHz 以上的频段，级间的连接、 Y 信道工作特性的控制，以及机械结构等都存在很大的困难。

3. 要获得扫描因数在亚毫秒级的高速扫描，首先受到寄生电容的限制，同时也受到充电电流的限制。此外，高速扫描电压的放大也是十分困难的，更重要的是高速扫描发生器的触发晃动非常严重，故难于获得稳定的显示图象。

(二) 取样示波器的基本原理⁽³⁾⁽⁴⁾⁽⁵⁾

取样示波器的基本原理是利用取样技术把高频的、快速的重复信号变换为低频的、慢速的信号，然后再用类似于通用示波器中的方法，把取样变换后的信号显示在荧光屏上。利用取样技术变换信号的过程可用如图 8-1-1 所示的时间波形来说明。被测高频重复信号在取样脉冲出现的时刻被取样，为了使取得的样品能表征被测信号瞬时幅度的变化情况，取样脉冲出现的时刻应每取样一次，就较被测信号延迟一段时间 Δt ，以便取样脉冲扫遍被测信号的波形。取样后的信号仍然是一串窄脉冲，但是它的幅度却代表着取样时刻的被测信号的幅度，因此取样后的信号的包络完全相似于被测信号的波形，只是时间大大拉长了，速度大大减慢了。如果被测信号的周期为 T ，那么速度减慢的倍数为

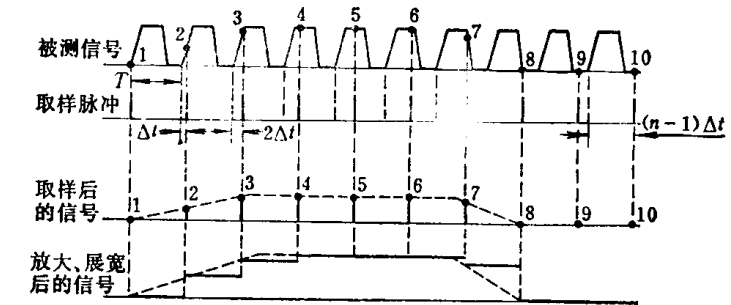


图 8-1-1 取样示波器的取样过程

如果每 m 个周期取样一次，那么速度减慢的倍数为

$$q = n = \frac{T}{\Delta t} \quad (8.1.1)$$

如果每 m 个周期取样一次，那么速度减慢的倍数为

$$q = nm = \frac{mT}{\Delta t} \quad (8.1.2)$$

取样后的信号还不能直接用来显示，这是因为：（1）取样后的信号是一串很窄的脉冲，它占有的频带是很宽的，甚至超过被测信号占有的频带；（2）由于取样脉冲很窄，而取样电路本身有一定的时间常数，因此取样信号的幅度一般只能达到被测信号的 2~10%。由于上述原因，在取样电路之后，还必须对取样信号进行放大和低通滤波（或脉冲展宽），然后才能像通用示波器那样进行显示。

根据上述的取样过程，可以画出取样电路的基本方框图，如图 8-1-2 所示。它主要包

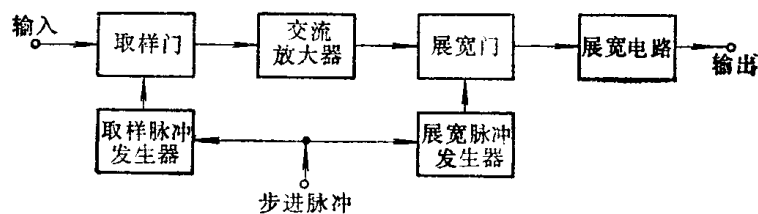


图 8-1-2 取样电路的基本方框图

括取样和展宽两部分。取样部分由取样门和取样脉冲发生器组成。取样信号经交流放大器放大和滤波后送到展宽部分。展宽部分由展宽门、展宽脉冲发生器和展宽电路组成。展宽电路实际上是一个电容记忆电路，它把放大后的取样信号幅度值记忆保持下来，待到下一次取样完成后再转换到新的取样电平上，因此展宽部分又常常叫做记忆部分。取样部分和展宽部分是同步工作的，它们都由每取样一次就延迟一段时间的 Δt 延迟信号（常称为步进脉冲）所驱动。

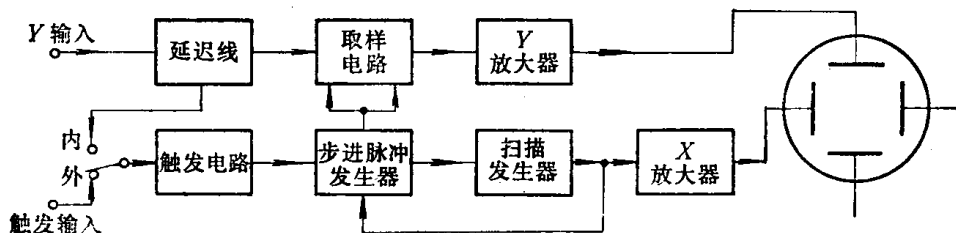


图8-1-3 取样示波器的基本方框图

根据上述取样过程和通用示波器的原理，可以拟定出取样示波器的基本方框图，如图8-1-3所示。由图可以看出，除了具有取样电路以外，取样示波器与通用示波相比，还具有如下一些特点：

(1) 为了便于在内触发状态时观测到信号的前沿，延迟线的位置必须置于取样电路之前。

(2) 取样示波器的X信道部分不但要产生时基扫描信号，而且还要产生步进脉冲去控制Y信道的取样电路。

(3) 在通用示波器中，每触发一次产生一个完整的扫描信号；而在取样示波器中，每触发一次，只得到一个取样点，因此扫描信号也只上升一阶。这就是说，取样示波器中的扫描信号是阶梯式变化的，而不是线性变化的。

(4) 由于荧光屏上显示的信号波形是由若干个点组成的，而相邻两个取样点间的实际时间间隔为 $mT + \Delta t$ （参见图8-1-1），因此取样示波器不像通用示波器那样，在信号经历的实际时间内显示信号波形。这种测量时间大于被测信号的实际持续时间的测量方法称为非实时测量。由于取样示波器的非实时性，因此它只能观测重复信号（重复周期不一定是常数），而不能观测单次脉冲信号或重复频率很低的信号。

需要注意的是，利用取样技术的测量，不一定是非实时测量，例如通用示波器中的“断续”双踪显示则属于实时测量。

三、取样示波器的发展概况

早在1849年，取样技术就被用作测量高速电信号的一种方法，但第一台实用的取样示波器是在1950年才出现的，其带宽仅为50MHz。1952年有带宽为300MHz的取样示波器的商品出现。早期的取样示波器采用差频的办法来获得步进脉冲，其稳定性较差。1957年提出了利用阶梯波与锯齿波比较形成步进脉冲的方法⁽⁶⁾，大大提高了取样示波器的稳定性。用晶体二极管代替多极电子管制作取样门后，使取样示波器的有效带宽迅速提高。取样示波器在六十年代得到很大的发展，其有效带宽扩展到18GHz，同时出现了不

少由取样示波器组成的宽带综合测试系统，其中，时域反射计是一个典型的代表。在七十年代，取样示波器的发展速度较慢，最高的带宽一直保持在18GHz的水平上，这主要是因为取样示波器只能观测重复信号，而很多高速信号却是单次出现的^[1]。

§ 8-2 取样技术^{[7][8]}

一、取样过程

时间信号可以分为连续信号与离散信号两类。在确定的时间范围内的任何时刻都具有特定数值的信号，称为这个时间范围内的连续信号，例如

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \cos \omega t & t > 0 \end{cases}$$

是在 $-\infty \leq t \leq \infty$ 时间范围内的连续信号。如果信号只在某些离散的瞬间具有确定的数值，那么这种信号称为离散信号，例如

$$y(t) = y(n) = \begin{cases} 0 & n < -1 \\ 2^{-n} + 3n & n \geq -1 \end{cases} \quad (n \text{ 为整数})$$

是一个离散信号，它的波形如图 8-2-1 所示。

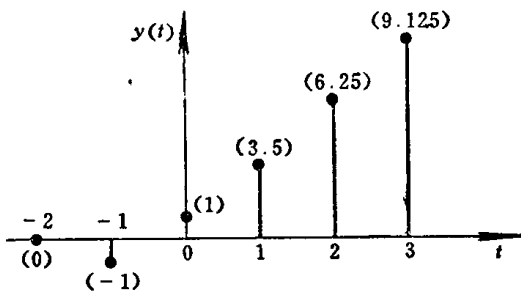


图 8-2-1 离散信号的波形

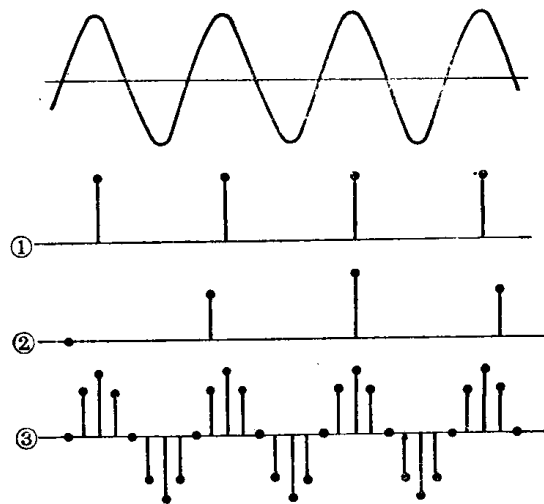


图 8-2-2 正弦信号相应的三种离散信号

把连续信号变换为离散信号，同时保证两信号在同一时刻具有相等的或成比例的瞬时值的过程称为取样。相邻两取样点之间的时间间隔可以是相等的，也可以是不等的；间隔也可能较疏，也可能较密。因此同一个连续信号可以变换出很多个离散信号，在图 8-2-2 中画出了与正弦连续信号相应的三种离散信号。第一种离散信号携带有原信号幅度峰值的信息，因此可用于测量信号的幅度。事实上，在峰值检波器中，检波二极管的电流波形就类似于这种离散信号。第二种离散信号的取样方式与图 8-1-1 所示的情况相同，称为顺序取样，在非实时取样示波器中得到广泛应用。第三种取样类似于通用示波器的“断续”双踪显示，在实时取样示波器中得到了广泛应用。

在电路上，取样通常是用电子调制器或电子开关（常称为取样门）来实现的，如图 8-2-3 所示。取样门通常是断开的，只有当取样脉冲 $p(t)$ 到来时才闭合，因此可以把取样过程看作是输入信号 $y(t)$ 对取样脉冲进行幅度调制的过程，如图 8-2-4 所示。故取

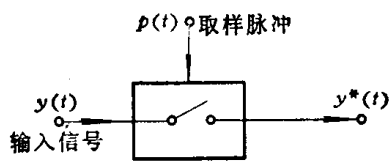


图8-2-3 取样门

样信号 $y^*(t)$ 与输入信号 $y(t)$ 之间的关系为

$$y^*(t) = y(t) p(t) \quad (8.2.1)$$

由图 8-2-4 可知，取样脉冲 $p(t)$ (更准确地说 是取样门的开关信号) 的数学表达式为

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t_n \leq t \leq t_n + \tau \\ 0 & t_n > t > t_n + \tau \end{cases} \quad (8.2.2)$$

式中 t_n ——第 n 次取样开始的时刻；

τ ——取样时间，即取样门闭合的时间。

在一般情况下，取样时间 τ 是很短的，因此可以认为输入信号 $y(t)$ 在 τ 的时间内几乎没有变化，即 $y(t_n) \approx y(t_n + \tau)$ 。在这种情况下，式 (8.2.1) 可改写为

$$y^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y(t_n) [u(t - t_n) - u(t - t_n - \tau)] \quad (8.2.3)$$

式中 $u(t - t_n)$ ——在时刻 t_n 出现的单位阶跃函数。

实际中最常用的是等间隔周期取样，故式 (8.2.3) 又可写为

$$y^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT_p) [u(t - nT_p) - u(t - nT_p - \tau)] \quad (8.2.4)$$

当取样时间 $\tau \rightarrow 0$ 时，取样脉冲可看成是周期重复的单位脉冲函数。若用 $\delta_T(t)$ 表示周期重复的单位脉冲函数，那么式 (8.2.4) 又可改写为

$$y^*(t) = y(t) \delta_T(t) \quad (8.2.5)$$

二、取样定理及其应用

同一个连续信号通过取样可以变换出无穷多个离散信号；反过来，同一个取样信号也可以和无穷多个连续信号相对应。另外，乍看起来，把连续信号变换为离散信号时，取样点之间的信息是丢掉了，为了不损失原信号的信息，似乎应该连续地进行取样。然而连续地取样是不现实的，这样就提出了一个如何取样才能无失真地恢复原信号信息的问题，取样定理的目的，就在于确定能够从取样信号中恢复原信号的全部信息的条件。

(一) 取样信号的频谱^[9]

由式 (8.2.5) 可知，取样信号 $y^*(t)$ 的频谱不但与信号 $y(t)$ 有关，还和周期单位脉冲函数 $\delta_T(t)$ 有关。因为 $\delta_T(t)$ 是周期函数，所以它的频谱必然是离散分布的，相邻两谱线间的距离等于重复频率 $f_p = 1/T_p$ ，各条谱线的幅度为

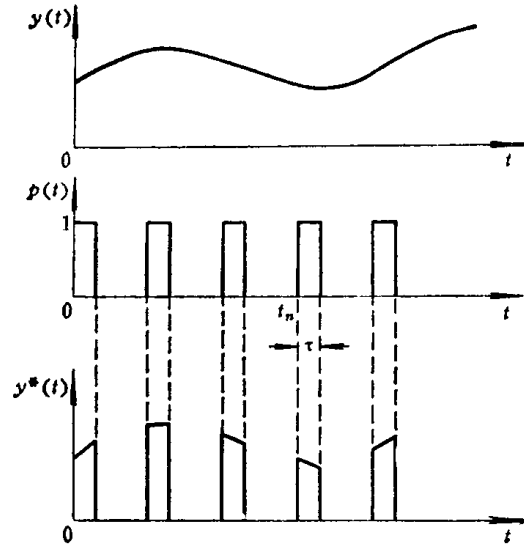


图8-2-4 取样过程

$$\begin{aligned}\Delta_T(n\omega_p) &= \frac{1}{T_p} \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} \frac{1}{\tau} e^{-jn\omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left| \frac{1 - e^{-jn\omega_p \tau}}{jn\omega_p \tau} \right| \\ &= \frac{1}{T_p} \lim_{\tau \rightarrow 0} \left| \frac{1 - \cos n\omega_p \tau + j \sin n\omega_p \tau}{jn\omega_p \tau} \right| = \frac{1}{T_p}\end{aligned}\quad (8.2.6)$$

式中

$$\omega_p = \frac{2\pi}{T_p}$$

$\delta_T(t)$ 的时间波形和频谱图形如图 8-2-5 所示, 图 8-2-5(a) 中的箭头表示幅度为无穷大。



图8-2-5 $\delta_T(t)$ 的时间波形和频谱图

(a) 时间波形; (b) 频谱图。

根据傅里叶级数可知, 周期性时间函数 $f(t)$ 与它的频谱幅度 $F(n\omega)$ 之间的关系为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega) e^{jn\omega t} \quad (8.2.7)$$

故由式 (8.2.6) 可得 $\delta_T(t)$ 的时间函数式为

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_p t} \quad (8.2.8)$$

将上式代入式 (8.2.5) 可得取样信号的时间函数式为

$$y^*(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(t) e^{jn\omega_p t} \quad (8.2.9)$$

将式 (8.2.9) 进行傅里叶变换, 则可得到取样信号的频谱密度函数为

$$\begin{aligned}Y^*(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega - n\omega_p)t} dt = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(\omega - n\omega_p)\end{aligned}\quad (8.2.10)$$

式中 $Y(\omega)$ ——原连续信号 $y(t)$ 的频谱密度函数。

实际的取样脉冲总是具有有限的宽度, 设为 τ ; 如果取样脉冲的高度为 $1/\tau$, 则取样脉冲的各谱线幅度为

$$P(n\omega_p) = \frac{1}{T_p \tau} \int_0^{\tau} e^{-jn\omega_p t} dt = \frac{1}{T_p} \frac{1 - e^{-jn\omega_p \tau}}{jn\omega_p \tau} \quad (8.2.11)$$

比较式 (8.2.11) 和式 (8.2.6) 可知, 周期矩形脉冲的频谱较周期脉冲函数的频谱多了一个因子, 即

$$V(n\omega_p\tau) = \frac{1 - e^{-jn\omega_p\tau}}{jn\omega_p\tau} \quad (8.2.12)$$

这个因子的模为

$$|V(n\omega_p\tau)| = \left| \frac{\sin \frac{n\omega_p\tau}{2}}{\frac{n\omega_p\tau}{2}} \right| \quad (8.2.13)$$

因此, 当取样脉冲为周期矩形脉冲时, 取样信号的频谱密度函数为

$$Y^*(\omega) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V(n\omega_p\tau) Y(\omega - n\omega_p) \quad (8.2.14)$$

(二) 取样定理

由式 (8.2.10) 和式 (8.2.14) 可知, 取样信号 $y^*(t)$ 的频谱 $Y^*(\omega)$ 是由原信号 $y(t)$ 的频谱 $Y(\omega)$ 的无穷系列组成的, 相邻两单元之间的距离等于取样脉冲的重复频率 ω_p , 而和取样脉冲宽度 τ 无关。当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $Y^*(\omega)$ 中各单元的幅度是相等的; 当 τ 为有限值时, $Y^*(\omega)$ 中的高次单元的幅度将按 $|V(n\omega_p\tau)|$ 的规律逐步减小。

实际中遇到的原信号 $y(t)$ 都只占有有限的频谱宽度。设其上限频率为 ω_h , 其频谱分布如图 8-2-6 (a) 所示, 那么 $Y^*(\omega)$ 可能有两种不同的分布情况: 当 $\omega_h \leq \omega_p/2$ 时, $Y^*(\omega)$ 可由图 8-2-6 (b) 表示; 当 $\omega_h > \omega_p/2$ 时, $Y^*(\omega)$ 可由图 8-2-6 (c) 表示。由图可见, 在 $\omega_h \leq \omega_p/2$ 的情况下, $Y^*(\omega)$ 中的各单元互不重叠, 因此各个单元都有和原信号完全相同的频谱分布。这就是说, 取出 $Y^*(\omega)$ 中的任一单元, 都可能完全恢复原信号所携带的信息, 例如, 可以用一个截止频率为 ω_h 的低通滤波器从 $y^*(t)$ 中恢复出 $y(t)$ 。在 $\omega_h > \omega_p/2$ 的情况下, $Y^*(\omega)$ 中的相邻单元将互相重叠, 因此各单元都和 $Y(\omega)$ 的分布情况不同。这就是说, 不可能从取样信号中无失真地恢复原信号。

根据上述的分析可以得出如下结论: 为了使取样信号 $y^*(t)$ 能完全恢复原信号 $y(t)$, 取样脉冲 $p(t)$ 的重复频率 ω_p 必须大于或等于原信号 $y(t)$ 的最高频率 ω_h 的二倍。这一结论称为取样定理, 因为该定理首先由香农于 1948 年提出, 所以又常称为香农定理。 $\omega_{p\min} = 2\omega_h$ 是无失真取样的最小取样频率, 常称为奈奎斯特速率。取样定理的数学表达形式为

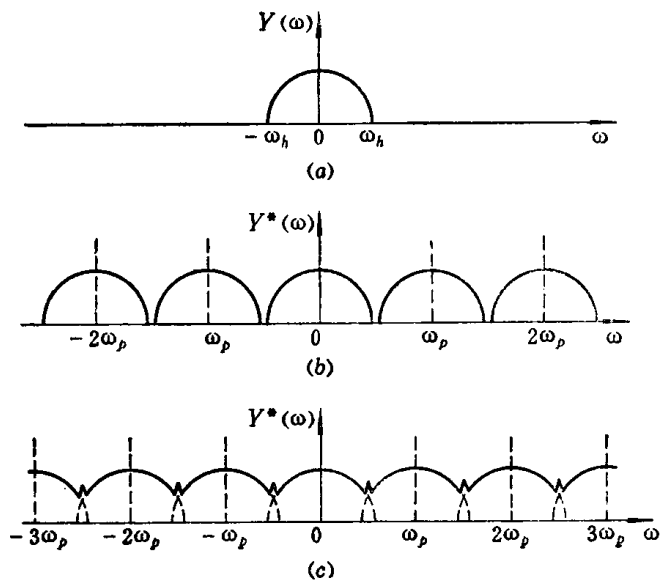


图8-2-6 取样信号的频谱

(a) 原信号频谱; (b) $\omega_h \leq \omega_p/2$ 的 $Y^*(\omega)$;
(c) $\omega_h > \omega_p/2$ 的 $Y^*(\omega)$ 。

$$\omega_p \geq 2\omega_h \quad (8.2.15)$$

使用取样定理时应该注意，最高频率 ω_h 不但包括原信号中的有用频率分量，而且还包括原信号中的噪声和干扰频率分量。

(三) 取样定理在取样示波器中的应用

上述的取样定理是在实时取样的情况下导出的，因此它不但适用于原信号是重复信号的情况，而且也适用于原信号是非重复信号的情况；但是它却不能直接用于采用非实时取样的取样示波器。事实上，从取样定理可知，取样信号不但不能降低原信号的频率，而且比原信号频率高得多。

从图 8-1-1 可知，在非实时取样时，为了使取样信号的包络逼真地反映原信号的波形，相邻两次取样脉冲之间的延迟时间 Δt 应该足够小；而且原信号中的高频分量愈丰富，则 Δt 应该愈小。例如，若原信号的前沿愈陡峭，那么 Δt 就应该愈小，才能使取样信号如实地反映原信号前沿的变化情况。这说明，非实时取样中的 Δt 相当于实时取样中的取样周期 T_p 。因此，根据取样定理，在非实时取样的情况下，为了使取样信号的包络无失真地重现原信号的波形，应该满足如下条件：

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f_h} \quad (8.2.16)$$

式中 f_h ——原信号中的最高频率。

若原信号的重复周期为 T ，那么当取样示波器显示出原信号的一个周期波形时，该波形实际上是由 n 个点组成的，点数 n 为

$$n = \frac{T}{\Delta t} \geq 2f_h T \quad (8.2.17)$$

这就是说，当点数 n 足够多，以致满足上式的要求时，取样示波器显示的波形能真实地反映原信号的波形。

如果取样示波器的水平轴刻度为 10 格，那么每格的点数为

$$M = \frac{n}{10} \geq \frac{1}{5} f_h T \quad (8.2.18)$$

M 称为取样示波器的取样密度。

在一般情况下，可把 T 看成是原信号的基波周期， f_h 看成是原信号的最高次谐波频率，故式 (8.2.18) 可改写成

$$M \geq \frac{k_{\max}}{5} \quad (8.2.19)$$

式中 k_{\max} ——原信号包含的最高谐波次数。

通常，取样示波器的取样密度为 5~100 点/格。

三、取样系统的分析方法

(一) 用拉普拉斯变换分析取样系统

具有取样门的电路系统称为取样系统，如果取样系统是线性的，那么就可以用拉普拉斯变换来进行分析。图 8-2-7 是一个简单的开环取样系统，图中方框 A 、 C 分别是输入、输出取样门，两个取样门是同步工作的；方框 B 是某一线性电路，它的脉冲响应为 $h(t)$ ，

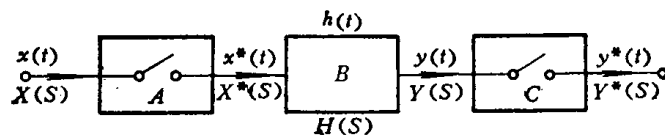


图8-2-7 单级开环取样系统

传输函数为 $H(S)$ 。由图不难求得电路 B 的输出信号 $y(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$Y(S) = H(S)X^*(S) \quad (8.2.20)$$

式中 $X^*(S)$ ——电路 B 的输入信号 $x^*(t)$ 的拉普拉斯变换。

由于 $x^*(t)$ 是整个系统输入信号 $x(t)$ 的取样信号，因此据式 (8.2.9) 可知：

$$x^*(t) = \frac{1}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_p t}$$

为简便起见，令取样周期 $T_p = 1$ ，则上式可改写为

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2n\pi t} \quad (8.2.21)$$

对上式两端分别进行拉氏变换，得

$$X^*(S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(S - j2n\pi) \quad (8.2.22)$$

根据式 (8.2.20) 和式 (8.2.22) 可进一步求得图 8-2-7 所示取样系统的输出信号 $y^*(t)$ 的拉氏变换为

$$\begin{aligned} Y^*(S) &= [H(S)X^*(S)]^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(S - j2m\pi) X^*(S - j2m\pi) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(S - j2m\pi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[S - j2(n+m)\pi] \end{aligned}$$

由于 n 、 m 都是从 0 到 $\pm\infty$ 的整数，因此 $n+m$ 也是从 0 到 $\pm\infty$ 的整数，故上式可写为

$$Y^*(S) = H^*(S)X^*(S) \quad (8.2.23)$$

式中
$$H^*(S) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(S - j2m\pi) \quad (8.2.24)$$

由式 (8.2.23) 可知，取样系统的输入与输出信号之间的关系和一般的线性电路系统是类似的，因此可以把 $H^*(S)$ 称为取样系统的传输函数。

(二) Z变换

利用拉普拉斯变换虽然能分析取样系统，但有时是不方便的，甚至是不可能的，其主要原因如下：

- (1) 由式 (8.2.22)、(8.2.24) 可知，在求解 $X^*(S)$ 或 $H^*(S)$ 的过程中，需要对无穷级数进行求和，但在有些情况下，这个无穷级数是发散的。
- (2) 在 $X^*(S)$ 或 $H^*(S)$ 的无穷级数中，常常会出现指数函数等超越函数，因此运算较困难。

〔例〕 设 $x(t) = t$ ，则它的取样信号为

$$\begin{aligned} x^*(t) &= x(t) \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_p) \delta(t - nT_p) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} nT_p \delta(t - nT_p) \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

故 $x^*(t)$ 的拉氏变换为

$$X^*(S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nT_p e^{-nST_p} \quad (8.2.26)$$

若 $T_p = 1$ ，则上式可写为

$$X^*(S) = e^{-S} + 2e^{-2S} + 3e^{-3S} + \dots \quad (8.2.27)$$

这是一个由拉氏算子 S 的指数函数组成的无穷级数，当 $S \leq 0$ 时，这个级数是发散的。

为了便于运算，并避免级数不收敛的情况发生，引入一个新的复数算子 Z ，令

$$Z = e^{ST_p} \quad (8.2.28)$$

则式 (8.2.27) 可改写为

$$X(Z) = \frac{1}{Z} + \frac{2}{Z^2} + \frac{3}{Z^3} + \dots = \frac{Z}{(Z-1)^2} \quad (8.2.29)$$

$X(Z)$ 称为取样信号 $x^*(t)$ 的 Z 变换。

根据上面的例子可知，在一般的情况下， Z 变换定义为

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_p) Z^{-n} = x(0) + x(T_p) Z^{-1} + x(2T_p) Z^{-2} + \dots \quad (8.2.30)$$

若令 $T_p = 1$ ，则上式改写为

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n} \quad (8.2.31)$$

在进行 Z 变换时，还必须注意变换得以实现的区域，在这个区域内，由式 (8.2.31) 表示的无穷级数是收敛的，这个区域称为 Z 变换的绝对收敛区。例如，由式 (8.2.29) 表示的 Z 变换的绝对收敛区为 $|Z| > 1$ ，该收敛区在 Z 的复平面上的图形是以原点为圆心，半径为 1 的圆，如图 8-2-8 所示的斜线区。

在有些情况下，尽管 Z 变换的表达式相同，但因其绝对收敛区不同，因此原离散信号也不同。例如离散信号

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

和离散信号

$$x_2(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

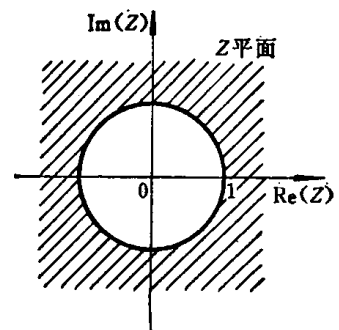


图8-2-8 $x(n) = n$ 的 Z 变换的绝对收敛区

都具有相同的 Z 变换, 即

$$X(Z) = \frac{5Z}{(2-Z)(3Z-1)}$$

但是 $x_1(n)$ 的绝对收敛区为 $1/3 < |Z| < 2$; $x_2(n)$ 的绝对收敛区为 $|Z| > 2$ 。因此, 只有当 Z 变换表达式及其绝对收敛区都给定时, 原信号才是唯一确定的。

(三) Z 变换的反变换

Z 变换的反变换式为^[8]

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c X(Z) Z^{n-1} dZ \quad (8.2.32)$$

式中 c —— 在 $X(Z)$ 的绝对收敛区内的任一闭合曲线。

式 (8.2.32) 中线积分的箭头表示积分是按逆时针方向进行的。

式 (8.2.32) 的线积分可以用留数进行计算, 此时该式可改写为

$$x(n) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N r_{ik} & n \geq 0 \\ -\left(\sum_{k=1}^M r_{ok} \right) & n < 0 \end{cases} \quad (8.2.33)$$

式中 $\sum_{k=1}^N r_{ik}$ —— $X(Z)Z^{n-1}$ 在曲线 c 内的极点上的留数之和;

$\sum_{k=1}^M r_{ok}$ —— $X(Z)Z^{n-1}$ 在曲线 c 外的极点上的留数之和。

函数 $X(Z)Z^{n-1}$ 在简单极点 Z_0 上的留数为

$$r = (Z - Z_0) X(Z) Z^{n-1} |_{Z=Z_0} \quad (8.2.34)$$

函数 $X(Z)Z^{n-1}$ 在 m 阶极点 Z_0 上的留数为

$$r = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dZ^{m-1}} [(Z - Z_0)^m X(Z) Z^{n-1}] |_{Z=Z_0} \quad (8.2.35)$$

〔例〕 已知某离散信号的 Z 变换为

$$X(Z) = \frac{Z^3}{(Z-1)(Z-2)^2} \quad (8.2.36)$$

其绝对收敛区为 $1 < |Z| < 2$, 求该离散信号。

〔解〕 该 Z 变换的绝对收敛区如图 8-2-9 中的斜线区所示, 它是一个以原点为中心的

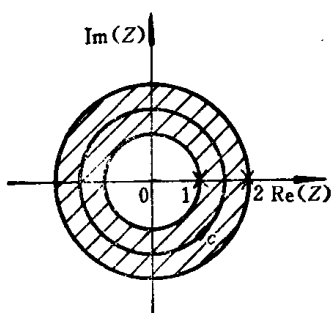


图8-2-9 $1 < |Z| < 2$ 绝对收敛区

圆环, 因此曲线 c 即是环内的某一闭合曲线, 例如是以原点为圆心, 半径大于 1 但小于 2 的一个圆。

由式 (8.2.36) 可知, $X(Z)$ 有两个极点 $Z_{01} = 1$, $Z_{02} = 2$, 即图中标有叉号的地方。其中 Z_{01} 在曲线 c 内侧, 且为简单极点; Z_{02} 在 c 外侧, 且为二阶极点。故根据式 (8.2.33)~(8.2.35) 可求得原离散信号为

$$x(n) = \begin{cases} (Z-1) \frac{Z^3 Z^{n-1}}{(Z-1)(Z-2)^2} \Big|_{Z=1} = 1 & n \geq 0 \\ -\frac{d}{dZ} (Z-2)^2 \frac{Z^3 Z^{n-1}}{(Z-1)(Z-2)^2} \Big|_{Z=2} = -n 2^{n+1} & n < 0 \end{cases}$$

一些常用的离散信号的 Z 变换列于表 8-1 中。

表 8-1 常用离散信号的 Z 变换

| 离散信号 $x(n)$ | Z 变换 $X(Z)$ | 离散信号 $x(n)$ | Z 变换 $X(Z)$ |
|--------------------------------|---------------------------|---|---|
| 1 0 | $n=0$ $0 < n < \infty$ | 1 | 1 |
| 0 | $n=k$ $k < n < \infty$ | Z^{-k} | Z^{-k} |
| 1 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z}{Z-1}$ | $\frac{Z}{Z-1}$ |
| a^n 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z}{Z-a}$ | $\frac{Z}{Z-a}$ |
| a^n b^n | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z}{Z-a} + \frac{1}{1-Z/b} - 1$ | $\frac{Z}{Z-a} + \frac{1}{1-Z/b} - 1$ |
| n 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z}{(Z-1)^2}$ | $\frac{Z}{(Z-1)^2}$ |
| n^2 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z(Z+1)}{(Z-1)^3}$ | $\frac{Z(Z+1)}{(Z-1)^3}$ |
| 1 $n!$ 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $e^{1/Z}$ | $e^{1/Z}$ |
| $\sin(n\omega_0)$ 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z \sin \omega_0}{Z^2 - 2Z \cos \omega_0 + 1}$ | $\frac{Z \sin \omega_0}{Z^2 - 2Z \cos \omega_0 + 1}$ |
| $\cos(n\omega_0)$ 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z(Z - \cos \omega_0)}{Z^2 - 2Z \cos \omega_0 + 1}$ | $\frac{Z(Z - \cos \omega_0)}{Z^2 - 2Z \cos \omega_0 + 1}$ |
| $e^{-an} \sin(n\omega_0)$ 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z e^{-a} \sin \omega_0}{Z^2 - 2Z e^{-a} \cos \omega_0 + e^{-2a}}$ | $\frac{Z e^{-a} \sin \omega_0}{Z^2 - 2Z e^{-a} \cos \omega_0 + e^{-2a}}$ |
| $e^{-an} \cos(n\omega_0)$ 0 | $n \geq 0$ $n < 0$ | $\frac{Z(Z - e^{-a} \cos \omega_0)}{Z^2 - 2Z e^{-a} \cos \omega_0 + e^{-2a}}$ | $\frac{Z(Z - e^{-a} \cos \omega_0)}{Z^2 - 2Z e^{-a} \cos \omega_0 + e^{-2a}}$ |
| $x(n+1)$ | | $ZX(Z) - Zx(0)$ | $ZX(Z) - Zx(0)$ |
| $x(n+2)$ | | $Z^2X(Z) - Z^2x(0) - Zx(1)$ | $Z^2X(Z) - Z^2x(0) - Zx(1)$ |
| $nx(n)$ | | $-Z \frac{d}{dZ} X(Z)$ | $-Z \frac{d}{dZ} X(Z)$ |
| $\frac{1}{n} x(n)$ | | $-\int \frac{X(Z)}{Z} dZ$ | $-\int \frac{X(Z)}{Z} dZ$ |
| $\frac{1}{n+a} x(n)$ | | $-Z^a \int \frac{X(Z)}{Z^{a+1}} dZ$ | $-Z^a \int \frac{X(Z)}{Z^{a+1}} dZ$ |
| $a^n x(n)$ | | $X\left(\frac{Z}{a}\right)$ | $X\left(\frac{Z}{a}\right)$ |

(四) 用 Z 变换分析取样系统^{[9][10][11]}

1. 单级开环取样系统的分析

将式 (8.2.23) 中的拉氏变换转换成 Z 变换, 则对图 8-2-7 所示的单级开环取样系统可以得到如下的数学表达式:

$$Y(Z) = H(Z)X(Z) \quad (8.2.37)$$

式中 $X(Z)$ ——输入取样信号 $x^*(t)$ [或写为 $x(n)$] 的 Z 变换;

$Y(Z)$ ——输出取样信号 $y^*(t)$ [或写为 $y(n)$] 的 Z 变换;

$H(Z)$ ——取样系统的脉冲响应的 Z 变换, 亦可称为取样系统的传输函数。

利用式 (8.2.37) 则可对取样系统进行分析。

〔例〕 设某取样系统的输入信号为

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

该取样系统的脉冲响应为

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

求该系统的输出信号 $y(n)$ 。

〔解〕 先分别求出 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 Z 变换为

$$X(Z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}Z} + \frac{Z}{Z - \frac{1}{3}} - 1 = \frac{5Z}{(2-Z)(3Z-1)}$$

$$H(Z) = \frac{Z}{Z - \frac{1}{2}} = \frac{2Z}{2Z-1}$$

将 $X(Z)$ 、 $H(Z)$ 代入式 (8.2.37) 求得输出信号的 Z 变换为

$$Y(Z) = \frac{10Z^2}{(2-Z)(3Z-1)(2Z-1)} = \frac{8/3}{2-Z} + \frac{10/3}{2Z-1} - \frac{2}{3Z-1}$$

由 $Y(Z)$ 经反变换求得输出信号为

$$y(n) = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ \frac{4}{3}2^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n & n \leq 0 \end{cases}$$

2. 多级开环取样系统的分析

在图 8-2-10 中画出了两种双级开环取样系统，一种是两级直接相连，如图 8-2-10(a) 所示；另一种是两级通过同步工作的取样门连接，如图 8-2-10(b) 所示。对于图 8-2-10(a)

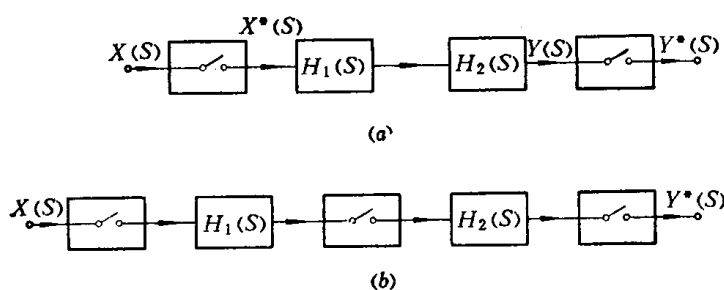


图 8-2-10 双级开环取样系统

(a) 级间直接连接；(b) 级间由取样门连接。

所示之取样系统，其输出信号的拉氏变换为

$$Y^*(S) = [H_1(S)H_2(S)X^*(S)]^* = \overline{H_1H_2}^*(S)X^*(S) \quad (8.2.38)$$

故输出信号的 Z 变换为

$$Y(Z) = \overline{H_1H_2}(Z)X(Z) \quad (8.2.39)$$