GAODENG SHUXUE

高等数学

- （物理类专业用）
- （第二版）
- 第四册（数学物理方法）
- 四川大学数学系高等数学微分方程教研室 编

高等教育出版社

高 等 学 校 教 材

高 等 数 学

(数学物理方法)

(物理类专业用)

(第二版)

四川大学数学系高等数学教研室编

高 等 教 育 出 版 社

出版前言

本书内容为数学物理方法，包括复变函数论、数学物理方程、积分变换和特殊函数等部分，可供综合大学和师范学院物理类专业作为教材。

本书第一、二、三篇分别由唐志远，姚昌瑞，吴元恺执笔

第二版由梁昆淼教授初审，并由理科数学教材编审委员会高等数学编审组委托欧维义副教授复审。

本书第一版系由梁昆淼教授与马元鹏同志主审。

高等学校教材

高等数学

（数学物理方法）

（物理类专业用）

（第二版）

第四册

四川大学数学系高等数学微分方程教研室编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

文字六〇三厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 13 字数 310 000

1979年8月第1版 1985年6月第2版 1989年2月第5次印刷

印数 63 581—72 090

ISBN 7-04-001205-7/O·355

定价 3.00 元

目　录

第一篇　复变函数论

大家知道，在解一元二次方程$aX^2+bX+c=0$(这里 a,b,c 都是实数且 $a\neq0$) 时，如果判别式 $b^2-4ac<0$，就会遇到负数开方的问题. 最简单的一个例子是在解 $X^2+1=0$ 时遇到的-1 开平方. 为了使负数开平方有意义，也就是要使这类方程有解，我们需要扩大数的范围. 这就引进一种所谓**虚数**，用符号 i 当作虚数单位，即规定

(i) $i^2=-1$;

(ii) 它与实数在一起可以进行通常的四则运算.

根据这个规定就会出现形如 $x+iy$(这里 x, y 都是实数)的数，我们把它叫做**复数**.

复变函数论要研究的是：复变数 $z=x+iy$ 的函数的基本概念和理论及其一些应用. 复变函数理论的发展与数学分析是不能分离的，但它有它自身的特点，它的中心对象是解析函数. 由于解析函数具有许多独特的性质，致使复变函数论方法不但在纯粹数学各个部门有很多的应用，而且在各种应用数学、数学物理课程中也有广泛的应用，成为一种不可缺少的强有力的工具.

第一章　复数与复变函数

*第一节　复　　数①

§1.1.1. 复数域

所谓**复数**，是指形如 $z=x+iy$ 的数，其中 $i=\sqrt{-1}(i^2=-1)$ 称为**虚单位**，x, y 都是实数，分别称为复数 z 的**实部**与**虚部**，记为 $x=\mathrm{Re}z, y=\mathrm{Im}z$.

实部为 0 的复数 $0+iy=iy$ 称为**纯虚数**，或**虚数**．虚部为0的复数 $x+i\cdot 0=x$ 就是实数．因此，全体实数是全体复数的一部分．实部与虚部都为 0 的复数称为复数 0，记为 0．故 $x+iy=0$ 必须且只须 $x=0, y=0$.

复数的相等与加、减、乘、除等运算是这样规定的：

(i) $x_1+iy_1=x_2+iy_2$，必须且只须 $x_1=x_2, y_1=y_2$；

(ii) $(x_1+iy_1)\pm(x_2+iy_2)=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$；

(iii) $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$；

(iv) $$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}$$
$$=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},$$

其中 $x_2+iy_2\neq 0$.

显然，除法是乘法的逆运算．

若 $z_1=x_1+iy_1, z_2=x_2+iy_2, z_3=x_3+iy_3$，则以下的交换律、结

① 作有记号 * 的各节是指与微积分中有关部分平行的内容，只作扼要讲解．

合律和分配律成立:

交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$;

结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$, $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;

分配律: $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

全体复数在引进上述相等关系和运算法则之后,称为**复数域**. 在复数域中没有复数大小的概念.

我们称两个复数 $x+iy$ 与 $x-iy$ 为**共轭复数**,或者说,这两个复数共轭. 如其中一个记为 z,则另一个记为 $\bar{z}$. 共轭复数有一些简单而重要的性质,例如

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2,$$

$$z+\bar{z}=2x=2\mathrm{Re}z,$$

$$z-\bar{z}=2iy=2i\mathrm{Im}z.$$

§1.1.2. 复平面

一个复数 $z=x+iy$,本质上由一对有序实数 (x, y) 唯一确定,于是能够建立平面上的全部点和全体复数间一一对应的关系(图1.1). 由于 x 轴上的点对应着实数,故 x 轴称为**实轴**,y 轴上的点对应着纯虚数,所以 y 轴称为**虚轴**,这样表示复数的平面称为**复平面**或 **z 平面**.

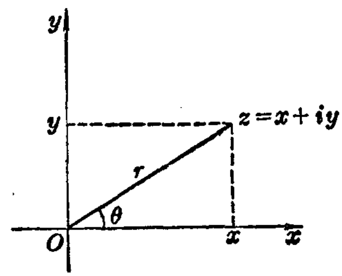

图 1.1

引进复平面之后,我们在"数"和"形"之间就建立了联系. 今后,我们不再区分"数"和"点"了,说到"点"可以指它所代表的"数",说到"数"也可以指这个数所代表的"点".

在复平面上,从原点到点 $z=x+iy$ 所引的矢量与这个数 z 也构成一一对应关系,且复数相加、减与矢量相加、减的法则是一致的.

例如，若 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$，则 $z_1+z_2=(x_1+x_2)+$ $+i(y_1+y_2)$. 由图 1.2 可以看出 z_1+z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量与 z_2 所对应的矢量按矢量加法作出的和矢量.

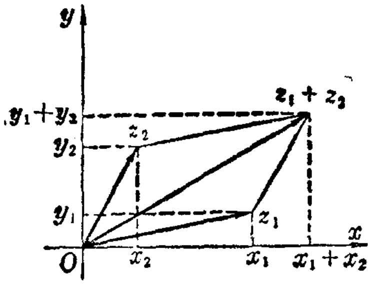

图 1.2

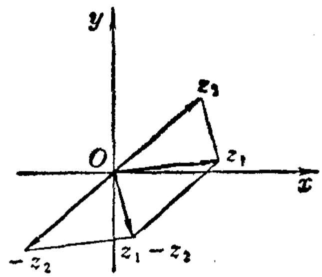

图 1.3

又如，将 z_1-z_2 表成 $z_1+(-z_2)$，可以看出 z_1-z_2 所对应的矢量就是 z_1 所对应的矢量减 z_2(即加$-z_2$)所对应的矢量(图 1.3).

§1.1.3. 复数的模与幅角

表示复数 z 的点，也可以用极坐标 r 和 θ 来确定 (图 1.1).

上面我们用矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+iy$，x, y 分别等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量，矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的**模**，或**绝对值**，以符号 $|z|$ 或 r 表示，因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0.$$

根据图 1.1，图1.2 及图 1.3，我们有下面三个不等式：

$$|x|\leqslant|z|,\ |y|\leqslant|z|,\ |z|\leqslant|x|+|y|. \tag{1.1}$$

$$|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|\ (\text{三角形两边和}\geqslant\text{第三边}). \tag{1.2}$$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|\ (\text{三角形两边差}\leqslant\text{第三边}). \tag{1.3}$$

由图 1.3 可见，$|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的**距离**，记为

$$\rho(z_1, z_2)=|z_1-z_2|. \tag{1.4}$$

复数 $z\neq 0$ 所对应的矢量 $\overrightarrow{Oz}$ 与实轴正向的夹角 θ 称为复数 z 的**幅角**. 任一复数 $z\neq 0$ 有无穷多个幅角，记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$. 如果 θ_0 是

其中一个，则有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

我们把其中属于$(-\pi,\pi]$的幅角称为 Arg$z$ 的主值，或称为 z 的**主幅角**，记为 arg$z$. 于是有

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots. \tag{1.5}$$

注意，原点的模为 0，幅角无定义.

从直角坐标与极坐标的关系，我们可以用复数的模与幅角来表示非 0 复数 z. 由图 1.1 即得

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta). \tag{1.6}$$

特别当 $r=1$ 时

$$z=\cos\theta+i\sin\theta.$$

这种复数称为**单位复数**.

我们引出熟知的**欧拉公式**

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta, \tag{1.7}$$

并且容易验证

$$e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{1.8}$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}=e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{1.9}$$

利用公式(1.7)，就可以把(1.6)改写成

$$z=x+iy=re^{i\theta}. \tag{1.10}$$

我们分别称(1.6)和(1.10)为复数 $z\neq0$ 的**三角形式**和**指数形式**.

例 1. $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}},$

$$i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$1=1\cdot(\cos0+i\sin0)=e^{i0},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)=2e^{i\pi},$$