1987~2000

研究生入学考试数学试题

精选·精解·精练

欧维义 卢喜观 潘 伟

概率论与数理统计

吉林大学出版社

内 容 提 要

主要内容是选解1987~2000年全国工学、经济学硕士研究生入学考试数学试题一、数学试题三和数学试题四中所涵盖的概率论与数理统计试题。本书选题新颖、全面,解法灵活、多样,准确体现了国家教育部对工学、经济学硕士入学考试在概率论与数理统计方面的大纲要求,对考研和学习该课程的广大读者能起到清晰思路、把握重点、提高能力、扩展深度的效果,具有导向功能和指导意义。

研究生入学考试数学试题

精选·精解·精练

(概率论与数理统计)

1987~2000

欧维义 卢喜观 潘 伟

责任编辑、责任校对:赵洪波 封面设计:孙 群

吉林大学出版社出版 吉林大学出版社发行

(长春市解放大路125号) 长春市第四印刷厂印刷

开本:850×1168毫米 1/32 2000年3月第2版

印张:11.25 2000年3月第1次印刷

字数:268千字 印数:6001—12000册

ISBN 7-5601-2248-5/O·243 定价:15.00元

前　　言

《研究生入学考试数学试题选解(概率论与数理统计)》一书自1997年出版以来,又经过了三次考研,期间也陆续收到读者的来信,希望再版,并提出一些宝贵的意见。为了更适应研究生入学考试的要求,在搜集了最新的考研资料的情况下,在保留原书特点的基础上我们重新编写了《研究生入学考试数学试题 精选·精解·精练(概率论与数理统计)》一书,同时出版的还有本套丛书的《研究生入学考试数学试题 精选·精解·精练(高等数学·工学类)》、《研究生入学考试数学试题 精选·精解·精练(高等数学·经济类)》和《研究生入学考试数学试题 精选·精解·精练(线性代数)》三书。

本书主要特点:

第一,对重要的基本概念,基本定理和基本公式的陈述上,力求简明、严密;在基本方法方面,突出思路,便于应用,可望在基本知识上有所深化。

第二,"题型精析"、"试题选解"和"习题精选"这三部分是本书的重要内容,通过精选、精解和精练,使之更具典型性、代表性,以使读者收到事半功倍的效果。

第三,根据“数学考研大纲”对概率论与数理统计的新要求,通过对近几年试题资料的分析,特别对1998、1999和2000三年数学考研试卷的研究,对原书的内容作了较大调整,对所选试题作了补足、修改,使其更全面、更实用。

假设检验(第六章),特请吉林大学长期从事数理统计教学与研究工作的姜诗章教授参与了编写工作,并请他为第五、第六和第七章增配了习题和解答。

本书内容由考研必备的基本知识、题型精析、试题选解和习题精选共四个部分组成,书后附有答案。最后附录摘录了国家教育部《2000年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的说明》中有关概率论和数理统计方面的考试内容和考试要求。

在本书修订过程中潘吉勋教授、金希卓教授、胡成栋教授和李懋和教授参加了工作,广大读者也提出了宝贵的意见。在此,我们谨表谢意。

编　　者

2000年2月

作者介绍

欧维义，教授，1982年—1990年任教育部高等学校理科数学、力学教材编审委员会委员，1991年—1995年任国家教委首届高等学校数学与力学指导委员会高等数学教材建设组成员。1994年获全国首届宝钢教育基金优秀教师奖，1985年被评为吉林省有突出贡献的中青年专家。

他长期从事科学研究和教学研究。自1983年他的第一本书《场的数学描写方法》出版以来，编著出版的有《复变函数论》、《数学物理方程》、《特殊函数及其应用》，他还主编出版了《高等数学》(1-3册)、《线性代数》、《研究生入学考试数学试题选解》等图书。

责任编辑：赵洪波
封面设计：孙　群

目　　录

第一章　随机事件及其概率

内　容　提　要
● 随机事件、事件间的关系及其运算
● 概率的公理化定义及其性质
● 古典概型及其概率公式
● 条件概率、乘法定理，全概率公式，贝叶斯公式
● 相互独立的随机事件

概率论与数理统计研究的都是随机现象的统计规律，但概率论主要侧重于统计规律的刻划与描述．而数理统计则主要是依据对所研究对象的观测或试验，来寻求支配它的统计规律并进而加以利用．

一　基本概念与主要结果

1.1　随机试验与样本空间

概率论中所考虑的问题总是以某个随机试验为背景的．什么是“随机试验”呢？粗略地说，“随机”这个词本身就带有“偶然性”的意思．因此凡其结果带偶然性而无法预先确定的试验均可看作是“随机试验”．详细说，设 E 为一试验，如果 E 满足以下条件：

(1) 试验可以在相同条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现．

则称 E 是一个随机试验(简称试验)．

设 E 为一随机试验.我们将试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S(或 Ω),即

$$S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}$$

样本空间的元素(即 E 的每个结果)称为样本点,即 S 中的每个 $e_k(k=1,2,\cdots)$.

下面是一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H(有币值的一面)、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3:将一枚硬币抛掷三次,观察出现正面的次数.

E_4:抛一颗骰子,观察出现的点数.

E_5:记录电话交换台一分钟内接到的呼唤次数.

E_6:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_7:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

与它们相对应的样本空间是:

S_1: $\{H, T\}$

S_2: $\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

S_3: $\{0,1,2,3\}$

S_4: $\{1,2,3,4,5,6\}$

S_5: $\{0,1,2,3,\cdots\}$

S_6: $\{t \mid t \geqslant 0\}$

S_7: $\{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$,这里 x 表示最低温度,y 表示最高温度.并设这一地区的温度不会小于 T_0,也不会大于 T_1.

要注意的是:样本空间的元素是由试验的目的所确定的.例

如,在 E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币连抛三次,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

1.2　随机事件、基本事件、必然事件和不可能事件

与试验直接相联系的也是概率论的基本概率之一,就是"随机事件".所谓"事件",就是与某个固定试验相联系的某些事情.比如在掷骰子的试验中,"出 6 点","出 5 点"等都是事件;在打靶的试验中,"打中 3 环","打中 5 环","打中 8 环"等则是不同的事件(简称事件,记为 $A,B,C,\cdots$).

比如,在掷骰子的试验中,"出 6 点","出 5 点"的事件可分别记成

$$A=\{6\},\qquad B=\{5\}$$

在打靶的试验中

$$A=\{3\},\qquad B=\{5\},\qquad C=\{8\}$$

表示"打中 3 环","打中 5 环","打中 8 环"是不同的事件.上面的这些事件,都是由随机试验的一个样本点组成.一般事件是由若干个样本点组成,比如掷骰子的试验中,"出现偶数点"的事件是由"2 点","4 点","6 点"组成的事件 $A=\{2,4,6\}$,"点数小于 3"的事件是由"1 点","2 点"组成的事件 $B=\{1,2\}$.所以试验 E 的样本空间 S 的每一个子集都是 E 的一个随机事件.由一个样本点组成的单点集,称为*基本事件*(记为 $\{e_1\},\{e_2\},\cdots,\{e_n\}$).在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为*必然事件*.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为*不可能事件*.

例 1　在 E_2 中事件 A_1:"第一次出现的是 H",即

$$A_1=\{HHH,HHT,HTH,HTT\}$$

事件 A_2:"三次出现同一面",即

$$A_2 = \{HHH, TTT\}$$

在 E_6 中,事件 A_3:"寿命小于 1000 小时",即

$$A_3 = \{t \mid 0 \leqslant t < 1000\}$$

在 E_7 中,事件 A_4:"最高温度与最低温度相差 10℃",即

$$A_4 = \{(x,y) \mid y - x = 10, T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$$

1.3　事件间的关系和运算

1. 事件间的关系

(1) 事件的包含　若事件 A 发生一定导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A(或称事件 A 包含于事件 B),记作 $B \supset A$(或记成 $A \subset B$).

(2) 事件的相等　若二事件 A 与 B 相互包含,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记成 $A = B$.

(3) 事件的和　"二事件 A 和 B 中至少有一事件发生"这一事件,称为 A 与 B 的和事件,记作 $A \cup B$;

"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$(或简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$);

"可列个事件 $A_1, A_2, \cdots A_n, \cdots$ 中至少有一事件发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和,记成 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 事件的积　"二事件 A 与 B 都发生"这一事件称为 A 与 B 的积,记作 $A \cap B$(或简记为 AB);

"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积,记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$(或简记为 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$);

"可列无穷个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都发生"这一事件,称

为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积,记成 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

(5) 事件的差　"事件 A 发生,而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差,记作 $A-B$.

(6) 互不相容的事件(或互斥事件)　若二事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的,或称 A、B 为互斥事件;若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即

$$A_iA_j=\varnothing \qquad (1\leqslant i<j\leqslant n)$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是互不相容的;若可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件都不可能同时发生,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是互不相容的.

(7) 事件的对立(或互逆事件)　若二事件 A 与 B 互不相容,并且 $A\cup B=S$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件.也称事件 A 与事件 B 互为对立事件.事件 A 的对立事件记作 $\overline{A}$.即 $\overline{A}=S-A,A=S-\overline{A}$.

显然,对立事件是互不相容事件的特例,即若事件 A 与事件 B 对立,则 A 与 B 一定互不相容,反之不然.

(8) 完备事件组:如果随机事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,且

$$A_1+A_2+\cdots+A_n=S$$

则称 $A_1,\cdots,A_n$ 构成 S 的一个完备事件组.

2. 事件的运算

设 A,B,C 为三个事件,则有:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

(3) 分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

(4) 德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

例 2 在例1中有

$$A_1\cup A_2=\{HHH,HHT,HTH,HTT,TTT\}$$

$$A_1\cap A_2=\{HHH\}$$

$$A_2-A_1=\{TTT\}$$

$$\overline{A_1\cup A_2}=\{THT,TTH,THH\}$$

例 3 如图1-1所示的电路中，以 A 表示“信号灯亮”这一事件，以 B,C,D 分别表示事件：继电器接点Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ闭合，那么容易知道 $BC\subset A$，$BD\subset A$，$BC\cup BD=A$．而 $\bar{B}A=\varnothing$，即事件 $\bar{B}$ 与事件 A 互不相容.

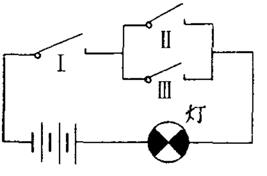

图 1-1

1.4 概率的公理化定义及其性质

1. 概率的公理化定义

设 E 为一随机试验，S 是 E 的样本空间，对于 E 的每一事件 A 赋于一个实数，记为 $P(A)$．如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 概率的可列可加性成立．即若 $A_1,A_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件：

$$A_iA_j=\varnothing\qquad(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$$

有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.