

高等学校试用教材

结构力学

上册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编

杨天祥 主编

人民教育出版社

高等学校试用教材

结 构 力 学

上 册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编

杨天祥 主编

人 民 教 育 出 版 社

本书是根据一九七七年十月教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议所讨论通过的“结构力学”教材编写大纲编写而成。

全书共十七章,分上、下两册。上册共九章,主要阐述:静定结构的内力和位移的计算,解算超静定结构的两种基本方法——力法和位移法,分析连续梁及刚架的渐近法——力矩分配法和迭代法,结构影响线的绘制和应用等。下册共八章,主要阐述:结构的矩阵分析,结构的动力分析,对于梁及刚架的塑性分析、结构的弹性稳定计算等也作了介绍。全书既对经典的理论和计算方法作了系统阐述,又考虑到电子计算机在解算力学问题上的应用日趋广泛。因此,书中对结构的矩阵分析方法作了必要的介绍。为了教学的需要以及自学中的方便,每章末均附有大量习题和部分答案。

全书采用了国际制单位(SI单位)。

本书可作为工业与民用建筑、建筑结构工程等专业“结构力学”课程的试用教材,也可供有关专业以及土建工程技术人员参考之用。

高等学校试用教材

结构力学

上册

湖南大学 天津大学 合肥工业大学合编

杨天祥 主编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 16.25 字数 370,000

1979年7月第1版 1982年5月第5次印刷

印数 58,501—68,000册

书号 15012·0125 定价 1.35元

前 言

本书是根据一九七七年教育部委托召开的高等学校工科力学教材会议讨论通过的“结构力学”编写大纲编写而成,可作为工业与民用建筑等专业“结构力学”课程的教材。

本书由天津大学杨天祥同志担任主编。参加编写工作的为:合肥工业大学段丰顺、戴贤扬、刘方强同志(第一、二、三、四、五、六、十四章),湖南大学杨萧康、罗汉泉同志(第七、八、九、十、十一、十二章),天津大学刘昭培、丁学成、宗志桓同志(第十三、十五、十六、十七章)。

一九七八年十一月在天津召开了审稿会,对本书的初稿进行了审查。担任主审的单位为西南交通大学(杨耀乾、唐昌荣、杜正国同志参加)和郑州工学院(寿楠春、邓秀泰同志参加),参加审稿会的还有南京工学院、清华大学、重庆建筑工程学院、北京建筑工程学院、武汉建筑材料工业学院等兄弟院校的代表。同济大学的有关教研组还寄来了书面修改意见。这对提高本书的质量有着很大的帮助。对此,谨致诚挚的谢意!

本书中冠以*号的各节为非必讲的内容,可由使用本教材的教师根据实际情况加以取舍。由于时间仓促,并限于编写者的水平,书中难免存在缺点或错误,欢迎读者批评和指正。

编 者

1979年2月

目 录

<p>第一章 绪论1</p> <p> § 1-1 结构力学的研究对象和基本任务1</p> <p> § 1-2 结构的计算简图及其分类1</p> <p> § 1-3 荷载的分类7</p> <p>第二章 体系的几何构造分析9</p> <p> § 2-1 概述9</p> <p> § 2-2 几何不变体系的简单组成规则11</p> <p> § 2-3 瞬变体系的概念14</p> <p> § 2-4 平面体系在静力学解答方面的特性16</p> <p> 习题18</p> <p>第三章 静定梁、静定平面刚架和三铰拱的计算20</p> <p> § 3-1 静定梁的内力图20</p> <p> § 3-2 静定平面刚架的内力图29</p> <p> § 3-3 三铰拱的内力计算39</p> <p> *§ 3-4 三铰拱的压力线及合理拱轴的概念47</p> <p> 习题50</p> <p>第四章 静定平面桁架的计算54</p> <p> § 4-1 概述54</p> <p> § 4-2 结点法57</p> <p> § 4-3 截面法; 截面法与结点法联合应用示例61</p> <p> § 4-4 图解法66</p> <p> § 4-5 几种桁架受力性能的比较70</p> <p> 习题74</p> <p>第五章 弹性体系的位移计算77</p> <p> § 5-1 概述77</p> <p> § 5-2 虚功原理78</p> <p> § 5-3 结构位移计算的一般公式87</p> <p> § 5-4 静定平面结构在荷载作用下的位移计算90</p> <p> § 5-5 图乘法97</p> <p> § 5-6 静定结构由于初应变、温度改变和支座移动引起的位移计算103</p>	<p> § 5-7 弹性体系的几个互等定理107</p> <p> 习题111</p> <p>第六章 用力法计算超静定结构117</p> <p> § 6-1 超静定结构的概念和超静定次数的确定117</p> <p> § 6-2 力法原理和力法方程120</p> <p> § 6-3 力法计算举例和对称性的利用124</p> <p> § 6-4 两铰拱的计算135</p> <p> § 6-5 温度改变和支座移动时超静定结构的计算138</p> <p> § 6-6 超静定结构的位移计算和最后内力图的校核142</p> <p> § 6-7 超静定结构与静定结构的比较146</p> <p> 习题147</p> <p>第七章 用位移法计算超静定结构152</p> <p> § 7-1 位移法的基本概念152</p> <p> § 7-2 等截面直杆的转角位移方程155</p> <p> § 7-3 基本未知量数目的确定160</p> <p> § 7-4 位移法方程及计算举例163</p> <p> § 7-5 应用结点和截面平衡条件建立位移法方程169</p> <p> § 7-6 对称性的利用172</p> <p> *§ 7-7 变截面杆件的转角位移方程179</p> <p> 习题184</p> <p>第八章 用渐近法计算超静定结构188</p> <p> § 8-1 力矩分配法的基本概念188</p> <p> § 8-2 用力矩分配法计算连续梁和无侧移刚架192</p> <p> *§ 8-3 力矩分配法与位移法的联合运用198</p> <p> *§ 8-4 无剪力分配法201</p> <p> § 8-5 迭代法的基本原理及用迭代法计算无侧移刚架206</p> <p> § 8-6 用迭代法计算有侧移刚架212</p> <p> 习题219</p> <p>第九章 结构在移动荷载作用下的计算224</p>
---	--

§ 9-1 影响线的概念.....	224	§ 9-6 用机动法作超静定梁影响线的概念.....	240
§ 9-2 单跨静定梁的影响线.....	225	§ 9-7 连续梁的内力包络图.....	244
§ 9-3 用机动法作单跨静定梁的影响线.....	229	习题	247
§ 9-4 影响线的应用.....	231	附录 I.....	250
§ 9-5 简支梁的内力包络图和绝对最大弯矩.....	236		

第一章 绪 论

§ 1-1 结构力学的研究对象和基本任务

由建筑材料按照合理方式组成,并能承受一定荷载作用的物体或体系,称为建筑结构(简称结构)。换句话说,结构是建筑物中由承重构件(梁、柱等)组成的体系,是建筑物的骨架,用以承受作用在建筑物上的各种荷载。结构一般是由多个构件联结而成,如桁架、框架等;最简单的结构则是单个构件,如梁、柱等。

结构力学以结构为研究对象,其基本任务是:研究结构的组成规律和合理形式以及结构在荷载、温度变化等因素作用下的内力、变形和稳定的计算原理和计算方法。

结构力学与材料力学有着密切的联系,但分工则有所不同。材料力学着重研究单个杆件的内力、变形和稳定的计算问题;而结构力学则着重研究由杆件组成的结构(简称杆件结构或杆系)的计算问题。具体说来,结构力学包括下列四个方面的内容:

- (1) 研究由荷载等因素在结构各部分所产生的内力(强度计算)。
- (2) 计算由荷载等因素所引起的变形(刚度计算)。
- (3) 分析结构的稳定性(稳定计算)。
- (4) 探讨结构的组成规律及合理形式。

进行强度和稳定计算的目的在于保证结构满足安全和经济的要求。计算刚度的目的在于保证结构不致发生实用上不能允许的过大变形。对于结构的强度、刚度和稳定,不仅在设计新的结构时需要进行计算,而且在建成的结构需要承受以往没有预计的荷载时,也需要进行核算,以确定是否需要加固和如何加固。研究组成规律的目的是保证结构各部分不致发生相对运动,而能承受荷载并维持平衡。探讨结构的合理形式是为了有效地利用材料,使其性能得到充分的发挥。

本书限于讨论杆件系统结构的计算。对静定结构和超静定结构的基本计算原理和计算方法作了比较深入的阐述,要求读者能较深刻地理解基本概念,熟练地掌握手算方法。为了适用电算,本书对杆件结构的矩阵分析方法作了必要的介绍。为了适应结构抗震设计和厂房振动计算等方面的要求,本书对结构动力学的基本内容也作了较深入的讨论。

§ 1-2 结构的计算简图及其分类

一、结构的计算简图

在结构设计中,需要对实际结构进行力学分析,计算结构在荷载或其它因素作用下的内力和变形。但实际结构的组成、受力和变形情况往往很复杂,影响力学分析的因素很多,要完全按实际结构进行计算,常极困难,甚至不可能。同时,在工程上要求计算过分精确,也是不必要的。因

此, 必须把实际结构抽象和简化为既能反映实际受力情况而又便于计算的图形。这种简化的图形就是计算时用来代替实际结构的力学模型, 一般简称为计算简图。

计算简图是对结构进行力学分析的依据。计算简图的选择, 直接影响计算的工作量和精确度。如果计算简图不能准确地反映结构的实际受力情况, 或选择错误, 就会使计算结果产生差错, 甚至造成工程事故。所以, 必须缜密地选择计算简图。

计算简图的选择应遵循下列两条原则:

- (1) 正确地反映结构的实际受力情况, 使计算结果接近实际情况。
- (2) 略去次要因素, 便于分析和计算。

计算简图的选择, 受到许多因素的影响。其主要因素有:

(1) 结构的重要性: 对重要的结构应采用比较精确的计算简图, 以提高计算的可靠性。反之, 可用较粗略的计算简图。

(2) 设计阶段: 在初步设计阶段可使用较粗略的计算简图; 在技术设计阶段再使用比较精确的计算简图。

(3) 计算问题的性质: 通常对于结构的静力计算, 可使用比较复杂的计算简图; 对于结构的动力和稳定计算, 由于计算比较复杂, 要采用比较简单的计算简图。

(4) 计算工具: 使用的计算工具越先进, 采用的计算简图就可以更精确些。若用计算尺计算, 则计算简图应力求简单; 应用电子计算机计算时, 则可采用较为精确的计算简图。

计算简图是实际结构的简化图形。对实际结构的简化, 包括下列三个方面:

(1) 结构的简化: 杆件的截面尺寸通常比杆件的长度小得多, 截面上的应力可根据截面的内力来确定。因此, 在计算简图中, 杆件用其纵轴线表示。如梁、柱等构件的纵轴线为直线, 就用相应的直线表示; 又如曲杆、拱等构件的纵轴线为曲线, 则用相应的曲线表示。对由单个杆件联结起来的结构, 杆件之间的联结区用结点表示, 杆长用结点间的距离表示, 而荷载的作用点也转移到纵轴上。结点根据其实际构造和结构受力特点的不同, 可简化为铰结点和刚结点两种基本类型。

(2) 支座的简化: 支座根据其实际构造和约束特点的不同, 通常简化为可动铰支座、固定铰支座和固定支座三种基本类型。

(3) 荷载的简化: 实际结构构件受到的荷载, 一般是作用在构件内各处的体荷载或称体力(如自重)以及作用在某一面积上的面荷载或称面力(如风压力); 但在计算简图中, 需要把它们简化为作用在构件纵轴线上的线荷载、集中荷载或力偶。

下面举例说明结构计算简图的取法。

图 1-1, *a, b* 示一工业厂房中的钢筋混凝土 T 形吊车梁, 梁上铺设钢轨, 吊车的最大轮压 $P_1 = P_2$ 。在设计此吊车梁时, 通常可按上述对实际结构进行简化的三个方面来选取其计算简图。

(1) 结构的简化: 以梁的纵轴线来代替实际的吊车梁, 当梁两端与柱子(支座)接触面的长度不大时, 可取梁两端与柱子接触面中心的间距作为梁的计算跨度 l (图 1-1, *a*)。

(2) 支座的简化: 梁的两端搁置在柱子上, 整个梁既不能上下移动, 也不能水平移动。但梁

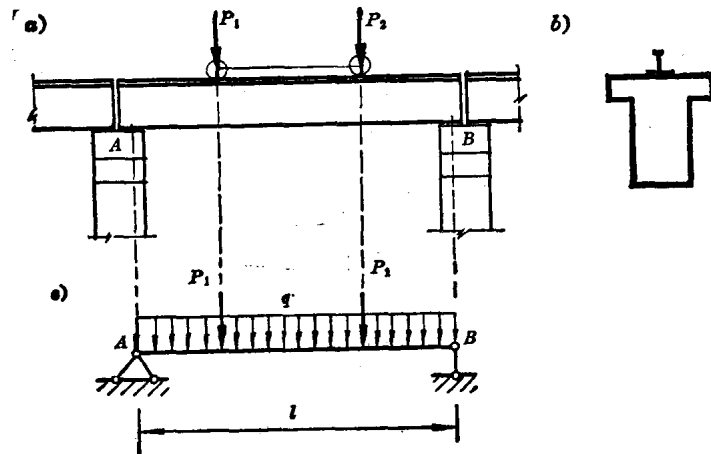


图 1-1

受荷微弯时，梁的两端可以作微小的自由转动。此外，当温度变化时，梁还能自由伸缩。此梁两端的支承情况虽然完全相同，但是为了反映上述支座对梁所起的约束作用并便于计算，将梁的一端当作可动铰支座，而另一端当作固定铰支座。

(3) 荷载的简化：作用在吊车梁上的荷载有恒载和活荷载。恒载是钢轨和梁的自重，它们沿梁长都是均匀分布的，应化为作用在梁纵轴上的均布线荷载 q 。活荷载是轮压 P_1 和 P_2 ，由于它们与钢轨的接触面积很小，可看成是集中荷载。

综上所述，此吊车梁的计算简图如图 1-1, c 所示。

图 1-2, a 示一钢屋顶桁架，所有结点都用焊接联结。如果由屋面系统传来的荷载，都可简化

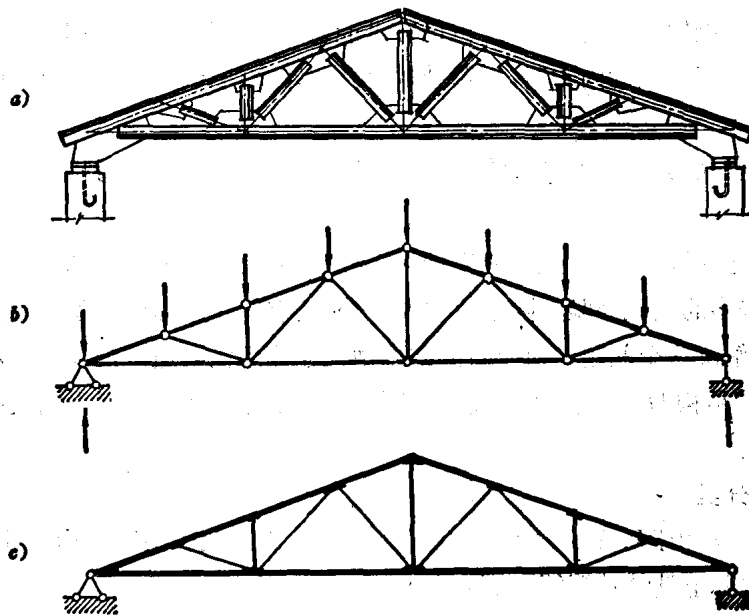


图 1-2

为结点荷载并作用于桁架平面内,则该桁架即可按平面体系来考虑。

(1) 结构的简化: 桁架所有杆件都用其几何轴线来代替, 并认为所有这些轴线都位于同一平面内, 且通过结点的中心。全部结点都当作用理想铰联结。

(2) 支座的简化: 桁架两端的支座分别用一个可动铰支座和一个固定铰支座表示。

(3) 荷载的简化: 荷载与支座反力均作用在结点上。

综上所述, 可得如图 1-2, *b* 所示的计算简图。

钢屋架的实际构造与上述的简化是有差别的, 特别是关于用理想铰联结的简化。因为在荷载作用下焊接结点上各杆间的夹角是不会改变的。但是, 根据力学分析, 可以证明, 通常当一般轻型桁架只在各结点承受外力时, 各杆件的内力主要是轴力, 而弯矩和剪力则很小, 可以忽略不计, 因而从力学的观点来看, 各结点所引起的作用与理想铰是相近的。

如果不采用理想铰联结, 而将各杆端联结区视为绝对刚性的刚结点, 则可得到如图 1-2, *c* 所示的比较精确的计算简图。不过, 计算工作就复杂得多。

图 1-3, *a* 为一钢筋混凝土单层工业厂房的示意图, 它是由多个横向排架借助于屋面板、吊车梁、柱间支撑等联成一个空间结构体系。从其荷载传递情况来看, 屋面荷载和吊车荷载等都主要是通过屋面板和吊车梁等构件传递到一个个的横向排架上, 故在选择计算简图时, 可以略去排架之间纵向联系的作用, 而把这样的空间结构简化为一系列的平面排架来分析, 如图 1-3, *b* 所示。当然, 这种不考虑空间作用的简化方法, 具有一定的近似性, 但在一般情况下, 它反映了厂房结构的主要受力特点。

在分析排架的屋顶桁架时, 是否可以单独取出计算, 则取决于它与竖柱的联结构造方式。如果钢筋混凝土柱顶与桁架端部的联结构造, 系用预埋钢板, 在吊装就位以后, 再焊接在一起时, 则桁架端部与柱顶不能发生相对线位移, 但仍有可能发生微小的转动。这时, 可把柱与桁架的联结看做铰结点, 在计算桁架的内力时, 可单独取出并用铰支座代替其相互联结的作用, 其计算简图如图 1-3, *c* 所示。

在分析排架竖柱的内力时, 为简化计算, 可以实体杆代替桁架, 得出计算简图如图 1-3, *d* 所示。

如何选取合适的计算简图, 是结构设计中十分重要而又比较复杂的问题, 不仅要掌握选取的原则, 而且要有较多的实践经验。除学习本课程外, 还有待于今后学习建筑结构等专业课和在工作实践中进一步解决这个问题。对于新的结构型式往往还需要通过反复试验和实践才能确定。不过, 对于常用的结构型式, 前人已积累了许多宝贵的经验, 我们可以采用这些已为实践验证的常用的计算简图。

二、结构的分类

如上所述, 结构力学研究的并不是实际的结构物, 而是代表实际结构的计算简图。因此, 所谓结构的分类, 实际上就是计算简图的分类。

在实际工程中, 结构的类型很多, 按照不同的特征可以有不同的分类, 今略述如下。

按照空间观点, 结构可以分为平面结构和空间结构两类。如果组成结构的所有杆件的轴线

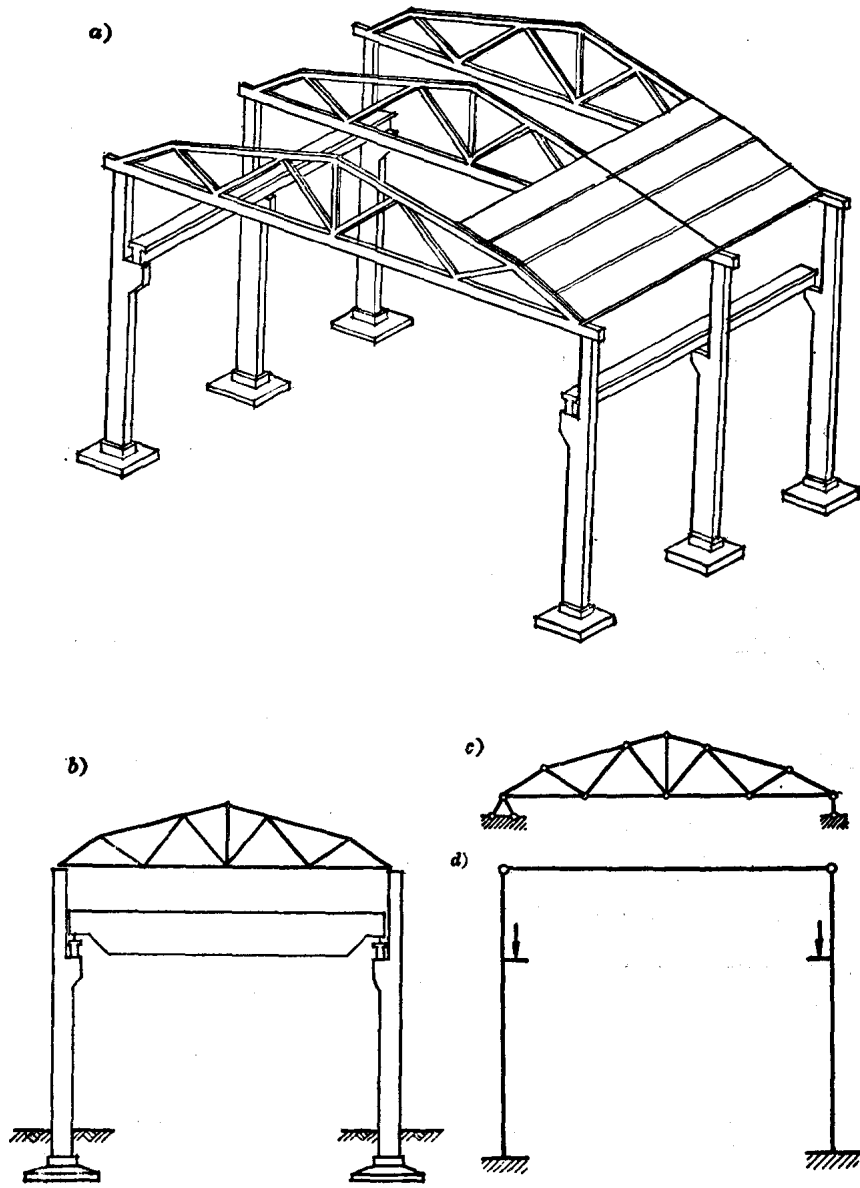


图 1-3

都位于某一平面内，并且荷载也作用于此同一平面内，则此结构为平面结构。否则，便是空间结构。严格说来，实际结构都是空间结构，不过，在许多场合下，根据结构各部分的组成特点以及荷载传递的途径，可以按照实用上许可的近似程度，把它们分解为若干个独立的平面结构，以简化计算。但是，并不是任何空间结构都可以分解为平面结构的，例如，图 1-4 所示的网状圆顶屋架，具有明显的空间特征，就必须作为空间结构来研究。

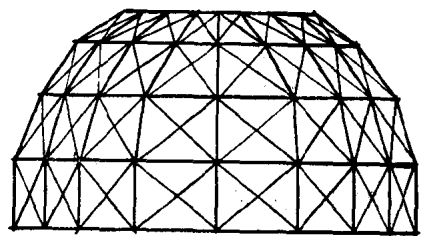


图 1-4

按照几何观点,结构可以分为杆件结构、薄壁结构和实体结构三类。杆件的基本特征在于它的长度远大于截面的宽度和高度。杆件结构便是由若干杆件组成的。薄壁结构是厚度远小于其它两个尺度的结构。当它为一平板状物体(图 1-5)时,称为薄板;当它是由若干块薄板所围成(图 1-6)时,称为褶皱板结构;当它具有曲面外形(图 1-7)时,称为薄壳结构。实体结构是指三个尺度大约为同量级的结构。这类结构,通常由砖、石、混凝土等材料砌筑而成,例如,挡土墙(图 1-8)、基础等。



图 1-5

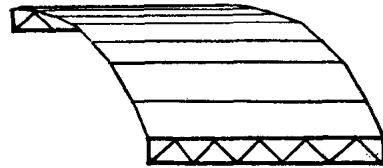


图 1-6

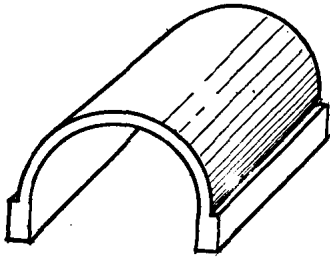


图 1-7

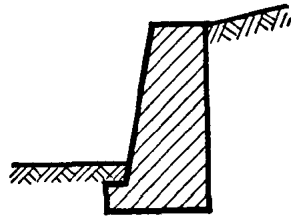
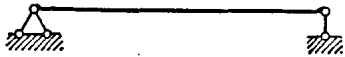


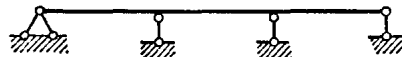
图 1-8

本结构力学的研究对象主要为杆件结构。它有下列几种类型:

(1) 梁: 梁是一种受弯构件,可以是单跨的(图 1-9, a),也可以是多跨连续的(图 1-9, b)。



a)



b)

图 1-9

(2) 拱: 拱的轴线是曲线(图 1-10),它在竖向荷载作用下,支座不仅产生竖向反力,而且还产生水平反力。这种水平反力将使拱内弯矩远小于跨度、荷载及支承情况相同的梁的弯矩。

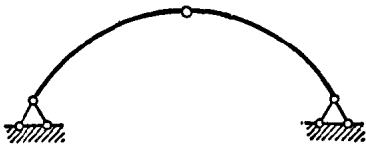


图 1-10

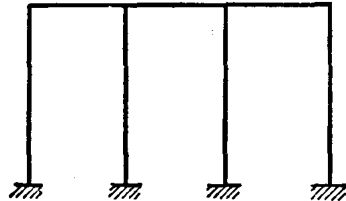


图 1-11

(3) 刚架: 刚架是由梁和柱组成的,其结点为刚性结点(图 1-11)。刚性结点的特征在于当结构发生变形时,相交于该结点的各杆端之间的夹角始终保持不变。

(4) 桁架: 桁架是由若干杆件在两端用理想铰联结而成的结构(图 1-12)。各杆的轴线一

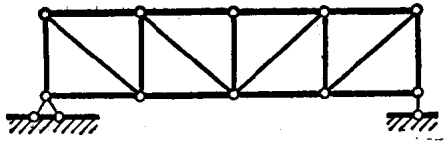


图 1-12

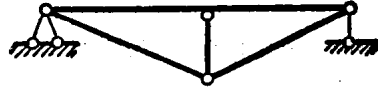


图 1-13

一般都是直线,当只受到作用于结点的荷载时,各杆将只产生轴力。

(5) 混合结构:混合结构是部分由桁架中的链杆,部分由梁或刚架组合而成的(图1-13),其中含有混合结点。因此,有些杆件只承受轴力,而另一些杆件还同时承受弯矩和剪力。

按照所用计算方法的特点,结构又可分为静定结构和超静定结构。若一结构在承受任何荷载时,所有支座反力和任一截面上的内力都可由静力平衡条件求得,且其值是确定的,则此结构称为静定结构。反之,若一结构的所有支座反力和内力不能仅由静力平衡条件来确定,还必须考虑变形的几何条件才能求得,则此结构称为超静定结构。例如,图1-12是一个静定桁架,而图1-13则是一个超静定混合结构。

§ 1-3 荷载的分类

荷载是主动作用在结构上的外力,例如,结构自重、水压力、土压力、风压力、雪压力以及人群重量等等。此外,还有其它因素可以使结构产生内力和变形,如温度变化、基础沉降、材料收缩等。从广义上说,这些因素也可称为荷载。

确定结构所受的荷载,是进行结构受力分析的前提,必须慎重对待。如将荷载估计过大,则设计的结构尺寸将偏大,造成浪费;如将荷载估计过小,则设计的结构不够安全。

《工业与民用建筑结构荷载规范》(TJ9-74)总结了设计经验和科学研究的成果,是荷载计算的基本依据。在确定荷载时,可以使用或作为参考。

建筑工程中常遇到的荷载,根据其不同的特征,主要有下列分类:

(1) 根据荷载分布的情况,荷载可分为集中荷载和分布荷载。

作用在结构上的荷载,一般总是分布在一定面积上。若分布面积远小于结构的尺寸时,则可认为此荷载是作用在结构的一点上,称为集中荷载。例如,吊车梁上的吊车轮压,可看作吊车梁上的集中荷载。

分布荷载是指连续分布在结构上的荷载。连续分布在结构内部各点上的力称为体分布荷载,如自重及惯性力等;连续分布在结构表面上的力称为面分布荷载;当分布荷载在结构上为均匀分布时,则称为均布荷载。

(2) 根据荷载作用时间的久暂,荷载可分为恒载和活荷载。

恒载是长期作用在结构上的不变荷载,例如,结构自重、土压力等。活荷载是建筑物在施工和使用期间可能存在的可变荷载,例如,楼面活荷载、屋面活荷载、吊车荷载、雪荷载及风荷载等。

(3) 根据荷载位置的变化,活荷载又可分为可动荷载和移动荷载。

可动荷载是指荷载在结构上能占有任意位置的荷载,例如,人群以及风、雪荷载等。移动荷

载是指荷载为一系列相互平行且间距保持不变,能在结构上移动的荷载,例如,吊车梁上的吊车荷载。

(4) 根据荷载作用的性质,荷载可分为静力荷载和动力荷载。

静力荷载是逐渐增加的荷载,其大小和位置的变化,不致引起显著的结构振动,因而可以略去惯性力的影响;反之,若荷载作用在结构上会引起显著的结构振动,使结构发生不容忽视的加速度,而必须考虑它的惯性力时,则称为动力荷载。结构的自重及其它恒载,是静力荷载的例子;而动力机械产生的动力荷载以及地震荷载等,则是动力荷载的例子。

第二章 体系的几何构造分析

§ 2-1 概 述

在体系受到任意荷载作用后,材料产生应变,因而体系发生变形。但是,这种变形一般是很小的。如果不考虑这种微小的变形,而体系能维持其几何形状和位置不变,则这样的体系称为几何不变体系。如图 2-1, a 所示的体系就是一个几何不变体系,因为在所示荷载作用下,只要不发生破坏,它的形状和位置是不会改变的。可是另外有一类体系,由于缺少必要的杆件或杆件布置的不合理,在任意荷载作用下,即使不考虑材料的变形,它的形状和位置也是可以改变的,这样的体系则称为几何可变体系。如图 2-1, b 所示的体系就是这样的例子,因为在所示荷载作用下,不管 P 值多么小,它是不能维持平衡的。结构既然是用来承受荷载的,故必须是几何不变体系,而不能是几何可变体系。

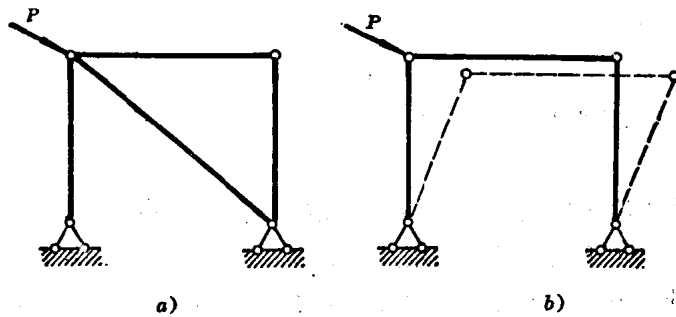


图 2-1

对体系的几何构造进行的分析,称为几何构造分析或机动分析。其目的在于:判别某一体系是否几何不变,从而决定它能否作为结构;研究几何不变体系的组成规则,以保证所设计的结构能承受荷载而维持平衡。此外,在结构计算时,还可根据体系的几何组成,确定结构是静定的还是超静定的,以便选择相应的计算方法。

判别一个体系是否几何不变,涉及到体系运动的自由度。现在我们通过点和刚片在平面内自由运动的情况来说明自由度的概念。所谓刚片,是指可以看作刚体的物体,即物体的几何形状和尺寸是不变的。因此,在平面体系中,当不考虑材料的变形时,就可以把一根梁、一根链杆或者在体系中已经肯定为几何不变的某个部分都看作是一个刚片。同样,支承结构的地基也可看作是一个刚片。

我们知道,一个动点在平面内的位置,可用在选定的坐标系中两个坐标 x 和 y 来确定。当 x 和 y 改变为新值 x' 和 y' 时,动点原来的位置 A 则变为 A' (图 2-2, a)。因此,平面内一点有两个独立运动的方式或独立的参变数,我们称之为有两个自由度。至于一个刚片在平面内的运动,其

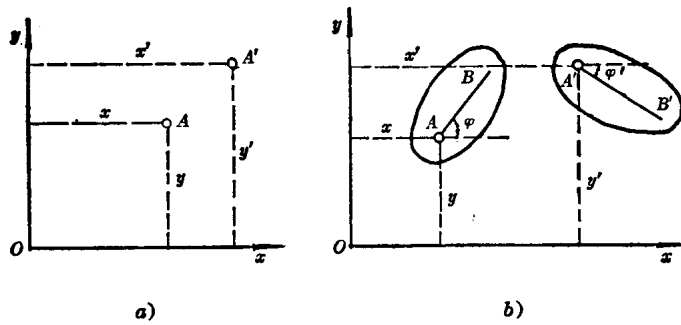


图 2-2

位置需用三个独立的参变数来确定，即刚片内任一点 A 的两个坐标 x, y 及通过 A 点的任一直线的倾角 φ 。改变这三个独立的参变数，使之变为新值 x', y' 和 φ' ，则刚片就有完全确定的新位置 (图 2-2, b)。所以一个刚片在平面内的运动有三个自由度。

综上所述，我们可以说，某个体系的自由度，就是该体系运动时，可以独立变化的几何参变数的数目，或者说，就是用来确定该体系的位置所需独立坐标的数目。一般说来，如果一个体系有 n 个独立的运动方式，我们就说这个体系有 n 个自由度。工程结构都是几何不变体系，其自由度为零或小于零。凡是自由度大于零的体系都是可变体系。

在刚片间加入某些装置，它们的自由度将减少。减少自由度的装置称为联系或约束。减少一个自由度的装置，就称为一个联系，减少 n 个自由度的装置，就称为 n 个联系。

现在我们来分析不同装置对自由度的影响。

(1) 链杆的作用

图 2-3, a 示两个刚片 I 和 II 用一根链杆 BC 联结。在未联结以前，这两个刚片在平面内共有六个自由度。在用链杆 BC 联结以后，对刚片 I 而言，其位置需用刚片上 A 点的坐标 x, y 和 AB 联线的倾角 φ 来确定，因此，它有三个自由度。但是，对刚片 II 而言，因与刚片 I 已用链杆 BC 联结，故它只能沿以 B 为圆心、 BC 为半径的圆弧运动和绕 C 点转动，再用两个独立参变数 α 和 β 即可确定它的位置，所以减少了一个自由度。故两个刚片用一根链杆联结后的自由度总数为 $6-1=5$ 。由此可见，两个刚片用一根链杆联结后，就减少一个自由度。因为减少一个自由度的装置称为一个联系，故一根链杆相当于一个联系。

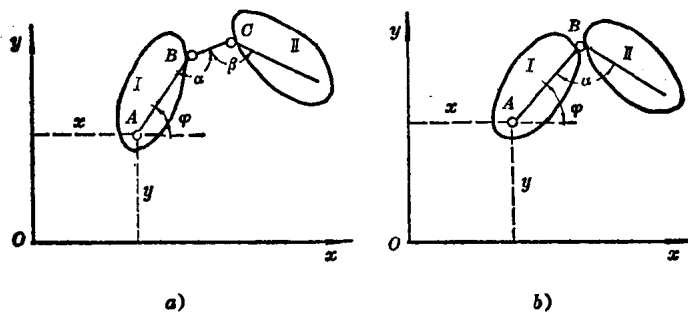


图 2-3

(2) 单铰的作用

图 2-3, b 示两个刚片 I 和 II 用一个铰 B 联结。在未联结以前, 两个刚片在平面内共有六个自由度。在用铰 B 联结以后, 刚片 I 仍有三个自由度, 而刚片 II 则只能绕铰 B 作相对转动, 即再用一个独立参变数(夹角 α) 即可确定它的位置, 所以减少了两个自由度。故两个刚片用一个铰联结后的自由度总数为 $6-2=4$ 。我们把联结两个刚片的铰称为单铰。由此可见, 一个单铰相当于两个联系, 也相当于两根链杆的作用; 反之, 两根链杆也相当于一个单铰的作用。

同理, 如果将地基看作是不动的, 刚片的一个链杆支座, 就使刚片减少一个自由度; 一个固定铰支座, 就使刚片减少两个自由度; 一个固定支座, 就使刚片减少三个自由度。

§ 2-2 几何不变体系的简单组成规则

上一节介绍了体系的几何不变性及其自由度的概念。本节将研究组成几何不变体系的一些简单规律。下面分析几个问题, 藉以找出有关几何构造的基本规律, 并用以作为判别体系是否几何不变的准则。

一、两个刚片互相联结

图 2-4, a 示两个刚片 I 和 II 用两根不平行的链杆相联结。设刚片 II 固定不动, 则刚片 I 即不能作任何方向的移动, 但还能作转动。当刚片 I 运动时, 其上的 A 点将沿与链杆 AB 垂直的方向运动, 而 C 点将沿与链杆 CD 垂直的方向运动。由 A、C 两点的上述运动方向看, 这时刚片 I 的运动方式将是绕 AB 与 CD 两杆延长线的交点 O 而转动。因为这种转动只是瞬时的, 在不同瞬时, O 点在平面内的位置将不同, 故 O 点称为刚片 I 和 II 的相对转动瞬心。此种情形好像把刚片 I 和 II 用铰在 O 点相联结, 这进一步说明了两根链杆的作用相当于一个铰。不过现在这个铰的位置是在链杆的延长线上, 而且它的位置随链杆的转动而改变, 与一般的实铰不同, 我们称这种铰为虚铰。

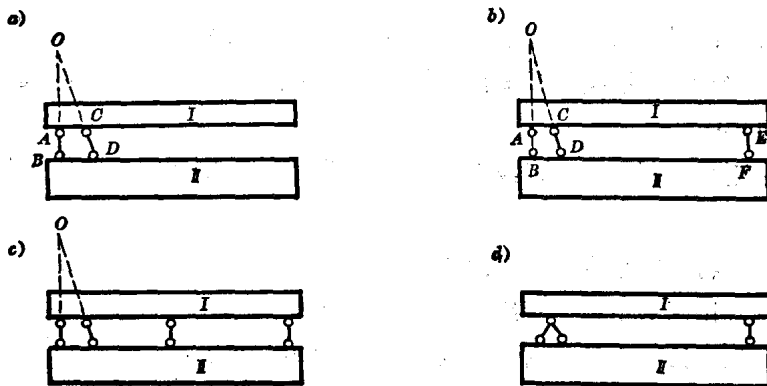


图 2-4

欲使刚片 I 和 II 不能发生相对转动, 需要增加一根链杆如图 2-4, b 所示。这样, 刚片 I 绕 O 点转动时, E 点将沿与 OE 联线垂直的方向运动。但是, 从链杆 EF 来看, E 点的运动方向必须与链杆 EF 垂直。由于链杆 EF 的延长线不通过 O 点, 所以 E 点的这种运动不可能发生, 也就是链杆 EF 阻止了刚片 I 和 II 的相对转动。因此, 这样组成的体系是几何不变体系。