高等学校教学参考书

图　　论

王朝瑞 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书共分十三章，前八章讨论无向图，后五章讨论有向图．本书着重讨论图论中的基本概念和图的基本性质，并对图的矩阵表示作了较为详细地介绍，是介绍图论基本知识的一本入门书籍．书中有较多的例题并附有习题，便于教和学．

本书可供高等工业院校高年级学生和研究生作为图论课的教材或参考书，也可供有关工程技术人员参考．

高等学校教学参考书

图　论

王朝瑞 编

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.75 字数 226,000

1981 年 2 月第 1 版 1981 年 11 月第 1 次印刷

印数 00,001—15,500

书号 13012·0588 定价 0.86 元

序

图论是近二十年来发展十分迅速，应用比较广泛的一个新兴的数学分支. 在许多领域，诸如物理学、化学、运筹学、计算机科学、信息论、控制论、网络理论、社会科学以及经济管理各方面都有广泛的应用. 因此受到全世界数学界和工程技术界越来越广泛的重视.

我国在五十年代开始开展图论方面的工作，取得了许多可喜的成果. 但是总的来说，图论在我国还不够普及，从事这方面研究和应用的人也还不够多. 为了普及图论知识，推广图论的应用，以及为进一步培养专门人材创造条件，我院曾受北京市数学会的委托，举办图论普及班，本书是在为这个普及班编写的讲义的基础上修改而成的.

图论的内容十分丰富，涉及的面也比较广，要想在一本书中包括图论的全部内容几乎是不可能的. 为了达到普及和推广的目的，本书所涉及的只是图论中的基础知识，但它们又是工程实际中经常用到的. 在叙述上，力求做到对基本概念的阐述通俗易懂，便于初学者掌握. 在方法上是以线性代数的基础知识作为研究图的主要工具.

本书共十三章. 前八章讨论无向图，内容有：图与子图，E图和H图，通路的集合和最短通路，树，割集，图的连通度，图的矩阵表示，平面图. 后五章讨论有向图，包括有向图的概念，有向图的矩阵表示，生成树的生成，网络的流，信号流图.

本书在编写中,承孙树本教授的热忱帮助和指导,并认真审阅了原稿,在此表示衷心的感谢.还要感谢应用数学研究所的王建方和蔡晨两位老师,他们详细审阅了手稿,提出许多宝贵意见.

书中有关的Fortran语言程序是尤定华老师协助编写的,谨此致谢.

王朝瑞

北京工业学院　1980.5

目　　录

第一章　图与子图

本章介绍图与描述图的局部结构的一些基本概念和术语。这一章的名词和概念较多，但它们都是基本的，是我们进一步讨论的基础，因此希望读者能熟练地掌握这些概念，这对以后的讨论是非常重要的。

1.1　图

1.1.1　图的概念

我们所讨论的图(graph)与人们通常所熟悉的图，例如圆、椭圆、函数图形等是很不相同的．先来看两个例子．

例 1.1.1　有六个男子篮球队：解放军队，湖北队，广东队，北京队，四川队和上海队．这六个球队进行比赛的情况是：

解放军	对	广东、北京、上海；
湖北	对	广东、四川、上海；
广东	对	解放军，湖北；
北京	对	解放军、四川、上海；
四川	对	湖北、北京、上海；
上海	对	解放军，湖北、北京、四川．

那么上述六个球队和这六个球队按上表进行的比赛构成一个“图”．

例 1.1.2　北京、上海、天津、沈阳、广州、南京、重庆和连接这七个城市的铁路构成一个“图”．

因此，图论中所谓的图是指某类具体事物和这些事物之间的联系．如果我们用点表示具体事物，用线段表示两个具体事物之间的联系．那么，一个图就是由一个表示具体事物的点的集合和表示事物之间联系的线段的集合所构成．这些点称为图的*顶点*(vertices)或*节点*(nodes)，线段称为*边*(edges)或*支路*(branches)．假设 i，j 是两个顶点，如果 i，j 之间有联系，那么 i 和 j 之间有一条边，用 (i, j) 或 ij 表示这条边，i，j 称为这条边的*端点*(end)．

在例 1.1.1 的图中，如果我们用顶点 1、2、3、4、5、6 分别代表解放军队，湖北队，广东队，北京队，四川队和上海队，那么所说的图是由顶点集合 $V=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 和边的集合 $E=\{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)\}$ 构成．

假如我们用平面上的几何点表示顶点(为清楚起见，用黑点来表示)，用直线段或曲线段表示边，那么可以把一个图画在平面上，而得到一个描述该图的几何图形．图 1.1-1 所示的图形就是描述例 1.1.1 的图的一个几何图形．

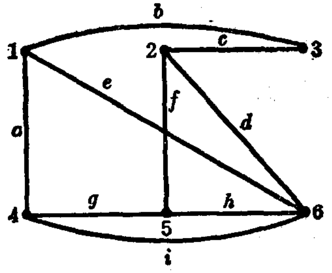


图 1.1-1

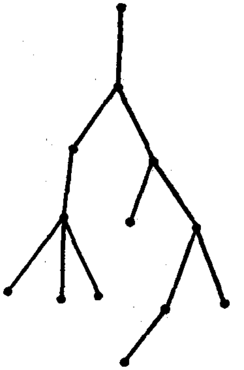
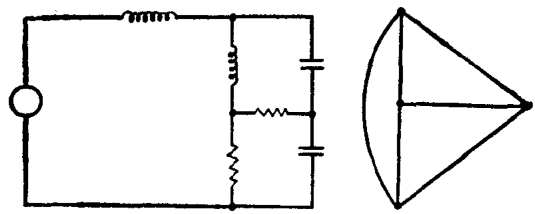


图 1.1-2 表示亲族关系的图

图还可以用来表示许多其他结构．譬如，用顶点表示人，边表示人与人之间的关系(如父子关系)，那么亲族关系就可以用一个图来表示．图 1.1-2 给出这种图的几何图形．

又如，电路理论所依据的基尔霍夫电流定律和电压定律只与电路的拓扑性质有关，或者说，只与电路的联接性质有关，而与各支路所含的元件无关. 因此任何具体电路都可以抽象为一个图. 图1.1-3(b)是描述图1.1-3(a)所示电路图的一个几何图形.



(a)　　　　(b)

图 1.1-3

我们所以把一个顶点集合和一个边的集合称之为"图"，正是因为它们可以用一个图形来表示. 这种图形有助于了解有关图的许多性质. 但是必须指出，一个图的几何图形仅描绘出它的顶点和边之间所保持的相互关系，至于顶点的位置以及边的长、短、曲、直都是无关紧要的.

上面我们从直观上阐述了图的概念. 从上面的讨论中可以看到，图的本质内容是顶点和边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则完全是不必要的，换句话说，图的概念可以抽象化.

1.1.2　集合的积与二元关系

集合的积与二元关系这两个概念在图的抽象定义中起着重要的作用. 所以在给出图的抽象定义之前，我们先来讨论这两个概念.

两个具体事物 a 和 b，按照一定的次序排列，a 在前，b 在后，记成(a,b)，则称(a,b)为一个有序对.

我们常常会遇到有序对的概念. 例如，在所有参加乒乓球比赛

的选手中，有序对(a,b)可以表示冠军和亚军. 因此，有序对(a,b)和(b,a)是不同的.

定义 1.1.1 设A和B是两个集合. 由$a\in A$, $b\in B$所组成的形如 (a, b) 的所有有序对构成的集合，称为A和B的*笛卡儿积*(cartesian product)，或称为*有序积*，记作$A\times B$.

笛卡儿积$A\times B$的一个子集合，称为A到B的一个*二元关系*(binary relation).

特别地，当$A=B$时，集合A到集合B的二元关系称为集合A上的一个二元关系.

例如，设$A=\{a,b,c\}$，$B=\{a,b,d\}$，则

$$\begin{aligned} A\times B &= \{a,b,c\}\times\{a,b,d\} \\ &= \{(a,a),(a,b),(a,d),(b,a),(b,b), \\ &\quad (b,d),(c,a),(c,b),(c,d)\}. \end{aligned}$$

集合$\{a,b,c\}\times\{a,b,d\}$的一个子集，譬如，$\{(a,a),(a,b),(b,a),(c,a)\}$是$\{a,b,c\}$到$\{a,b,d\}$的一个二元关系.

集合A到集合B上的一个二元关系，是A中与B中有关系的元素的直观概念的形式化. 事实上，如果R是A到B的一个二元关系，并且有序对(a,b)是R中的元素，那么元素a和b有某种关系.

上面我们是针对有序对来讨论的. 如果组成偶对的两个事物a和b与次序无关，也就是说偶对(a,b)和偶对(b,a)相同，则称这种偶对为*无序对*. 无序对也是经常会遇到的一个概念. 譬如，在所有参加乒乓球男子双打者中间，偶对(a,b)表示获得冠军的一对选手，那么(a,b)和(b,a)表示同一对选手.

定义 1.1.2 设A, B是两个集合. 由$a\in A$, $b\in B$所组成的无序对构成的集合，称为*A和B的无序积*，记作$A\&B$.

无序积$A\&B$的一个子集，称为A和B的一个二元关系. 当

$A=B$ 时，A 和 B 的二元关系称为 A 上的二元关系.

例如，设 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$
\begin{aligned}
A\&A=\{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\
&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\
&(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,4),\\
&(4,5),(4,6),(5,5),(5,6),(6,6)\}.
\end{aligned}
$$

无序积 $A\&A$ 的一个子集

$$
\{(1,3),(1,4),(1,6),(2,3),(2,5),\\
(2,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}
$$

是 A 上的一个二元关系.

1.1.3 图的定义

定义 1.1.3 一个图 G 定义为一个偶对 (V,E)，记作 $G=(V,E)$，其中

1) V 是一个集合，它的元素称为顶点；

2) E 是无序积 $V\&V$ 的一个子集合，其元素称为边. 集合 $V\&V$ 中的元素可在 E 中出现不止一次.

我们分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集合与边集合. 如果 $V(G)$ 和 $E(G)$ 都是有限集合，则 G 称为有限图；否则称为无限图. 在本书中只限于研究有限图.

没有任何边的图称为空图 (empty graph)，记作 $\varnothing$. 只有一个顶点的图称为平凡图(trivial graph).

图中顶点的个数叫做图的阶(Order)，连接两个相同顶点的边的条数，叫做边的重数(multiplicity).

在本书中如无特殊说明，总是用 n_v 表示图的阶（即顶点的个数），用 n_e 表示图的边数.

在 1.1.1 节讨论图的概念时曾指出，一个图可以用一个几何图形来描述. 在保持图的顶点和边的关系不变的情况下，图形的

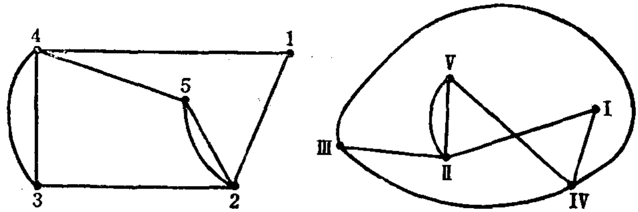
位置、大小、形状都是无关紧要的．因此，在图的讨论中，我们常常画出图的一个几何图形，并且就把它作为这个图的本身．图论中大多数定义和概念是根据图的表示形式提出的．一条边的端点称为与这条边关联(incident)，反之，一条边称为与它的端点关联．与同一条边关联的两个端点称为邻接 (adjacent)．如果两条边有一个公共的顶点，则称这两条边邻接．图 $G=(V, E)$ 中形如 (v, v) 的边，$v \in V$，也就是端点重合为一点的边叫做圈 (loop)．如果 V 中某顶点和 E 中任何边均无关联，则该顶点称为孤立点(isolated vertex)．

没有圈以及没有重数大于 1 的边的图称为简单图 (simple graph)．

从上一节的讨论和图的定义可知，一个集合 V 和 V 上的一个二元关系就是一个图．因此图的最本质的内容实际上就是一个二元关系，也就是顶点和边的关联关系．一个系统或一个结构若具有二元关系便可用图作为数学模型，并且图具有直观性和艺术性，这就是图所以被广泛的应用于许多科学领域的原因．

1.1.4 图的同构

前面提到，我们常把一个图的几何图形就作为该图，而一个图的几何图形不是唯一的，也就是说，一个图有许多不同的画法，但是它们描述的图是相同的．例如图 1.1-4 的(*a*)，(*b*)是两个 5 阶



(*a*) G　　(*b*) G_1

图 1.1-4

图G和G_1，表面上看起来这是两个不同的图，但是仔细观察一下不难发现，这两个图不仅顶点的个数相同，而且顶点和边的关联关系也是完全相同的.

事实上，令

$$1\leftrightarrow \mathrm{I},\ 2\leftrightarrow \mathrm{II},\ 3\leftrightarrow \mathrm{III},\ 4\leftrightarrow \mathrm{IV},\ 5\leftrightarrow \mathrm{V},$$

那么

$$(1,2)\leftrightarrow(\mathrm{I},\mathrm{II}) \qquad (2,5)\leftrightarrow(\mathrm{II},\mathrm{V})$$
$$(1,4)\leftrightarrow(\mathrm{I},\mathrm{IV}) \qquad (3,4)\leftrightarrow(\mathrm{III},\mathrm{IV})$$
$$(2,3)\leftrightarrow(\mathrm{II},\mathrm{III}) \qquad (4,5)\leftrightarrow(\mathrm{IV},\mathrm{V})$$

图G和G_1的顶点个数相同，顶点和边的关联关系也相同，根据图的定义，这两个图是一样的，只是描述这个图的几何图形不同罢了.

为了说明图的这种关系，我们引入下面的

定义 1.1.4 设有两个图$G_1=(V_1,\ E_1)$和$G_2=(V_2,\ E_2)$，它们的顶点集间有一一对应的关系，使得边之间有如下的关系：设$u_1\leftrightarrow u_2$，$v_1\leftrightarrow v_2$，u_1，$v_1\in V_1$，u_2，$v_2\in V_2$；如果$(u_1,\ v_1)\in E_1$，那么$(u_2, v_2)\in E_2$，而且(u_1, v_1)的重数与(u_2, v_2)的重数相同，这种对应叫做同构(isomorphism)，记作$G_1\cong G_2$.

例如在图 1.1-5 的图$G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$中

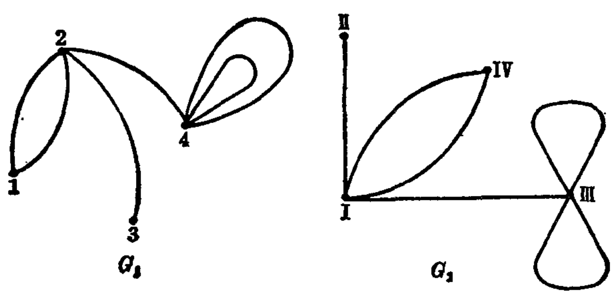


图 1.1-5

$$V_1=\{1,2,3,4\},$$

$$V_2=\{\mathrm{I},,\mathrm{II},\mathrm{III},\mathrm{IV}\}.$$

令 $1\leftrightarrow\mathrm{IV},\quad 2\leftrightarrow\mathrm{I},\quad 3\leftrightarrow\mathrm{II},\quad 4\leftrightarrow\mathrm{III}.$

这是 V_1 和 V_2 间的一个一一对应. 不难验证，它满足定义 1.1.4 的条件，所以 G_1 和 G_2 同构.

一般说来，同构的图被认为是相同的.

命题 1.1.1 同构关系是一个等价关系.

事实上，

1) $G\cong G$(反身性);

2) 若 $G_1\cong G_2$，则 $G_2\cong G_1$(对称性);

3) 若 $G_1\cong G_2$, $G_2\cong G_3$，则 $G_1\cong G_3$(传递性).

所有的图的集合，按照同构关系分划成等价类，每一个这样的等价类称为一个非标定图 (non-labeled graph). 我们知道，集合 A 的一个等价关系所决定的等价类的集合称为 A 关于这个等价关系的商集. 所有的图的集合，对于图的同构关系构成一个商集，这个商集中的每一个元素是一个非标定图. 有必要区别于非标定图时，我们称本节开始时定义的图为标定图 (labeled graph). 给一个图的顶点和边赋以标记的目的，主要是为了便于称呼它们. 例如讨论简单图时，把端点为 u 和 v 的边简称为"边(u, v)". 一个非标定图可以用属于这个等价类的任何一个标定图的图形来给出，只是不必给顶点和边赋以标记.

今后，主要是讨论标定图，至于是否具体标定要视情况而定.

1.1.5 完全图 二分图 补图

定义 1.1.5 每一对不同的顶点均有一条边相连的简单图称为完全图(complete graph). n 阶完全图记作 K_n.

图 1.1-6 所示的图是一个 5 阶完全图.

下面的命题是显然的.

命题 1.1.2　n 阶完全图 有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$ 条边.

定义 1.1.6　如果图的顶点能分成二个集合 V_1 和 V_2，使得同一集合中的任何两个顶点都不邻接，则称此图为二分图 (bipartite graph).

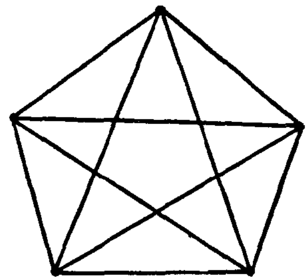
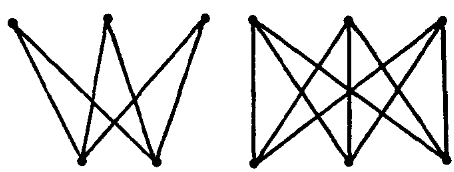


图 1.1-6

二分图可以写成 $G=(V_1,V_2;E)$. 这样一个把顶点分成二个集合 V_1 和 V_2 的分划 (V_1,V_2)，称为图的一个二分划(bipartition). 一个完全二分图，是一个具有二分划 (V_1,V_2) 的简单二分图，其中 V_1 的每个顶点与 V_2 的每个顶点都相连，若 $|V_1|=m$, $|V_2|=n$(符号 $|V|$ 表示集合 V 中元素的个数)，则这样的图，记作 $K_{m,n}$.

图 1.1-7 的 (a), (b) 分别是 $K_{3,2}$ 和 $K_{3,3}$ 的图形.



(a) $K_{3,2}$　　　(b) $K_{3,3}$

图 1.1-7

定义 1.1.7　设图 $G=(V,E)$，集合 $E_1=\{(u,v);\ u\neq v,\ u,v\in V\}$，则图 $H=(V,E_1-E)$ 称为 G 的补图(complement graph)，记作 $H=\bar{G}$.

例如，图 1.1-9 所示的图 $\bar{G}$ 是图 1.1-8 所示的图 G 的补图.

1.1.6 顶点的度

定义 1.1.8　设 $v\in V(G)$，G 中与顶点 v 关联的边的个数称为 v(在 G 中)的度(degree)，记作 $d_G(v)$. 在不致引起混淆的情况下，

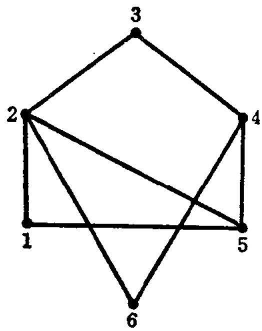


图 1.1-8

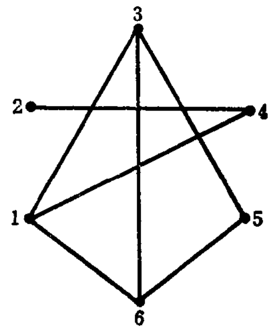


图 1.1-9

也常把顶点 v 的度简记作 $d(v)$.

例如,图 1. 1-10 所示的图中,$d(1)=4, d(2)=4$.

如果 $d(v)$是奇数, 就说顶点 v 是奇的或奇顶点;如果 $d(v)$是偶数,就说顶点 v 是偶的或偶顶点.

如果一个图的每一个顶点都具有相同的度, 则称这个图是正则的 (regular). 每个顶点的度均为 k 的正则图, 称为 k- 正则图 (regular graph). 譬如,图 1. 1-10 所示的图为 4- 正则图.

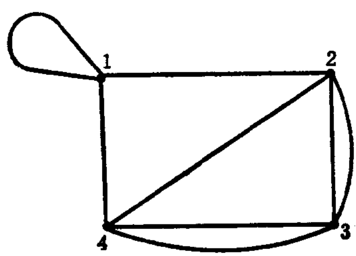


图 1.1-10

命题 1. 1. 3 图 G 中所有顶点的度的和等于边数的 2 倍, 即

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2n_e. \qquad (1.1\text{-}1)$$

这是因为在计算顶点的度时,每条边均用到两次,如果图 G 有 n_e 条边,那么 G 的全部顶点度数的和就是边数的 2 倍. ▌