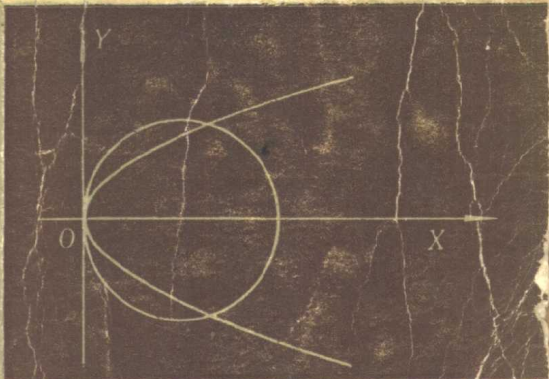


高等数学 及试题选讲

吴振奎 编著



辽宁科学技术出版社

高等数学复习及试题选讲

(增订本)

吴振奎 编 著

辽宁科学技术出版社

1985年·沈阳

高等数学复习及试题选讲

(增订本)

Gaodeug Shuxue

Fuxi Ji Shiti Xuaxiaug

吴振奎 编著

辽宁科学技术出版社出版 (沈阳市南京街6段1里2号)

辽宁省新华书店发行 朝阳新华零印厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 183/8 字数: 377,000

1984年12月第1版 1985年9月第2版第2次印刷

责任编辑, 刘 红 插图: 秦东辉 赵 明
封面设计: 广 凯

印数: 36,001—46200

统一书号: 7288.60 定价: 3.00元

前 言

近年来，随着教育事业的发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对在校学生，还是对已经工作的往届毕业生和自学者来讲，都提供了继续深造的机会。

“高等数学”是理科和多数工科专业的重要基础课，也是研究生入学考试的必试科目。但其内容较为庞杂，涉及科目也多，且题目灵活性大。对于报考者来讲，他们当然希望能有一份较简明的提纲，为他们复习提供某些线索，为他们应试传输点滴信息——至少可在不太长的时间内，对高等数学内容有所浏览，对其中的方法有所回顾。本书正是基于这一点而写的。

笔者一方面以提要方式（主要通过图表）对高等数学主要内容给以综合简述；另外还从历年研究生入学试题中筛选了一部分较有代表性的题目作为例子或习题（相对来讲，习题量较大，读者可根据情况选择其中一部分练习）。这些题目难度稍大、技巧性强，又多为综合问题，因而有的较难划分它属于哪个章节，这样对某些题目来讲，在内容顺序上会稍有打乱（这类题目我们往往把它放在特点较为突出的章节中），它对学过高等数学的读者来讲，是不会有困难的。还应指出一点，这儿给出的解法，可能不是最简的。书末附有

近年来部分院校的完整试题，供读者参考。

愿望与实效之间会有多大差距，这期待着读者的评鉴了。

高等数学教研室主任吴士培先生始终关心本书的编写工作，沈阳机电学院的黄友群先生对本书的构思提出过许多有益的建议，东北工学院数学系副主任黄士壁副教授对本书初稿提出许多宝贵的修改意见，笔者均表谢意。

吴 振 奎

1983年8月于辽宁大学数学系

再 版 说 明

近两年来，“线性代数”和“概率论”已被越来越多的专业列入硕士研究生“高等数学”试题中的科目（当然，它们的重要性不言自明）。为适应这一需要，笔者续写了这两部分内容。

体例仍同前面各章，即以“图表提示内容、选讲典型试题、附以适当练习（全部来自试题）”。

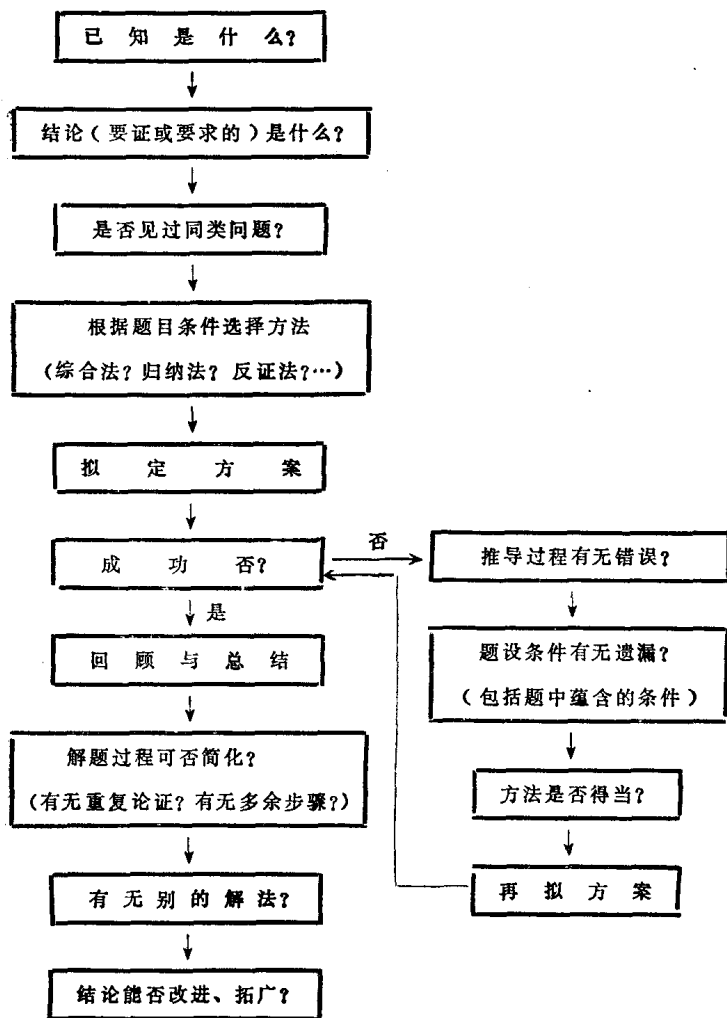
笔者记于1985年1月

目 录

一、矢量代数及空间解析几何	2
二、函数、极限、连续	25
三、一元函数微分学	52
四、一元函数积分学	88
五、多元函数微分	131
六、多元函数积分	158
七、级数	207
八、微分方程	24 ₂
九、线性代数	274
十、概率论	417
附篇 数学中的证明方法	506
附录 研究生高等数学入学试题选载	524
中国科学技术大学(1979年)	524
上海交通大学(1980年)	526
天津大学(1980年)	528
北方交通大学(1980年)	529
同济大学(1981年)	531
华中工学院(1981年)	532
浙江大学(1981年)	533
北京大学(1982年)	536
复旦大学(1982年)	542
中山大学(1982年)	544
清华大学(1983年)	546

北京师范大学(1983年)	548
哈尔滨工业大学(1983年)	550
北京工业学院(1983年)	552
中国科学院(1983年)	554
合肥工业大学(1984年)	558
东北工学院(1984年)	560
北京工业大学(1984年)	564
华东师范大学(1984年)	567
上海工业大学(1984年)	574
南京邮电学院(1984年)	576
吉林工业大学(1984年)	578

解题步骤的一个框图



一、矢量代数及空间解析几何

(一) 基本问题

1. 空间直角坐标系

2. 两点距离公式

空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

3. 定比分点公式, 坐标变换.

若 $M(x, y, z)$ 是 M_1M_2 的分点, 且 $M_1M:MM_2 = \lambda$, 则 $\lambda > 0$

时为内分; $\lambda < 0 (\lambda \neq -1)$ 时为外分, 且

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

(二) 矢量代数

矢量 (自由矢量) 既有大小又有方向的量称矢量. 记为

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} = \{a_1, a_2, a_3\}$$

矢量的模 若 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, 则矢量的模

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

单位矢量 方向与 $\mathbf{a}$ 相同, 模为 1 的矢量.

基本单位矢量 $\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{j} = \{0, 1, 0\}$,

$$k = \{0, 0, 1\}.$$

矢量的方向余弦 $\cos\alpha = a_1/|\mathbf{a}|$, $\cos\beta = a_2/|\mathbf{a}|$, $\cos\gamma = a_3/|\mathbf{a}|$. 其 α 、 β 、 γ 为矢量与三坐标轴夹角.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

两矢量的夹角 设 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 夹角 φ 满足:

$$\cos\varphi = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)/|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

矢量的运算

运算	法 则	运算律 (性质)
加 法	两矢量相加: 平行四边形 法则 (三角形法则) 多个矢量相加: 多边形法 则	交换律 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 结合律 $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ $= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
数 乘	$\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 共线($\lambda > 0$ 同向; $\lambda < 0$ 异向) $ \lambda\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} $ $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $-1\mathbf{a} = -\mathbf{a}$	数乘的结合律 $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a} = \mu(\lambda\mathbf{a})$ 向量按数因子的分配律 $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$ 数按向量因子的分配律 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
数 积	若 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ $= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	交换律 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ 结合律 $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$ 分配律 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ $= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ $(\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0)$

运算	法 则	运算律 (性质)
矢	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ 结合律 $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$
积	$ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$ 方向由右手法则确定	分配律 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ $(\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0})$
混	若 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, 则	轮换性 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
积	$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ $ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) $ 是以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 为棱的平行六面体体积。混积 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ 常记为 $[abc]$	$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 共面} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0)$

(三) 空间平面与直线

1. 空间平面方程

种 类	方 程 式
矢量式	$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{n}$ 为平面法矢, $\mathbf{r}_0$ 为已知点矢量。

种 类	方 程 式
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ 其中 $\{A,B,C\}$ 为平面法矢 $\mathbf{n}$, (x_0,y_0,z_0) 为平面上一点
一般式	$Ax+By+Cz+D=0, D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ a, b, c 为平面在三坐标轴上截距
三点式	若 $M_i(x_i, y_i, z_i),$ $(i=1,2,3)$ 为平面上三点, 则 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

2. 空间直线方程

种 类	方 程 式
矢量式	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{l}$, 其中 $\mathbf{r}_0$ 为直线上已知点矢量, s 为直线方向
标准式	$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ (x_0, y_0, z_0) 已知点, $\{m, n, p\}$ 直线方向矢量的一组方向数
交面式 (一般式)	$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
两点式	$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$ (x_i, y_i, z_i) ($i=1,2$) 为直线上已知点
参数式	$x = x_0 + mt, y = y_0 + nt, z = z_0 + pt, t$ 是参数

3. 点到平面距离

平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 及外一点 (x_0, y_0, z_0) , 点到平面距离

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

4. 直线、平面间的夹角

种 类	公 式
平面与 平面夹角	两平面 $A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 (i=1, 2)$ 夹角 φ: $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
直线与 直线夹角	两直线 $\frac{x-x_i}{m_i} = \frac{y-y_i}{n_i} = \frac{z-z_i}{p_i} (i=1, 2)$ 夹角 φ: $\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$
直线与 平面夹角	直线: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ 平面: $Ax + By + Cz + D = 0$ 夹角 φ: $\sin \varphi = \frac{ Am + Bn + Cp }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$

5. 直线与平面平行和垂直

位置关系	平行条件	垂直条件
平面与平面	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
直线与直线	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$	$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
直线与平面	$mA + nB + pC = 0$	$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

(四) 曲面与空间曲线

1. 曲面方程

用 $F(x, y, z) = 0$ (隐式) 或 $z = f(x, y)$ (显式)

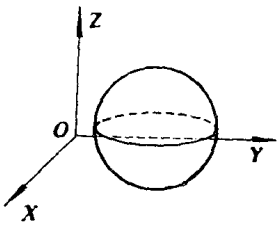
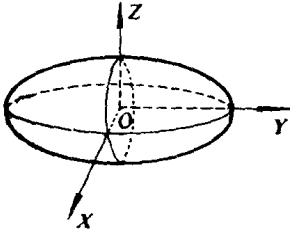
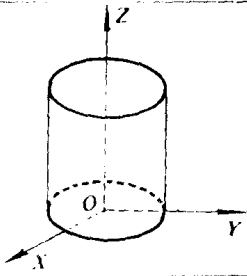
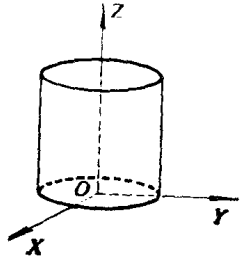
或
$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v), \end{cases} \quad (\text{参数式}) \text{ 表示空间曲面方程。}$$

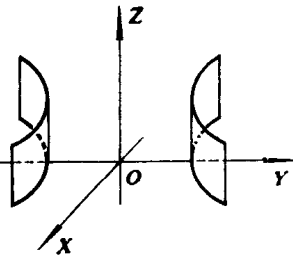
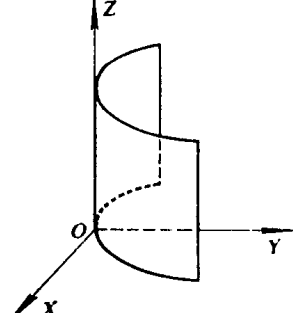
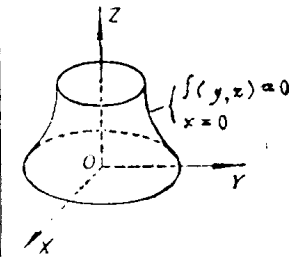
2. 空间曲线

用 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (\text{隐式}) \quad \text{或} \quad \begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad (\text{显式})$

或
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad (\text{参数式}) \text{ 表示空间曲线。}$$

(五) 二次曲面

名 称	方 程	图 形
球 面	$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ 球心: (a, b, c); 半径: R	
椭球面	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ a, b, c 为椭球面半轴	
柱 面	圆 柱 面 $x^2 + y^2 = R^2$	
	椭 圆 柱 面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	

柱面	双曲柱面 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	
面	抛物柱面 $x^2 - 2py = 0$	
旋 转 曲 面	曲线 $\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转成: $f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$	
椭 圆 抛物面	$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z$ $(p, q \text{ 同号})$	