



最新竞赛试题 选编及解析

初中数学卷

奥林匹克

首都师范大学出版社

最新竞赛试题选编及解析

初中数学卷

数学奥林匹克工作室 编

3/2/100/100

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

最新竞赛试题选编及解析. 初中卷/邓毅芳编. —北京:首都师范大学出版社,2001.7

ISBN 7-81064-273-1

I. 最… II. 邓… III. 课程-初中-试题-汇编 IV. G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 19674 号

ZUIXIN JINGSAI SHITI XUANBIAN JI JIEXI

最新竞赛试题选编及解析

初中数学卷

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)

北京嘉实印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

2001 年 7 月第 1 版 2001 年 7 月第 1 次印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10.625

字数 269 千 印数 00,001~15,000 册

定价 11.70 元

出版说明

2000 年是中国基础教育的“减负”年。对于教育类出版社来讲,有关教育类图书不仅仅面临的是发行册数锐减,还面临着不可逆转的图书退货浪潮。正是在这种形势下,我社仍然出版了这批中小学各科竞赛试卷汇编图书。为什么呢?想来,是基于以下几个方面的考虑:

一、中国的中小学教育水平,尤其是改革开放后的教育水平,无可争议的在世界是领先的。每一位关心教育的人士都知道,我国高中学生参加的国际学科奥林匹克竞赛,每一学科每个年度都取得了骄人的成绩。这些成绩的取得,是无数老师及教育工作者常年不断辛勤耕耘的结果。作为教育类出版社,作为出版学科奥林匹克图书时间最早、图书规模最全、影响最大的出版社,我们绝不能计较经济效益的得失,责无旁贷地要把老师们这些年的成果反映出来。

二、中小学各学科竞赛的宗旨,是让那些学有余力,学有兴趣或一时对该学科还没有学习主动性的学生在原有学科课堂教学的基础上进一步延伸拓展,以“培养兴趣,开发智力,提高能力”。这是当前我国实行素质教育的有机组成部分。由于受教育者的千差万别,让千千万万的中小學生齐步走是不实际的。有的学生数、理、化有优势,就应该让他们的数、理、化在原有的基础上再系统地多学一些;有的学生在文学、外语方面很有天赋,就应该让他们在这些领域比其他学生多学一些。现在流行一种倾向,谈到素质教育就是琴棋书画,谈到“减负”就是砍数、理、化,这是应该注意的。作为教育类出版社的编辑,要明确自己的责任,坚持正确的出版方向,努力为我国素质教育多做贡献。

三、出版这批图书是为了满足学生的实际需要。经常有一些学

生来信询问有关竞赛的资料及竞赛报名等问题,受个人、学校等方面条件的限制,他们不了解或不能参加各种竞赛是遗憾的。我想,这批图书对他们是有帮助的。

最后,还要再次说明的是,我社这批图书的出版,是为了尽可能全面地展示近年我国中小学学科竞赛的全貌,是想进一步推动我国学科竞赛的健康发展。这些试题的产生,是众多老师多年集体智慧的结晶。在这里,我社并代表全体编选者向每一位从事该项工作的专家和老师们致以崇高的敬意,并希望能够进一步加强联系,共同促进这项工作的开展。

董凤举

2001. 2. 28

说 明

目前各级各类的初中数学竞赛活动可谓品种繁多,《最新竞赛试题选编及解析——初中数学卷》辑录了近几年来比较有影响的初中数学竞赛试题和参考解答。

在辑录的过程中,我们参考了许多出版物。希望这份材料能够对老师的教学和同学的学习有所帮助。

参加编选工作的有:无边,白云,蒋雅玲,刘维,吴易,何伟,李志伟。

编者

2001年2月

目 录

试题/解答

全国初中数学联合竞赛(96 年度)	(1)(138)
“祖冲之杯”初中数学邀请赛(96 年度)	(3)(143)
北京市初一年级《迎春杯》数学竞赛(96 年度)	(6)(148)
北京市初中数学竞赛(初二, 96 年度)	(8)(153)
上海市初中数学竞赛(96 年度)	(9)(156)
天津市初中数学竞赛(初二, 96 年度)	(12)(162)
“希望杯”全国数学邀请赛(初一, 96 年度)	(13)(164)
“希望杯”全国数学邀请赛(初二, 96 年度)	(19)(173)
山东省初中数学竞赛(96 年度)	(26)(186)
四川省初中数学联赛(96 年度)	(29)(191)
江苏省初中数学竞赛(96 年度)	(33)(198)
河南省初二数学竞赛(96 年度)	(35)(205)
安徽省部分地区初中数学联赛(96 年度)	(37)(208)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(96 年度)	(39)(210)
全国初中数学联合竞赛(97 年度)	(41)(214)
“祖冲之杯”初中数学邀请赛(97 年度)	(43)(218)
北京市初一年级《迎春杯》数学竞赛(97 年度)	(45)(222)
北京市初中数学竞赛(初二, 97 年度)	(48)(227)
上海市初中数学竞赛(97 年度)	(50)(231)
天津市初中数学竞赛(97 年度)	(54)(233)
“希望杯”全国数学邀请赛(初一, 97 年度)	(56)(238)
“希望杯”全国数学邀请赛(初二, 97 年度)	(60)(243)
山东省初中数学竞赛(97 年度)	(64)(249)

江苏省初中数学竞赛(97 年度)	(66)(250)
安徽省部分地区初中数学联赛(97 年度)	(70)(253)
“学习报”初三数学公开赛(97 年度)	(72)(258)
太原市初中数学竞赛(97 年度)	(78)(261)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(97 年度)	(81)(265)
全国初中数学联合竞赛(98 年度)	(83)(271)
全国初中数学竞赛(98 年度)	(85)(275)
“祖冲之杯”初中数学邀请赛(98 年度)	(87)(280)
北京市初一年级《迎春杯》数学竞赛(98 年度)	(90)(282)
北京市初二年级数学竞赛(98 年度)	(92)(287)
上海市初中数学竞赛(98 年度)	(94)(292)
“希望杯”全国数学邀请赛(初一, 98 年度)	(97)(294)
“希望杯”全国数学邀请赛(初二, 98 年度)	(100)(295)
重庆市初中数学竞赛(初三, 98 年度)	(104)(297)
山东省初中数学竞赛(98 年度)	(107)(299)
江苏省初中数学竞赛(98 年度)	(109)(301)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(98 年度)	(113)(304)
全国初中数学联合竞赛(99 年度)	(115)(306)
全国初中数学竞赛(99 年度)	(117)(311)
北京市初二数学竞赛(99 年度)	(120)(316)
天津市初二数学竞赛(99 年度)	(121)(317)
重庆市数学竞赛(初二, 99 年度)	(123)(319)
山东省初中数学竞赛(99 年度)	(125)(320)
江苏省初中数学竞赛(99 年度)	(127)(323)
湖北省黄冈市初中数学竞赛(99 年度)	(130)(325)
全国初中数学联合竞赛(2000 年度)	(133)(328)
全国初中数学竞赛(2000 年度)	(135)(330)
参考解答	(138)

全国初中数学联合竞赛(96年度)

第一试

一、选择题

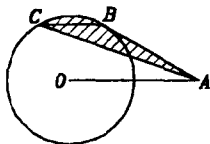
1. 实数 a, b 满足 $ab=1$, 记 $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$, $N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$, 则 M, N 的关系为().

- (A) $M>N$ (B) $M=N$ (C) $M<N$ (D) 不确定

2. 设正整数 a, m, n 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{2}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$, 则这样的 a, m, n 的取值().

- (A) 有一组 (B) 有二组
(C) 多于二组 (D) 不存在

3. 如图, A 是半径为 1 的圆 O 外的一点, $OA=2$. AB 是圆 O 的切线, B 是切点, 弦 $BC\parallel OA$, 连结 AC , 则阴影部分的面积等于().



第3题图

- (A) $\frac{2\pi}{9}$ (B) $\frac{\pi}{6}$

- (C) $\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

4. 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2+x-3=0$ 的两个根, 那么 $x_1^3-4x_2^2+19$ 的值等于().

- (A) -4 (B) 8 (C) 6 (D) 0

5. 如果一个三角形的面积和周长都被一直线所平分, 那么该直线必通过这个三角形的().

- (A) 内心 (B) 外心 (C) 重心 (D) 垂心

6. 如果 20 个点将某圆周 20 等分, 那么顶点只能在这 20 个点中选取的正多边形的个数有().

(A) 4 个 (B) 8 个 (C) 12 个 (D) 24 个

二、填空题

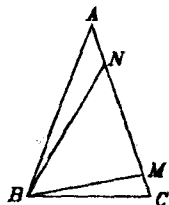
1. 已知实数 x_0, y_0 是方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = |x| + 1 \end{cases}$ 的解, 则 $x_0 + y_0 =$ _____.

2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle ABN = \angle MBC$, $BM = NM$, $BN = a$, 则点 N 到边 BC 的距离等于 _____.

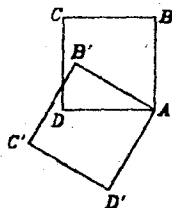
3. 设 $1995x^3 = 1996y^3 = 1997z^3, xyz > 0$, 且

$$\sqrt[3]{1995x^2 + 1996y^2 + 1997z^2} = \sqrt[3]{1995} + \sqrt[3]{1996} + \sqrt[3]{1997}.$$

则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} =$ _____.



第 2 题图



第 4 题图

4. 如右图, 将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 绕 A 点按逆时针方向旋转 60° 至 $AB'C'D'$ 的位置, 则这两个正方形重叠部分的面积是 _____.

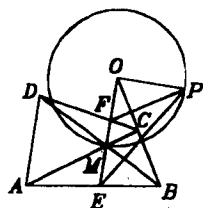
第二试

一、某校在向“希望工程”捐款活动中, 甲班的 m 个男生和 11 个女生的捐款总数与乙班的 9 个男生和 n 个女生的捐款总数相等, 都是 $(m \cdot n + 9m + 11n + 145)$ 元. 已知每人的捐款数相同, 且都是整数元, 求每人的捐款数.

二、已知 a, b, c 都是正整数, 且抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有

两个不同的交点 A, B , 若 A, B 到原点的距离都小于 1, 求 $a+b+c$ 的最小值.

三、设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的交点为 M , 过点 M 作 AD 的平行线分别交 AB, CD 于点 E, F , 交 BC 的延长线于点 O, P 是以 O 为圆心 OM 为半径的圆上一点 (位置如图示), 求证: $\angle OPF = \angle OEP$.



第三题图

“祖冲之杯”初中数学邀请赛 (96 年度)

一、选择题

1. 已知 $P = \frac{99^2}{9^{99}}$, $Q = \frac{11^9}{9^{90}}$, 那么 P, Q 的大小关系是 ().

(A) $P > Q$

(B) $P = Q$

(C) $P < Q$

(D) 无法确定

2. 甲用 1000 元人民币购买了一手股票, 随即他将这手股票转卖给乙, 获利 10%, 而后乙又将这手股票反卖给甲, 但乙损失了 10%. 最后甲按乙卖给甲的价格的九折将这手股票卖给了乙, 甲在上述股票交易中 ().

(A) 甲刚好盈亏平衡

(B) 甲盈利 1 元

(C) 甲盈利 9 元

(D) 甲亏本 1.1 元

3. 某房屋开发公司用 100 万元购得一块土地, 该地可以建造每层为 1000 平方米的楼房, 楼房的总建筑面积 (即每层面积之和) 的每平方米平均建筑费用与建楼高度有关, 楼房升高一层, 整幢楼房每平方米建筑费平均提高 5%, 已知建造 5 层楼房时, 每平方米的建筑费用为 400 元. 为了使该楼每平方米的平均综合费用最省 (综合费用是

建筑费用与购地费用之和),公司应把该楼建成().

- (A) 4层 (B) 6层 (C) 7层 (D) 8层

4. 已知三角形的三边的长 a, b, c 都是整数, 且 $a \leq b < c$, 如果 $b = 7$, 那么这样的三角形共有().

- (A) 21个 (B) 28个 (C) 49个 (D) 14个

5. 设 t 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的一个实数根, 则判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与平方式 $M = (2at + b)^2$ 的大小关系是().

- (A) $\Delta > M$ (B) $\Delta = M$ (C) $\Delta < M$ (D) 不能确定

6. 如果方程 $(m+2)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$ 只有一个实数根, 那么方程 $(m+1)x^2 - 2mx + m - 2 = 0$ ().

- (A) 没有实数根
(B) 有两个不同的实数根
(C) 有两个相等的实数
(D) 实数根的个数不能确定

7. 已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R , $\triangle BHC$ 外接圆半径为 r , 则 R 与 r 的大小关系是(三角形的三条高线交于一点, 这点称为三角形的垂心). ().

- (A) $R = r$ (B) $R > r$ (C) $R < r$

(D) $\triangle ABC$ 是锐角三角形时, $R > r$; $\triangle ABC$ 为钝角三角形时, $R < r$

二、填空题

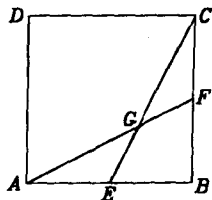
1. 已知 $0 < x < 1$, 化简

$$\sqrt{(x - \frac{1}{x})^2 + 4} - \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 4} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 已知 $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, 那么 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1995} =$

3. 凸九边形的对角线共有_____条.

4. 如图, E, F 是正方形 $ABCD$ 的两边 AB, BC 的中点, AF, CE 交于 G 点, 若正方形的面积等于 1, 那么四边形 $AGCD$ 的面积等于_____.



第 4 题图

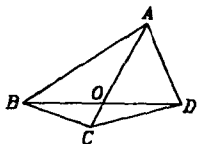
5. 方程 $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$ 的解是_____.

6. 已知 $a \cdot b \neq 1$, 且有 $5a^2 + 1995a + 8 = 0$ 及 $8b^2 + 1995b + 5 = 0$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

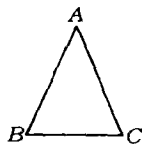
7. 已知一个六边形的六个内角都是 120° , 其连续四边的长依次是 1, 9, 9, 5 厘米. 那么这个六边形的周长是_____厘米.

三、已知两个三位数 $\overline{abc}, \overline{def}$ 的和 $\overline{abc} + \overline{def}$ 能被 37 整除. 证明: 六位数 $\overline{abcdef}$ 也能被 37 整除.

四、如图, O 是四边形 $ABCD$ 对角线的交点, 已知 $\angle BAD + \angle BCA = 180^\circ, AB = 5, AC = 4, AD = 3, \frac{BO}{OD} = \frac{7}{6}$, 求 BC .



第四题图



第六题图

五、已知 α, β 是方程 $x^2 - 7x + 8 = 0$ 的两根, 且 $\alpha > \beta$. 不解方程, 利用根与系数的关系求 $\frac{2}{\alpha} + 3\beta^2$ 的值.

六、在平面上给定等腰 $\triangle ABC$, 其中 $AB = AC$. 试在平面上求出所有符合下述条件的点 M , 使得 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 都是等腰三角形. (只需指明这些点的位置即可, 不要求证明)

北京市初一年级《迎春杯》数学竞赛 (96 年度)

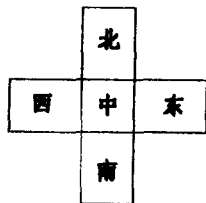
一、填空题

1. 计算: $-3.875 \times (0.775 - 10.\dot{3}) \div \frac{31}{8} \times \frac{8}{31} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 如果 $|a| = a + 1$, $|a - 1| x = a - 1$, 那么 $|x + a| - |x - a| = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 单项式 $0.25x^b y^c$ 和单项式 $-0.125x^{m-1} y^{2n-1}$ 是同类项, 且它们的和为 $0.0625a^m x^n y^m$, 那么 $abc = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 如果 $A = 2x^5 - 3x^2 y^3 + 2y^5$, $B = 2x^2 + xy - 3y^2$, $C = x^2 - xy - 7y^2$, 且 $A + D - [B - (C - A)] = 0$, 那么 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.



第6题图

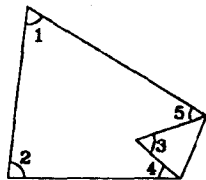
5. 一辆汽车从甲地开往乙地, 如果车速提高 20%, 可以比原定时间提前 1 小时到达. 如果要提前 2 小时到达, 那么车速应比原来车速提高 $\underline{\hspace{2cm}}$ %.

6. 把 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 这五个数分别填入图中的东、南、西、北、中五个方格内, 使横、竖三个数的和相等, 那么共有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 种不同填法.

二、填空题

1. 如图, $\angle 1 = 65^\circ$, $\angle 2 = 85^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$, $\angle 4 = 40^\circ$, 那么 $\angle 5$ 的度数等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知: $b < a < 1$, $ab < 0$, $a + b < -1$, 那么 a 、 b 、 $\frac{1}{a}$ 、 $a + \frac{1}{b}$ 之间的大小关系是 $\underline{\hspace{2cm}}$. (用“<”号连接)

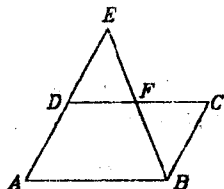


第1题图

3. 小明在商店购买甲种商品 x 件,乙种商品 y 件,共有 213 元. 已知甲种商品每件 7 元,乙种商品每件 19 元,那么 $x+y$ 最大值等于

三、填空题

1. 如图,平行四边形 $ABCD$ 的面积为 30cm^2 , E 为 AD 边延长线上的一点, EB 与 DC 交于 F 点. 如果三角形 FBC 的面积比三角形 DEF 的面积大 9cm^2 , 且 $AD=5\text{cm}$, 那么 $DE=$ _____ cm .

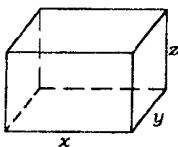


第 1 题图

2. 如果 $a_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$, 1995), 那么, 当 $a_1 = 1$ 时, $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \dots + a_{1995}a_{1996}$ 的值等于

3. 分母为 24, 分数值大于零小于 8 的所有既约分数的和等于

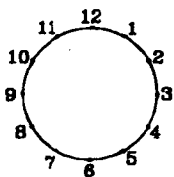
四、解答题



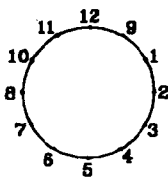
第 1 题图

1. 如图,长方形的长、宽、高分别为 x, y, z , 且 x, y, z 都是正整数. 已知: $xz = yz + 1, xy = xz + yz + 1$, 求长方体的体积.

2. 如图 1, 圆周上顺序排列着 $1, 2, 3, \dots, 12$ 十二个数, 我们规定: 相邻的四个数 a_1, a_2, a_3, a_4 顺序颠倒为 a_4, a_3, a_2, a_1 称为一次“变换”(如 1, 2, 3, 4 变为 4, 3, 2, 1, 又如 11, 12, 1, 2 变为 2, 1, 12, 11). 能否经过有限次“变换”, 将 12 个数的顺序变为 9, 1, 2, 3, $\dots$, 8, 10, 11, 12 (如图 2)? 请说明理由.



第2题图1



第2题图2

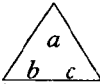
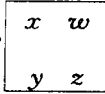
3. n 个足球队进行比赛, 比赛采用单循环制(即每队均与其他各队比赛一场). 现规定胜一场得 2 分, 平一场得 1 分, 负一场得 0 分. 如果每一队至少胜一场, 并且所有各队的积分都不相同, 问:

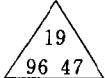
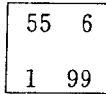
- (1) $n=4$ 是否可能? 请说明理由;
- (2) $n=5$ 是否可能? 请说明理由.

北京市初中数学竞赛 (初二, 96 年度)

一、填空题

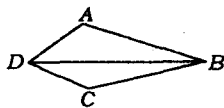
1. p 是质数, 并且 $p^6 + 3$ 也是质数, 则 $p^{11} - 52 = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. a, b 是彼此不等的非零数字, 则 $\overline{ababab}$ 与 4017 的最大公约数是 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 在正 $\triangle ABC$ 中, P 为边 AB 上的一点, Q 为边 AC 上的一点, 且 $AP = CQ$, 今量得 A 点与线段 PQ 的中点 M 之间的距离是 19cm, 则 P 点到 C 点的距离等于 $\underline{\hspace{2cm}}$ cm.

4. “三角”  表示运算 $a - b + c$, “方框”  表示

运算 $x - y + z - w$, 则  $\times$  $= \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 实数 a 与 b 满足等式 $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$, 则 $\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\underline{\hspace{2cm}}$.

二、一个自然数 a 恰等于另一自然数 b 的平方, 则称自然数 a 为完全平方数(如 $64=8^2$, 64 就是一个完全平方数). 若 $a=1995^2+1995^2 \cdot 1996^2+1996^2$, 求证: a 是一个完全平方数, 并请你写出 a 的平方根.



第三题图

三、在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABC=30^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$, $AD=DC$ (如图). 证明: $BD^2=AB^2+BC^2$.

四、解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y+z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

五、在 $1, 2, 3, \dots, 90, 91$ 这 91 个自然数中任取 k 个数, 使得其中必有两个自然数 p, q , 满足 $\frac{2}{3} \leq \frac{q}{p} \leq \frac{3}{2}$. 试确定自然数 k 的最小值, 并说明理由.

上海市初中数学竞赛 (96 年度)

1. 有理化分母并化简: $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}=\underline{\hspace{2cm}}$.

2. 一个班级数学测验的平均分为 80 分, 其中两个新转进来的学生成绩分别是 70 分和 60 分. 若扣除这两个新来的学生, 这个班的平均分可达到 81 分, 则这个班(包括两名新来学生)有 人.