2000年

全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数学

模拟试题与试卷

(经济类)

刘西垣 主编

QUANGUO SHUOSHI YANJIUSHENG RUXUE KAOSHI FUXI ZHIDAO CONGSHU

高等教育出版社

2000年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书

数　学 模拟试题与试卷

（经济类）

主编　刘西垣
编者　李正元　周民强　林源渠
　　　周建莹　尤承业　娄元仁

高等教育出版社

（京）112 号

图书在版编目（CIP）数据

数学模拟试题与试卷：经济类/刘西垣主编. -北京：
高等教育出版社，1999.5
（2000 年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书）
ISBN 7-04-007645-4

Ⅰ.数… Ⅱ.刘… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-试
题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 18533 号

责任编辑 吴 向 **封面设计** 顾 斌 **特约编辑** 苏蕙芯 **责任印制** 韩 刚

2000 年全国硕士研究生入学考试复习指导丛书——数学·模拟试题与试卷（经济类）
刘西垣 主编

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　话	010－64054588	**传　真**	010－64014048
	021－62587650		021－62551530
网　址	http://www.hep.edu.cn		
印　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　本	787×1092　1/16	**版　次**	1999 年 5 月第 1 版
印　张	25.5	**印　次**	1999 年 5 月第 1 次
字　数	620 000	**定　价**	29.00 元

第一部分　高等数学

第一章　函　数

练　习

研究下列函数的定义域,值域,奇偶性,周期性和有界性:

1. $y = |x|$.

2. $y = \sqrt{x(4-x)}$.

3. $y = \cos^2 x + 2$.

4. $y = |\sin x| + |\cos x|$.

证明下列函数在各自的定义域中是无界的:

5. $y = |2x - 1|$.

6. $y = x\tan x$.

求下列分段函数 $f(x)$, $g(x)$的复合函数 $f[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$, $g[g(x)]$:

7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

8. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x + 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$

求下列函数的反函数:

9. $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

10. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

11. $y = \begin{cases} 1 + x, & x \leqslant 0, \\ e^x, & x > 0. \end{cases}$

12. $y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & x > 4. \end{cases}$

13. $y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

求函数满足下列给定的关系式:

14. 设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$ $(x > 0)$,求 $f(x)$.

15. 设 $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\ (x > 0)$，求 $f(x)$.

16. 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x, y)$.

17. $z = x - y + f(x+y)$，已知当 $y = 0$ 时 $z = x^2$，求 f 及 z.

解　答

1. $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，$Z = \{y \mid y \geqslant 0\}$，偶函数，非周期，无界.

2. $D = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 4\}$，$Z = \{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 2\}$，非奇非偶，非周期，有界.

3. $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，$Z = \{y \mid 2 \leqslant y \leqslant 3\}$，偶函数，周期是 π，有界.

4. $D = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$，$Z = \{y \mid 1 \leqslant y \leqslant \sqrt{2}\}$，偶函数，周期是 $\frac{\pi}{2}$，有界.

5. 对 $\forall M > 0$，取 $x_M = \frac{M}{2} + 1$ 即可保证 $|2x_M - 1| \geqslant 2x_M - 1 = M + 1 > M$.

6. 对 $\forall M \geqslant 2$，取 $x_M = [M]\pi + \frac{\pi}{4}$ 即可保证 $|x_M \tan x_M| = x_M > M$. 事实上，当 $n \leqslant M < n+1\ (n = 2, 3, \cdots)$ 时，$x_M = n\pi + \frac{\pi}{4} > n + 1 > M$.

7. $\because f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x > 0$；$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$；

$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow x < 0$，

$\therefore f[f(x)] = f(x)$，

$\because g(x) = \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$；$g(x) = \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$；而 $g(x) \neq 0$，

$$\therefore f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$g[f(x)] = \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

$$g[g(x)] = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x,\ x \neq 0.$$

8. $\because f(x) \geqslant 1$，

$$\therefore f[f(x)] = f(x) + 1 = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ x + 2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$g[f(x)] = 1 - f^2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -2x - x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\because g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2 < 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}, \Leftrightarrow x > 1,$$

$$\therefore f[g(x)] = \begin{cases} 1, & g(x) < 0 \\ g(x) + 1, & g(x) \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 2, & x < 0, \\ 2 - x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$g[g(x)] = \begin{cases} 1, & g(x) < 0 \\ 1 - g^2(x), & g(x) \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x > 1, \\ 0, & x < 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

9. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$，$-\infty < x < +\infty$.

10. $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$，$-1 < x < 1$.

11. 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加，因而存在反函数

$$y = \begin{cases} x - 1, & x \leqslant 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

12. 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 单调增加,因而存在反函数

$$y = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \sqrt{x}, & 1 \leqslant x \leqslant 16, \\ \log_2 x, & x > 16. \end{cases}$$

13. 虽然函数在[1, 2]不是单调函数,但不同的 x 对应的函数值 y 不相同,因而存在反函数

$$y = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 3 - x, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

注意,这个例子表明非单调函数也可能存在反函数;另外这个函数的反函数与原来的函数有相同的解析式.

14. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$ $(x > 0)$.

15. $\because f\left(\dfrac{y}{x}\right) = \sqrt{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$ $(x > 0)$,

$\therefore f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

16. 将所给条件写成 $f\left(u + v, \dfrac{u}{v}\right) = u^2 - v^2$,并令 $u + v = x$, $\dfrac{u}{v} = y$,可解得 $u = \dfrac{x}{1 + y}$, $v = \dfrac{xy}{1 + y}$. 从而

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1 + y}\right)^2 - \left(\frac{xy}{1 + y}\right)^2 = x^2 \frac{1 - y}{1 + y},\ y + 1 \neq 0.$$

17. 由题设得

$$z = x + f(x) = x^2,$$

从而 $f(x) = x^2 - x$,代入即得 $z = (x + y)^2 - 2y$.

第二章 极限 连续 求极限的方法

§1 极限的概念及性质

练习 1.1

判断下列结论是否正确,并证明你的判断.

1. 若 $x_n < y_n (n > N)$,又存在极限 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = B$,则 $A < B$.

2. 设 $f(x)$ 定义在 (a, b),又 $c \in (a, b)$,存在极限 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$,则 $f(x)$ 在 (a, b) 有界.

3. 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$,则 $\exists \delta > 0$,当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

解 答

1. 不正确.

这时只能保证:$A \leqslant B$,不能保证 $A < B$.

例如,$x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{2}{n}$,则

$$x_n < y_n,$$

但
$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

【评注】 对不等式 $x_n < y_n(n > N)$ 两边取极限时，除保不等号外还要带上等号，即

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

2. 不正确.

这时只能保证：$\exists c$ 的一个空心邻域 $V_0(c, \delta)$，$f(x)$ 在 $V_0(c, \delta)$ 有界，不能保证 $f(x)$ 在 (a, b) 有界. 例如

$$f(x) = \frac{1}{x},\ (a, b) = (0, 1),$$

取 $c \in (0, 1)$，则 $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \dfrac{1}{c}$. 但 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 无界.

3. 正确.

因 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$，由存在极限的函数的局部有界性 $\Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - a| < \delta$ 时 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有界.

练习 1.2

单项选择.

1. 下列命题中正确的一个是(　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) \geqslant g(x)$.

(B) 若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 都存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(C) 若 $\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \Rightarrow \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > g(x)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域连续且 $f(0) = 0$，$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$，则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处(　　).

(A) 不可导.　　　　(B) 可导且 $f'(0) \neq 0$.

(C) 有极大值.　　　　(D) 有极小值.

3. 设 $f(x)$ 处处可导，则(　　)成立.

(A) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty$.

解　答

1. (D)正是极限的不等式性质中所述的结论。(A)的错误在于，由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 不能判断 x_0 附近

$f(x)$与$g(x)$的大小关系；由(B)的条件只能得 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. 在(C)中没假设极限存在.

2. 因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}=2>0$, 由极限的不等式性质，$\exists\,\delta>0$，当 $0<|x-0|<\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(0)}{1-\cos x}>0,$$

即 $f(x)-f(0)>0 \Rightarrow$ (D) 成立.

3. 想一想几何图形，曲线伸向无穷远，它的切线斜率不一定趋于∞. 如 $f(x)=x$，则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty} f'(x)=1.$$

于是(C)，(D)不对.

斜率是负的函数值未必是负的，如 $f(x)=x^2$，则

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty.$$

于是(B)不对.

因此只可能(A)正确.

【评注】 作为选择填空题，解答 3 中的思考过程可以选得正确的结论。若要证明结论(A)，首先就要用到极限的不等式性质。由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty \Rightarrow \exists\,X>0$，当 $x\geqslant X$ 时 $f'(x)>1 \Rightarrow f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)\ (x>X,\ \xi\in(X,x)) \Rightarrow f(x)\geqslant f(X)+(x-X)\ (x>X) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

§2 极限的存在与不存在问题

练习 2.1

证明下列数列 x_n 是收敛的：

1. $x_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$.

2. $x_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$.

3. $x_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}$.

解　答

1. x_n 中的每个乘积因子均小于 1 且是正的 $\Rightarrow x_n>0$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1 \Rightarrow x_n$ 单调下降有下界 $\Rightarrow x_n$ 收敛.

2. $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{3^{n+1}+1}>0$，

$$x_n<\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}<\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow x_n$ 单调上升有上界 $\Rightarrow x_n$ 收敛.

3. $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{(n+1)^2+1}>0$，

$$x_n<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2.$$

$\Rightarrow x_n$ 单调上升有上界 $\Rightarrow x_n$ 收敛.

练习 2.2

对下列函数 $f(x)$，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 是否存在？

1. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$.　　　2. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

3. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\arctan\dfrac{1}{x}$.　　　4. $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}$.

解　答

1. 考察左、右极限 $f(0+)$ 与 $f(0-)$.

$$\lim_{x\to 0+}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{t-1}=1,\ \lim_{x\to 0-}f(x)\xlongequal{t=e^{\frac{1}{x}}}\lim_{t\to 0-}\frac{t+1}{t-1}=-1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0-}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

2. 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\longrightarrow 0\ (n\to+\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{x_n^2}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2=+\infty\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

注：若再取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则

$$\lim_{n\to+\infty}f(y_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=0,$$

因此，$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的，但 $x\to 0$ 时它不是无穷大量.

3. $$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\cdot\lim_{x\to 0+}\arctan\frac{1}{x}=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\lim_{x\to 0-}\arctan\frac{1}{x}=-1\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$　　$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在

$\Rightarrow$　　得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

4. 题 2 中已证：$x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的，又 $\sin\dfrac{1}{x^2}$ 是有界的 $\Rightarrow x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 空心邻域是无界的 $\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)$ 不存在.

§3 无穷小和它的阶

练习 3.1

比较无穷小量的阶.

1. 当 $x\to 0$ 时 2^x+3^x-2 与 x 相比是(　　)的无穷小量.

(A) 等价.　　　　(B) 同阶非等价.　(C) 高阶.　　　　(D) 低阶.

2. 当 $x\to0$ 时 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t$ 是 $g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$ 的(　　)无穷小量.

(A) 低阶.　　　　(B) 高阶.　　　　(C) 等价.　　　　(D) 同阶非等价.

3. 设 $f(x)$, $g(x)$在 $x=0$ 某邻域连续且 $x\to0$ 时 $f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小,则 $x\to0$ 时$\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$ 是$\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t$ 的(　　)无穷小.

(A) 低阶.　　　　(B) 高阶.　　　　(C) 同阶非等价.　(D) 等价.

解　答

【分析】 这是几道比较无穷小阶的题目,比较无穷小量 $f(x)$, $g(x)$的阶,就是求$\frac{0}{0}$型极限 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$,看它是属于:0; ∞; $0<l<+\infty$, $l\neq1$; $l=1$ 中的哪一种情形,求$\frac{0}{0}$型极限常用洛必达法则.求变限积分的导数时要用变限积分求导法.

1. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(2^x+3^x-2)'}{x'}=\lim_{x\to0}(2^x\ln2+3^x\ln3)=\ln6,$$

故选(B).

2. 因为

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\mathrm{d}t\right)'}{\left(\frac{x^5}{5}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2\sin x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}\cdot\sin x=0.$$

其中

$$\sin(1-\cos x)^2\sim(1-\cos x)^2\quad(x\to0)$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$$

故选(B).

3. 因

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t}{\int_0^x t\varphi(t)\mathrm{d}t}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)\sin x}{\varphi(x)x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=0\times1=0.$$

故选(B).

注:当 $x\to x_0$ 时比较无穷小量 $f(x)$与 $g(x)$的阶,等价于比较 $f^*(x)$与 $g^*(x)$的阶,其中

$$f(x)\sim f^*(x),\ g(x)\sim g^*(x)\ (x\to x_0).$$

练习 3.2

确定无穷小的阶与比较无穷小的阶.

1. 当 $x\to0$ 时,下列无穷小中:

$\ln(1+\sin x)$, $x-\sin x$, $x\tan x$, $\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$, $\frac{1}{\ln|x|}$, (　　　　　)是 x 的一阶无穷小;(　　　　　)是 x 的二阶无穷小;(　　　　　)是 x^2 的高阶无穷小.

2. 设 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 为任意正数，当 $x \to +\infty$ 时，将无穷小量：$\frac{1}{x^\alpha}$，$\frac{1}{\ln^\beta x}$，e^{-x} 按从低阶到高阶的顺序排列.

解　答

1. (1) $\ln(1+\sin x) \sim \sin x \sim x \ (x \to 0)$

$\Rightarrow x \to 0$ 时，$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的一阶无穷小；

(2) 因 $x \to 0$ 时

$$(x-\sin x)' = 1-\cos x \to 0,\ (1-\cos x)' = \sin x \to 0,\ (\sin x)' = \cos x \to 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow$ $x \to 0$ 时 $x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

(3) 因 $\tan x \sim x$ 是 x 的一阶无穷小 $\Rightarrow x\tan x$ 是 x 的二阶无穷小.

(4) $1-\sqrt{\cos x^2} = \frac{1}{1+\sqrt{\cos x^2}}(1-\cos x^2) \sim \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x^2)^2$

$\Rightarrow 1-\sqrt{\cos x^2}$ 是 x 的 4 阶无穷小 $\Rightarrow \frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的$(6-4=2)$ 2 阶无穷小.

(5) 考察

$$\lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{\ln|x|}} = 0$$

$\Rightarrow x \to 0$ 时 x 是比 $\frac{1}{\ln|x|}$ 高阶的无穷小量.

因此，$x \to 0$ 时，

$\ln(1+\sin x)$ 是 x 的 1 阶无穷小；$x\tan x$，$\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的 2 阶无穷小；$x - \sin x$ 是 x^2 的高阶无穷小.

2. 考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^\alpha}}{\frac{1}{\ln^\beta x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x\cdot\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta\ln^{\beta-1}x}{\alpha x^\alpha} = \cdots$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-m+1)\ln^{\beta-m}x}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^\alpha} = 0,$$

其中 $m = [\beta]+1$（$[\beta]$ 是不超过 β 的最大整数）. 于是

$$\frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta x}\right) \ (x \to +\infty).$$

再考察

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{e^x} = 0.$$

因此，$x \to +\infty$ 时按从低阶到高阶的顺序排列为

$$\frac{1}{\ln^{\beta} x},\ \frac{1}{x^{\alpha}},\ e^{-x}.$$

【评注】 上述结论表明:当 $x\to+\infty$ 时,若以 $\frac{1}{x}$ 为基本无穷小,对 $\forall\alpha>0$(不论它多么大),e^{-x} 都比 $\frac{1}{x^{\alpha}}$ 高阶;对 $\forall\beta>0$(不论它多么大),$\forall\alpha>0$(不论它多么小),$\frac{1}{x^{\alpha}}$ 都比 $\frac{1}{\ln^{\beta}x}$ 高阶.

§4 求极限的方法

练习 4.1

求下列极限:

1. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$.

2. $w=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

3. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

4. $w=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot}x}$.

5. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

6. $w=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

7. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x-\sin x}{\arctan x-\tan x}$.

8. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)-\ln(1-x+x^2)}{x\sin x}$.

9. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(1+x)}{x^3}$.

10. $w=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 答

【分析】 这些极限属于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限常用的方法有:

1° 通过恒等变形约去(或在取极限的意义下约去)分子、分母中极限为零或 ∞ 的因子,然后用极限四则运算法则.

2° 用洛必达法则.

3° 作变量替换与等价无穷小因子替换.

4° 用重要极限公式.

1. 作恒等变形:分子、分母同乘 $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$

得
$$w=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

2. 作恒等变形:分子、分母同除以 $-x(x<0)$,注意 $-x=\sqrt{x^2}=|x|$,得

$$w=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1.$$

3. 作恒等变形:分子、分母同除以 x,有

$$w=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{3}{2}.$$

【评注 1】 题 1～3 均是作简单恒等变形后消去极限为 0 或∞的因子，或直接相消或等价无穷小取极限后相消，其中还用到两个重要的极限公式.

【评注 2】 题 1～3 均是 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的极限，有的也可用洛必达法则，但并不简单。有的则不能用洛必达法则，如题 3，因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}\right)'}{x'}$$

不存在.

4. 属于 $\frac{0}{0}$ 型，先用等价无穷小因子替换：

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}\ (x\to\infty),$$

再用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{arccot}x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{1+x^2}}=1.$$

5. 这是 $\frac{0}{0}$ 型的，从其特点看，不要立即用洛必达法则，先作恒等变形与变量替换后再用.

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}e^x\lim_{t\to 0}\frac{1-e^{-t}}{t}=1.$$

6. 先作恒等变形与等价无穷小因子替换：

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ 1-\cos\sqrt{x}\sim\frac{1}{2}x\ (x\to 0),$$

$$w=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{2}\,)}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos x}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2}.$$

7. 直接用洛必达法：

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\cos x}{\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\cos^2 x-(1+x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}\cos x}{\cos^2 x-(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\sin x+\frac{x\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{-2\sin x\cos x-2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}\,\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x\,\frac{\sin x}{x}+1}=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=-\frac{1}{2}.$$

8. 先作恒等变形与等价无穷小因子替换：

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x^4}{x^2}=1$$

其中 $\ln(1+x^2+x^4)\sim x^2+x^4$.

【评注】 从题 4～7 的求解中看到，在用洛必达法则求 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 的极限时，要注意作恒等变形和等价无穷小因子替换，以简化计算.

9. 直接用洛必达法则得

$$w=\lim_{x\to0}\frac{e^x(\sin x+\cos x)-1-2x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2e^x\cos x-2}{6x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3}(e^x\cos x-e^x\sin x)=\frac{1}{3}.$$

10. 看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的，通过变量替换又化成 $\frac{0}{0}$ 型：

$$w=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x^2}}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2te^{t^2}}=0.$$

【评注 1】 在题 10 中，若把所求极限看成 $\frac{0}{0}$ 型，便有

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{1}=\lim_{x\to0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

易见等式右端的极限变得更复杂了. 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定式，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}}$ 便是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式。因此在求它的极限时，将它看成 $\frac{0}{0}$ 型用洛必达法好呢？还是看成 $\frac{\infty}{\infty}$ 型用洛必达法则？有时需要考虑这个问题，当然这是视情况而定.

【评注 2】 类似于题 10 的方法可证：

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0.$$

练习 4.2

求下列极限：

1. $w=\lim\limits_{x\to1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$.

2. $w=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)$, $(a, b>0)$.

3. $w=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

4. $w=\lim\limits_{x\to1-0}\sqrt{1-x^2}\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

5. $w=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

解 答

【分析】 这是几道求 $0\cdot\infty$ 或 $\infty-\infty$ 型的极限，按通常的方法：化成 $\frac{0}{0}$ 型的，再用洛必达法则。在求解

的过程中要注意作恒等变形和等价无穷小因子替换以简化计算.

1. 属于 $0\cdot\infty$ 型,可化为 $\frac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi x}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

也可化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,则

$$w=\lim_{x\to 1}\frac{\tan\frac{\pi x}{2}}{\frac{1}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{(1-x)^2}}=\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)^2}{\cos^2\frac{\pi}{2}x}$$

$$\xlongequal{x-1=t}\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}t\right)^2}{\sin^2\frac{\pi}{2}t}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}.$$

前一种方法更简单些.

2. 属于 $\infty\cdot 0$ 型,可化为 $\frac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to 0}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}.$$

本题化为 $\frac{0}{0}$ 型是自然的,若化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 的

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)^{-1}}$$

再用洛必达法则就繁了.

3. 属于 $\infty-\infty$ 型,先化成 $\frac{0}{0}$ 型.

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2x}{x^2\sin^2x}.$$

作等价无穷小因子替换与恒等变形得

$$w=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}.$$

4. 属于 $0\cdot\infty$ 型,按题目特点应作恒等变形与等价无穷小因子替换得

$$w=\lim_{x\to 1-0}\left[\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}(1+x)\cos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]=1\times 2\times 1=2.$$

5. 属于 $\infty\cdot 0$ 型,看成两个 $\infty\cdot 0$ 型极限之差更方便,求每个极限时可用等价无穷小因子替换:

$$w=\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(3\cdot\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}\right)-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=3-1=2.$$

另解：把原式改写成

$$x\left(\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=2\frac{\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$=2\cdot\frac{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-f\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1+\frac{3}{x}\right)-\left(1+\frac{1}{x}\right)},$$

其中 $f(t)=\sin\ln t$. 因而可用微分中值公式得

$$w=2\lim_{x\to\infty}f'(\xi)\ (\xi\text{ 在 }1+\frac{3}{x}\text{ 与 }1+\frac{1}{x}\text{ 之间},x\to\infty\text{ 时 }\xi\to1)$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left(\cos\ln\xi\cdot\frac{1}{\xi}\right)=2\lim_{\xi\to1}\left(\cos\ln\xi\cdot\frac{1}{\xi}\right)=2.$$

【评注】 上题的后一种解法是求某类极限时较特殊的一种方法——用微分中值定理.

练习 4.3

求下列极限：

1. $w=\lim\limits_{x\to0}(\arcsin x)^{\tan x}$.　　2. $w=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

3. $w=\lim\limits_{x\to0+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$.　　4. $w=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.

解　答

【分析】 这是求指数型(1^∞，0^0或 ∞^0)的极限：

$\lim f(x)^{g(x)}$ 均化为求 $\lim(g(x)\ln f(x))$ $(0\cdot\infty$ 型$)$，再化为求 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的. 在求 1^∞ 型极限时，常用等价无穷小因子替换：$\ln f(x)=\ln(f(x)-1+1)\sim f(x)-1$，其中 $f(x)\to1$.

$$1.\ \lim_{x\to0}(\tan x\ \ln\arcsin x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln\arcsin x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\arcsin x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=-\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\arcsin x}\xlongequal{t=\arcsin x}-\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t}{t}=0.$$

因此

$$w=e^{\lim\limits_{x\to0}(\tan x\ln\arcsin x)}=e^0=1.$$

$$2.\ \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1+1\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}$$

$$=2+0=2.$$

因此

$$w=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]}=e^{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{\ln x}\ln\cot x\right)=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{1}{\cot x}\left(-\frac{1}{\sin^2x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{-x}{\sin x\cos x}=-1,$

因此，
$$w=e^{-1}.$$

4. $\lim\limits_{x\to0}\left(-\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[-\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2},$$

因此
$$w=e^{\frac{1}{2}}.$$

练习 4.4

求下列数列的极限：

1. $w=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right).$

2. $w=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3na+a^2}{n^2}\right)^{-n}$（$a\neq0$ 为常数）.

3. $w=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$

解　答

【分析】 求这几道数列的极限，可用的方法有：作恒等变形化为可用四则运算法则的情形；作恒等变形化为可用重要极限的情形；求数列极限转化为求函数的极限.

1. 分子、分母同乘 $\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}$，得

$$w=\lim_{n\to+\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

$$=2.$$

2. **【解法 1】** 作恒等变形，转化为可利用 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 的情形，

$$w=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3na+a^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3na+a^2}\cdot\frac{-(3na+a^2)}{n}},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3na+a^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3na+a^2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-(3na+a^2)}{n}=-3a,$$

因此
$$w=e^{-3a}.$$