波兰数学竞赛题解

朱尧辰 译

知识出版社

波兰数学竞赛题解

1—27 届

〔波〕耶·勃罗夫金
斯·斯特拉谢维奇 著

朱 尧 辰 译

知 识 出 版 社

Страшевич С., Бровкин Е.
Польские математические олимпиады
Перевод с польского Ю.А.Данилова
Издательство мир, москва 1978

波兰数学竞赛题解
〔波〕耶·勃罗夫金　斯·斯特拉谢维奇著　朱尧辰译
知　识　出　版　社　出　版
（北京市安定门外外馆东街甲一号）
新华书店北京发行所发行
二二〇七工厂印刷
开本 787×1092　1/32　印张 10.625　字数 226 千字
1982 年10月第 1 版　1982 年10月第 1 次印刷
印数：1—25,000
书号：7214·14　定价：1.00

目　录

问　　题

1949—1950 年竞赛题

1．证明：如果 a，b，c 是正数，并且 $abc=1$，那么

$$a+b+c\geqslant 3$$

2．求下列方程的整数解：

$$y^3-x^3=91$$

3．试证明：如果自然数 n 大于 4，并且不是素数*，那么从 1 到 $n-1$ 的连续自然数之积能被 n 整除。

4．在圆上任取三点 A，B，C，求证由圆上任一点 M 向直线 AB，BC 及 CA 所作垂线的垂足在一条直线上。

5．由四面体的任一顶点向对面所作的垂线称为四面体的高。求证：如果四面体的两条高相交，那么它的另两条高也相交。

6．有一个扳手，其孔洞形状是一个边长为 a 的正六边形，要求能够用它来拧松一个截面形状是一个边长为 b 的正方形的螺母。

为使问题有解，线段长 a 与 b 应满足什么样的条件？

---

* 素数也称质数。两数互质也称两数互素。

1950—1951 年竞赛题

7．已知m，n，p，q是实数。为了使二次三项式

$$x^2+mx+n \text{ 及 } x^2+px+q$$

都有实根，并且其中任一个多项式的两个根被另一个多项式的根分隔开来，系数m，n，p，q应满足什么条件？

8．在数 3000003 中，应把它的百位数字和万位数字 0 换成什么数字，才能使所得的数能被 13 整除？

9．求证：如果正数a，b，c之和等于 1，那么

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 9$$

10．一根长为a的木梁，它的两端悬挂在两条互相平行的、长度都是b的绳索下，木梁处于水平位置。如果把木梁绕通过它的中点的铅垂轴转动一个角度φ，那么木梁升高多少？

11．四边形$ABCD$内接于圆，直线AB，DC交于E点，直线AD,BC交于F点。$\angle AEC$的平分线交BC边于M点，交AD边于N点，$\angle BFD$的平分线交AB边于P点，交CD边于Q点。

求证四边形$MPNQ$是菱形。

12．已知一圆和线段MN。

在圆上求一点C，使$\triangle ABC$与$\triangle MNC$相似，这里A，B分别是直线MC，NC与圆的交点。

1951—1952 年竞赛题

13．试指出，如果方程

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

有三个成等差数列的实根，实数 a，b，c 应满足什么样的充要条件？

14．证明：如果三角形的三个角 A，B，C 满足关系式

$$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$$

那么这三个角中有一个是 120°。

15．证明：对任何自然数 n，和数

$$1+2+\cdots+n$$

的末尾数字不可能是 2，4，7，9。

16．如果凸四边形 $ABCD$ 的角 A，B，C，D 中没有一个是直角，试证明

$$\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} D}{\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \operatorname{tg} D}=\operatorname{ctg} A+\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} D$$

17．在 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上分别取点 M，N，P，使适合

$$\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA}=\frac{AP}{PB}=k$$

这里 k 是大于 1 的已知数。连接线段 AM，BN，CP。

已知 $\triangle ABC$ 的面积是 S，求直线 AM，BN，CP 所交出的三角形面积。

18．在一个内直径是 2 米的圆塔中，有一个高为 6 米的螺旋形楼梯，每层台阶高 0.15 米，从上往下看，螺旋形楼

梯相邻两台阶组成的中心角是18°。各个台阶的内缘固定在一个直径是0.64米、与圆塔具有公共轴心的柱子上。

求可以沿这样的楼梯从楼下搬到楼上的直杆的最大长度（杆的径向厚度及台阶的宽度忽略不计）。

1952—1953年竞赛题

19．证明：如果 n 是自然数，那么

$$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

这里 m 是一个自然数。

20．一辆汽车从O点出发沿一条直线公路行驶，其速度 v 保持不变。汽车开动的同时，在距O点为 a、距公路线为 b 的地方有一个人骑自行车出发，想把一封信递送给这辆汽车的司机。

问骑自行车的人至少必须以多大的速度行驶，才能实现他的愿望。

21．如果等式

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

成立，那么角 α，β，γ 应满足什么样的代数关系式？

22．证明：如果一个平面图形具有并且只有两条对称轴，那么这两条对称轴互相垂直。

23．已知两条异面直线 m 和 n。在直线 m 上放置一条已知长度 a 的线段 AB，在直线 n 上放置一条已知长度 b 的线段 CD。

证明：四面体 $ABCD$ 的体积与线段 AB，CD 在直线 m，

n 上的位置无关。

24. 求顶点在一个已知三角形的周界上的矩形中心的几何轨迹。

1953—1954 年竞赛题

25. 如果 $x+1/x=a$，a 是已知数，求 $x^{13}+1/x^{13}$。

26. 证明：如果 x_1，$x_2\cdots$，x_n 是 0°到 180°间的角，n 是大于 1 的任意自然数，那么

$$\sin(x_1+x_2+\cdots+x_n)<\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$$

27. 求满足不等式

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-a}>2$$

的 x 值，这里 a 是已知数。

28. 一个均匀的圆盘悬挂在一根系于圆盘中心 O 的细线之下而处于水平位置，在圆盘边缘上的三个不同点 A,B,C 分别放置重量 p_1，p_2，p_3 后，没有破坏圆盘的平衡。

计算$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COA$。

29. 证明：如果四面体 $ABCD$ 的对棱分别相等（亦即 $AB=CD$，$AC=BD$，$AD=BC$），那么通过每组对棱中点的直线互相垂直，并且是四面体的对称轴。

30. 一个半径为 r 的小圆圈沿着一个半径为 $2r$ 的圆箍内缘滚动，并且没有滑动。

圆圈上的任意一点将画出什么样的曲线？

1954—1955 年竞赛题

31．把多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 表示为两个次数不同的实系数多项式的平方差的形式。

32．为使方程

$$x^3+a^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

有三个组成几何数列的不同的实根，实数 a，b，c 应满足什么样的条件？

33．证明：在组成公差为 30 的算术数列的 7 个自然数之中，有一个而且只有一个数能被 7 整除。

34．已知 P 是 $\triangle ABC$ 内部一点。

在 $\triangle ABC$ 的周界上求一点 Q，使折线 APQ 平分 $\triangle ABC$ 的面积。

35．已知平面上一条直线 m 及这直线两侧的两个点 A，B。

在直线 m 上求一点 M，使它到点 A，B 的距离之差最大。

36．过点 A 和 B 引两条异面直线 n，m 与直线 AB 垂直，在直线 m 上取一点 C（不与点 B 重合），在直线 n 上取一点 D（不与点 A 重合）。

如果已知线段 $AB=d$，$CD=l$，并且直线 m，n 间的夹角为 φ，求经过 A，B，C，D 四点的球的半径。

1955—1956 年竞赛题

37．证明：当且仅当

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4) \qquad (1)$$

时，长为 a，b，c 的三条线段可以作成一个三角形。

38．证明：如果实数 a，b，c 满足关系式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \qquad (1)$$

那么对任何奇数 n，

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n} \qquad (2)$$

39．证明，如果自然数 a，b，c 满足关系式

$$a^2+b^2=c^2 \qquad (1)$$

那么(i)数 a 和 b 中至少有一个能被 3 整除；(ii)数 a 和 b 中至少有一个能被 4 整除；(iii)数 a，b，c 中至少有一个能被 5 整除。

40．已知一直线上三个不同的点 M，D，H。

求作一个直角三角形，使它的斜边的中点是点 M，直角平分线与斜边的交点是点 D，斜边上的高的垂足是点 H。

41．证明：任何一个周长为 $2a$ 的多边形，总可以用一个直径为 a 的圆盖住。

42．已知一个半径为 R 的球及一个与球无公共点的平面 α。有一个圆锥，顶点 S 在平面 α 上运动，并且与球切于中心是点 C 的圆。

求点 C 的几何轨迹。

1956—1957 年竞赛题

43．求一个四位数，它的前两位数字及后两位数字分别相同，而该数本身等于一个整数的平方。

44．证明：如果 x，y，z 及 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 都是有理数，那么 $\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$，$\sqrt{z}$ 也是有理数。

45．证明：如果当自变数 x 取任意整数值时，二次三项式 ax^2+bx+c 总取整数值，那么 $2a$，$a+b$ 及 c 都是整数，并且反过来也正确。

46．证明：如果有一个圆与凸四边形各边相切（这圆称为四边形的内切圆），又有一个圆与这四边形各边延长线相切（这圆称为四边形的傍切圆），那么这个四边形的对角线互相垂直。

47．已知线段 MN 的两个端点在一个等腰三角形的两腰上。过 MN 的中点 S 作等腰三角形的底边的平行线，交两腰于点 K 和 L。

证明：线段 MN 在三角形底边上的正投影等于线段 KL。

48．已知线段 AB 及与它平行的直线 m。

只用直尺，亦即只画直线，将线段 AB 三等分。

1957—1958 年竞赛题

49．证明：如果三个连续自然数中有一个是自然数的立方，那么它们的乘积能被 504 整除。

50．证明：如果 n 是大于 1 的自然数，那么

$$\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{4\pi}{n}+\cos\frac{6\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{2n\pi}{n}=0$$

51．证明：如果 k 是自然数，那么对于任何 x，

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^k})$$
$$=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^m$$

这里 m 是与 k 有关的自然数，并且求出 m。

52。将四边形 $ABCD$ 的每条边三等分，过边 AB 及 AD 上靠近顶点 A 的两个分点作一直线，类似地分别过靠近顶点 B，C，D 的两个分点各作一直线，这些直线交出一个新的四边形。

证明：新四边形与原来的四边形 $ABCD$ 的重心互相重合。

53．证明：在四面体中，它的任一个二面角的平分面分对棱所得两线段之比，等于组成这个二面角的两个面（三角形）的面积之比。

54．证明：外切于已知圆的所有四边形中，正方形的周长最短。

1958—1959 年竞赛题

55．已知一个数列 13，25，43，…，它的第 n 项是

$$a_n=3(n^2+n)+7$$

证明这个数列具有下列性质：

(i)它的任意连续五项中必有一个能被 5 整除。

(ii)数列的任一项都不是整数的立方。

56．证明：对于任何实数 a，b，下列不等式成立：

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\leqslant\frac{a^6+b^6}{2}$$

57．证明：如果整系数二次方程

$$ax^2+bx+c=0\quad(a\neq 0)$$

有有理根，那么数 a，b，c 中至少有一个是偶数。

58．在平面上有 n（$\geqslant 3$）条线段，其中任何三条都有公共点。

证明：所有这 n 条线段有一个公共点。

59．在等边三角形 ABC 的内部取一点 O，从 O 点作边 BC，CA，AB 的垂线 OM，ON，OP。

证明：线段 AP，BM，CN 之和与点 O 的位置无关。

60．已知顶点为 S，底面是正方形 $ABCD$ 的四棱锥。

在棱锥表面求一条最短的路线，它的始点和终点都是顶点 S，并且经过棱锥底面的所有顶点。

1959—1960 年竞赛题

61．(i)求二次方程

$$\begin{cases}x^2+p_1x+q_1=0\\x^2+p_2x+q_2=0\end{cases}\qquad(*)$$

有公共根的充要条件。

(ii)证明：如果二次方程(*)有公共根，但两个方程并不互相重合，并且 p_1，q_1，p_2，q_2 都是有理数，那么这两个方程的根都是有理数。

62．证明：如果 n 是大于 4 的整数，那么 2^n 大于 n^2。

63．由数字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 组成一切可能的没有重复数字的四位数，求这些数之和。

64．过正四面体的高作一个平面，与四面体的三个侧面交于三条直线，这三条直线与四面体底面夹角为 α，β，γ。

证明：$\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}^2\beta+\mathrm{tg}^2\gamma=12$ (1)

65．在圆上取六个点 A，B，C，D，E，F，使弦 AB 与弦 DE 平行，弦 DC 与弦 AF 平行。

证明：弦 BC 平行于弦 EF。

66．在矩形的边界上取一点 M。

求一条最短的路线，它的起点和终点都是 M 点，并且它与矩形各边都有公共点。

1960—1961 年竞赛题

67．证明：没有一个形如 2^n（n 为任意自然数）的数可以表示成两个或多个连续自然数之和。

68．证明：任何一个不是 2 的整数次幂的自然数，一定可表成两个或多个连续自然数之和。

69．某人给六个不同的收信人写了六份信，并且准备了六个写有收信人地址的信封。

有多少种投放信笺的方法，使每份信笺与信封上的收信人都不相符？

70．证明：如果四面体被平面所截得的截面形状是平行四边形，那么这个平行四边形的半周长介于四面体的最长棱长和最短棱长之间。

71. 证明：如果三角形的每条边长都小于1，那么三角形面积小于$\sqrt{3}/4$。

72. 四条直线交于六点，组成四个三角形。

证明：这些三角形的外接圆交于一点。

1961—1962年竞赛题

73. 求一个三位数，它具有下列性质：将它的数字按原来的顺序在某个异于十进位制的记数制中写出的数，是原数的2倍。

74. 把由n个元素组成的集划分为两个集，有多少种不同的分法？

75. 证明：如果n是大于2的自然数，那么

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

76. 在已知四边形的内部求一点，使该点与四边形各边中点连线将四边形面积四等分。

77. 为了使$\triangle ABC$中角A的平分线，由顶点B引出的中线，以及从顶点C作出的高恰好交于一点，三角形的角应当满足什么条件？

78. 已知三条直线a，b，c中任二条都是异面直线。

能否作出这样的平行六面体，使其三条棱恰好落在直线a，b，c上？

1962—1963 年竞赛题

79．证明：如果 a，b，c 是正数，那么

$$a+b+c\leqslant\frac{a^4+b^4+c^4}{abc}$$

80．证明：对于数字全部是 1 的两个自然数，当且仅当它们的位数互素时，这两个自然数互素。

81．证明：五次多项式

$$P(x)=x^5-3x^4+6x^3-3x^2+9x-6$$

不能表示成两个次数低于 5 的整系数多项式之积的形式。

82．从空间中一点 S 引出三条射线 SA，SB 和 SC，它们中任一条都不与其余两条垂直。通过每条射线分别作一个平面与另两条射线所确定的平面相垂直。

证明：作出的这三个平面交于一条直线 d。

83．在空间中给定了四个不同的点 A，B，C，D。

证明：线段 AB 与 CD，AC 与 BD，AD 与 BC 的中点连线交于一点，且这交点是它们的中点。

84．从一个已知三角形剪出一个面积最大的矩形。

1963—1964 年竞赛题

85．证明：如果三个素数组成算术数列，并且这个数列的公差不能被 6 整除，那么这个数列的最小数是 3 。

86．证明：对于任何 α，不等式

$$\frac{1}{3}\leqslant\frac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\leqslant 3$$