初中数学奥林匹克同步教材

新版

- 获全国图书“金钥匙”奖
- 获全国优秀教育畅销书奖

初二卷

主审　陈传理

主编　李开珂

初中数学

奥林匹克系列

西南师范大学出版社

初中数学奥林匹克同步教材

初二卷

主　审　陈传理
主　编　李开珂
副主编　张　斌
编　者　(以姓氏笔画为序)
王显荣　申　萍　冯大学
张　斌　李开珂　陈国民
周振华　赵胜敏　郭　洪
徐开明　敖明惠　曾大同

西南师范大学出版社

特约编辑:戴　宇
责任编辑:胡小松
封面设计:王　煤

初中数学奥林匹克同步教材
初二卷
李开珂　　主编

西南师范大学出版社出版、发行
(重庆　北碚)
重庆升光电力印务有限公司　印刷
开本:787×1092　1/32　印张:8　字数:254千
1999年9月　第1版　2001年10月　第12次印刷
ISBN 7-5621-0730-0/G·529

定价:7.50元

序

初中是学生从儿童到少年的过渡阶段，体力、智力从量到质都有急剧发展，这个时期，他们的爱好不同，课外发展也就不尽相同，因此他们需要轻松、愉快、丰富多彩的课外活动。

数学奥林匹克是世界上深有影响的中学生学科竞赛活动，开展数学奥林匹克活动的根本目的，就在于吸引青少年对数学的兴趣，培养他们的数学探索能力，提高其数学素质以适应未来发展的需要。

每年一次的数学奥林匹克竞赛吸引了上百万的青少年学生参加，这项有意义的课外教育活动已成为中学数学教育的重要组成部分，为此，不但应培养学生的参与精神，还应尽量做好在普及基础上的提高。

《初中数学奥林匹克同步教材》就是为提高学生数学能力，为学生适应初中数学

奥林匹克竞赛活动而编写的普及性辅助教材。其主要特点：一是“竞赛”，二是“同步”。所谓“竞赛”是指内容的选取上和处理方法上具有趣味性、启发性、技巧性和拓广性，并特别注重了创新能力的培养。所谓“同步”主要是指内容选取的基础性以及内容安排上与教学进度一致。这二者的有机结合将使学生的数学能力得到切实提高。

虽然数学竞赛有一定难度，但奥林匹克竞赛金牌也不是高不可攀的，也许本书会给你摘取明珠作好铺垫。

中国数学会普及工作委员会副主任

陈传理

1999年4月于华中师大

前　言

近年来，在奥林匹克数学竞赛（IMO）中，我国选手频频取得优异成绩，在国外产生了极大反响，数学奥林匹克正吸引着越来越多的师生参加，全国各种层次的数学竞赛活动已空前活跃。为了满足广大师生开展课外活动的需要，我们组织编写了这套《初中数学奥林匹克同步教材》。

本套书以《九年义务教育的初中数学教学大纲》和《初中数学竞赛大纲》为指导，并与《九年义务教育初中数学》教材（人教版）同步，立足于大纲和教材的重点、难点，对教材的相应内容进行了必要的延伸和拓广。突出数学思想方法的渗透和分析、处理、解决问题的能力的培养。

本套书分初一卷、初二卷、初三卷、综合卷。其中初一、初二、初三卷均按知识、方法块为单元以课时形式进行编写，每课

内容及例题的安排均注重了由易到难、由浅入深，使不同层次的学生都能从中获得裨益。每课练习均分为A、B两组(并附有参考答案)，它们大多是国内外优秀的中考和数学竞赛试题，学生可根据不同需要选择使用。综合卷按年级编拟了32套竞赛模拟试题供广大师生强化训练时使用。

由于本套书在编写过程中既强调了与初中数学教材同步，又注意到了不同层次学生的需求，内容有梯度、有层次，因此，本书既可作为师生开展数学课外活动的教材，又可作为学生系统复习和进一步提高的参考读物。

由于编写时间仓促及编者水平所限，书中难免还存在一些疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一课　因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫多项式的因式分解（或分解因式），其中每个次数较低的多项或称为原多项式的一个因式.

因式分解的常见方法有提取公因式法，运用公式法，分组分解法，十字相乘法以及求根公式法；除此以外，对有些题目可能还要用到拆添项法、待定系数法和因式定理，在分解时常用的思考方式是"一提（指提公因式）、二套（套公式）、三分组".分解时还要注意分解到不能再分解为止.

因式分解常用公式有：

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，

$x^2\pm 2xy+y^2=(x\pm y)^2$，

$x^3\pm y^3=(x\pm y)(x^2\mp xy+y^2)$，

$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=(x+y+z)^2$，

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$，

$x^3\pm 3x^2y+3xy^2\pm y^3=(x\pm y)^3$.

例 1　分解因式 $x^3y+2x^2y^2+xy^3$.

解：　$x^3y+2x^2y^2+xy^3$

$=xy(x^2+2xy+y^2)$

$=xy(x+y)^2$.

例 2　分解因式 x^2+4x-y^2+4.

解：　x^2+4x-y^2+4

$=(x^2+4x+4)-y^2$

$=(x+2)^2-y^2$

$=(x+2+y)(x+2-y).$

例 3 分解因式 $x^2+2xy-3y^2+x-y$.

解： $x^2+2xy-3y^2+x-y$

$=(x-y)(x+3y)+(x-y)$

$=(x-y)(x+3y+1).$

评述：对多于三项的多项式的因式分解，大多要先分组，而分组的目的是分解后可再分解，如例 2 可用平方差公式再分解，例 3 分组后有公因式可提．这两个题若改变分组方式，均不能实现再分解，从而不能达到分解因式的目的．

例 4 分解因式 $(ab+1)^2-(a+b)^2$.

解： $(ab+1)^2-(a+b)^2$

$=(ab+1+a+b)(ab+1-a-b)$

$=(a+1)(b+1)(a-1)(b-1).$

评述：本例先用平方差公式分解，而后要注意分解到不能再分解为止，另外，切不可又将 $(a+1)(b+1)(a-1)(b-1)$ 化成 $(a^2-1)(b^2-1)$.

例 5 分解因式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.

分析：本例首先要将前面的乘积式用多项式相乘的法则展开，若全部展开，将得到一个 4 次 5 项式，不好分解．这种题大多要利用换元法进行部分展开，为了好换元，应当保证 x 的各项系数对应相等．

解： $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$$= (x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)+1$$
$$= (x^2+5x+5)^2.$$

说明：①此题常见的形式是："求证任意连续4个自然数的乘积加上1是一个完全平方数."

②此题也可将(x^2+5x)看成一个整体而得：$(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+25=(x^2+5x+5)^2$.

例6　分解因式x^6-y^6.

解：
$$x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

评述：在有多种方法可选择时，一定要注意哪种方法更利于分解彻底，如本例，若先用立方差公式而得$(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$，再分解的难度就更大.

例7　分解因式$x^2+3xy+2y^2+5x+7y+6$.

解：
$$x^2+(3y+5)x+(2y^2+7y+6)$$
$$=x^2+(3y+5)x+(y+2)(2y+3)$$
$$=(x+y+2)(x+2y+3).$$

说明：对这种二元二次多项式的因式分解，可将其中某一字母作为主元进行重新组合后再分解.

这种类型还可采用待定数法分解，待定系数法也是一种通法，但往往计算量较大. 其具体操作是：在得到$x^2+3xy+2y^2=(x+y)(x+2y)$后，就可设其可分解为$(x+y+m)(x+2y+n)$，展开后为：$x^2+3xy+2y^2+(m+n)x+(2m+n)y+mn$与已知式相比较，由对应项系数相等可得：

$$\begin{cases} m+n=5, \\ 2m+n=7, \\ mn=6. \end{cases} \qquad 解得\begin{cases} m=2, \\ n=3. \end{cases}$$

由此可得结果为:$(x+y+2)(x+2y+3)$.

由待定系数法还可解决如下一类问题:

例8 已知 $x^2-2xy-3y^2+6x-14y+p$ 能分成两个一次因式之积,求常数 p 并分解因式.

解:由 $x^2-2xy-3y^2=(x+y)(x-3y)$,得

可设所得两个一次因式为 $(x+y+m)(x-3y+n)$,而 $(x+y+m)(x-3y+n)=x^2-2xy-3y^2+(m+n)x+(n-3m)y+mn$ 与已知式相比较,得

$$\begin{cases} m+n=6, \\ n-3m=-14, \\ m\cdot n=p. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} m=5, \\ n=1, \\ p=5. \end{cases}$$

即 $p=5$.

$\therefore x^2-2xy-3y^2+6x-4y+5=(x+y+5)(x-3y+1)$.

除以上所介绍的方法外,对有些高次多项式,还需用添拆项或因式定理.

因式定理:对多项式 $f(x)$,当且仅当 $f(a)=0$(即 $x=a$ 时,多项式的值为0)时,$f(x)$ 有因式 $(x-a)$.

为了便于用因式定理,还有如下结论:

对首项系数为1的整系数多项式 $f(x)$,若存在有理数 a,使 $f(a)=0$,则 a 是常数项的约数.

对首项系数不为1的整系数多项式 $f(x)$,或存在有理数 $\frac{q}{p}$,使 $f(\frac{q}{p})=0$,则 p 是最高次数的约数,q 是常数项的约数.

例9 分解因式 $x^3-19x-30$.

解:因为30的约数有 ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15,

± 30，经计算知

$f(-2)=0,\quad f(-3)=0,\quad f(5)=0,$

所以有因式$(x+2)$，$(x+3)$，$(x-5)$.

而三次多项式最多只有三个一次因式，

故 $x^3-19x-30=(x+2)(x+3)(x-5)$.

实际上，所有可用因式定理分解的多项式均可用添拆项法分解，只是拆添项法的技巧性要求较高，不易成功.

例 10　分解因式 $x^2-y^2+4x+6y-5$.

解：
$$\begin{aligned}&x^2-y^2+4x+6y-5\\=&x^2+4x-(y^2-6y+5)\\=&x^2+4x-(y-1)(y-5)\\=&(x-y+5)(x+y-1).\end{aligned}$$

例 11　分解因式 $2x^4-x^3-6x^2-x+2$.

解：
$$\begin{aligned}&2x^4-x^3-6x^2-x+2\\=&(2x^4-x^3)-(6x^2-3x)-(4x-2)\\=&x^3(2x-1)-3x(2x-1)-2(2x-1)\\=&(2x-1)(x^3-3x-2)\\=&(2x-1)[(x^3-4x)+(x-2)]\\=&(2x-1)[x(x+2)(x-2)+(x-2)]\\=&(2x-1)(x-2)(x^2+2x+1)\\=&(2x-1)(x-2)(x+1)^2.\end{aligned}$$

注：本题还有许多分解方法，请读者自己去探索.

练习一

A　组

一、填空题：

1. $3.1416 \times 2.4292 + 1.5708^2 + 2.4292^2 =$ ______.

2. $123456789 \times 123456787 - 123456788^2 =$ ______.

3. $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots\cdots + 19^2 - 20^2 =$ ______.

4. 方程 $x^2 - y^2 = 98$ 的整数解有____对.

二、将下列各多项式在有理数范围内分解因式:

1. $mn + m^2n^2 + m^2n + mn^2$;

2. $x^4y + xy^4$;

3. $x^2 + 14xy + 48y^2$;

4. $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 3) - 12$;

5. $x^2 + x - 4y^2 + \frac{1}{4}$;

6. $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 15$;

7. $x^3 + 6x^2 + 12x + 9$;

8. $x^4 + x^2 - 2$;

9. $(ab-1)^2 + (a+b-2ab)(a+b-2)$

B 组

将下列各多项式在有理数范围内分解因式:

1. $x^2 - y^2 + 7x + y + 12$;

2. $x^2 + 3xy - 4y^2 + x + 14y - 6$;

3. $x^3 - 7x + 6$;

4. $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$

第二课　对称式与轮换对称式

一个含多个字母的式子，如果将任意两个字母互换而式子不变，那么这个式子叫做关于这些字母的对称式，如 $a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$ab+bc+ca$ 都是关于字母 a,b,c 的对称式.

一个含多个字母的式子，如果将所有字母依次替换而式子不变，那么这个式子叫做关于这些字母的轮换对称式，如 $a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$ab+bc+ca$，$a^2b+b^2c+c^2a$，$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$ 等都是关于字母 a,b,c 的轮换对称式.

容易证明如下两个结论：

1.对称式一定是轮换对称式，轮换对称式不一定是对称式.

2.两个对称式(轮换对称式)的和、差、积、商仍为对称式(轮换对称式).

其中结论 2 是解有关对称式(轮换对称式)的重要结论.

将一个对称式用一个基本的对称式表示出来是解决有关对称式问题的常用技巧.

例 1　求证$\dfrac{x^4+(x+y)^4+y^4}{2}$是一个完全平方式.

证明：由$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$，得

$$x^4+y^4=(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3$$

所以

$$\frac{x^4+(x+y)^4+y^4}{2}=\frac{2(x+y)^4-4x^3y-6x^2y^2-4xy^3}{2}$$

$$=(x+y)^4-2x^3y-3x^2y^2-2xy^3$$

$$=(x+y)^4-2xy(x^2+2xy+y^2)+(xy)^2$$

$$=[(x+y)^2]^2-2xy(x+y)^2+(xy)^2$$

$$=[(x+y)^2-xy]^2$$

$$=(x^2+xy+y^2)^2$$

是一个完全平方式.

例2 分解因式 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

解: 将已知多项式看成关于 x 的多项式,令 $x=y$,得

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

$$=y^2(y-z)+y^2(z-y)+z^2(y-y)$$

$$=0.$$

由因式定理知 $(x-y)$ 是原多项式的因式,而已知多次式是关于 x,y,z 的轮换对称式,故还应有因式 $(y-z)$, $(z-x)$(这用因式定理也很容易得到),又由于原式为一个三次多项式,最多有三个一次因式,故可设

$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$$

$$=k(x-y)(y-z)(z-x)$$

其中 k 为待定系数

令 $x=0$, $y=1$, $z=-1$,可得 $k=-1$.

所以 $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$

$$=-(x-y)(y-z)(z-x).$$

评述: 1. 本题充分利用对称式的性质 2 来确定其因式,这是寻找对称式的因式的常用方法.