国家计量技术法规统一宣贯教材

测量不确定度评定与表示指南

国家质量技术监督局计量司　组编

中国计量出版社

图书在版编目（CIP）数据

测量不确定度评定与表示指南/国家质量技术监督局计量司组编. —北京：中国计量出版社，2000.1

ISBN 7-5026-1262-9

Ⅰ. 测… Ⅱ. 国… Ⅲ. 不确定度-测量方法 Ⅳ. TB9

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 73609 号

内 容 提 要

本书是国家计量技术规范 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》的统一宣贯教材，由国家质量技术监督局计量司组织编写。主要内容包括三部分：第一部分介绍必要的概率论与数理统计基础知识；第二部分以逐步地展开方式阐述《测量不确定度评定与表示》计量技术规范的内容；第三部分是不确定度在各测量领域中的应用实例。书中附有由 7 个国际组织发布的《测量不确定度表示指南》（GUM）的原文。

本教材可供科研单位、检测/校准机构及工矿企业从事计量检定、检测/校准、产品检验、精密测试、质量管理及科学实验的人员使用，也可供高等院校有关专业的师生使用。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话 (010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 11 字数 254 千字

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 9 月第 2 次印刷

*

印数 5 001—8 000 **定价**：40.00 元

第一章　引　　言

一、正确表示测量不确定度的意义

测量是科学技术、工农业生产、国内外贸易以至日常生活各个领域中不可缺少的一项工作。测量的目的是确定被测量的值或获取测量结果。测量结果的质量(品质)，往往会直接影响国家和企业的经济利益。例如，对出口货物称重不准就会造成很大的损失，多了白白送给外商，少了则要赔款。测量结果的质量还是科学实验成败的重要因素之一。例如，对卫星的质量或对运载火箭燃料的质量若测量不准，就有可能导致卫星发射因推力不足而失败。测量结果的质量也会影响到人身的健康和安全。例如，在使用 γ 射线治疗疾病时，若对剂量测量不准，过少达不到治病的目的，延误治疗；过多则会对人体造成伤害。测量结果和由测量结果得出的结论，还可能成为执法和决策的重要依据。因此，当报告测量结果时，必须对其质量给出定量的说明，以确定测量结果的可信程度。测量不确定度就是对测量结果质量的定量表征，测量结果的可用性很大程度上取决于其不确定度的大小。所以，测量结果必须附有不确定度说明才是完整并有意义的。

测量不确定度的概念在测量历史上相对较新，其应用具有广泛性和实用性。正如国际单位制(SI)计量单位已渗透到科学技术的各个领域并被全世界普遍采用一样，无论哪个领域进行的测量，在给出完整的测量结果时也普遍采用了测量不确定度。尤其是在市场竞争激烈、经济全球化的今天，测量不确定度评定与表示方法的统一，乃是科技交流和国际贸易的迫切要求，它使各国进行的测量及其所得到的结果可以进行相互比对，取得相互承认或共识。因此，统一测量不确定度的表示方法并推广应用公认的规则，受到了国际组织和各国计量部门的高度重视。

目前，在我国推行的ISO/IEC导则25(已修订为ISO 17025)《校准和检测实验室能力的通用要求》和ISO 9001《质量体系 设计、开发、生产、安装和服务的质量保证模式》中，对测量结果的不确定度均有明确的要求。例如导则25指明，校准实验室出具的每份证书或报告都应包括有关测量结果不确定度评定的说明；在检测实验室出具的检测报告中，必要时也应予以说明。ISO 9001要求，所使用的测量设备应保证其测量不确定度为已知。因此，宣贯和推行《测量不确定度评定与表示》计量技术规范具有重要的现实意义。测量结果不确定度的评定和表示方法，经过20多年的争论、研究和发展，业已趋于成熟，许多发达国家和发展中国家已经普遍采用，国际间的量值比对和实验数据的比较，更是要求提供包含因子或置信水准约定的测量结果的不确定度。国内许多通过ISO 9000系列质量认证的单位，通过ISO/IEC导则25认可的实验室，以及独资、合资的企业，也要求对检测／校准的结果提供详细的不确定度说明或报告。

显然，我国要取得国际经济和市场竞争中的优势地位，就必须在各方面与国际接轨，例如，

在出具检定证书、校准证书、检测报告、鉴定报告以及撰写学术报告、技术规范、产品标准，甚至签订合同、协议等文件时，其有关测量结果和测量不确定度的报告，都应具有与国际一致的表示方式。因此，我们应重视《测量不确定度评定与表示》规范的学习与宣贯。

二、测量不确定度的发展过程及动向

早在 1963 年，美国国家标准局(NBS)，现为国家标准与技术研究院(NIST) 的 Eisenhart 先生在研究“仪器校准系统的精密度和准确度的估计”时，就提出了定量表示不确定度的建议。20 世纪 70 年代，NBS 在研究和推广测量保证方案(MAP) 时，对不确定度的定量表示又有了进一步的发展。不确定度这个术语逐渐在测量领域内被广泛应用，但表示方法各不相同。1977 年 5 月，国际计量委员会(CIPM) 下设的国际电离辐射咨询委员会(CCEMRI) 中的 X-γ 射线和电子组，讨论了关于校准证书上如何表达不确定度的若干不同建议，但未做出任何决议。在 1977 年 7 月的 CCEMRI 会议上，提出了解决这个问题的必要性和迫切性。当时 CCEMRI 主席、美国 NBS 局长 Ambler 先生，同意将此问题列入送交国际计量局(BIPM) 审议的报告。作为当时 CIPM 的成员，他正式提出了解决测量不确定度表示的国际统一性问题的提案。1978 年，CIPM 要求 BIPM 协同各国着手解决这个问题。BIPM 就此制定了一份详细的调查表，并分发到 32 个国家计量院及 5 个国际组织征求意见。1979 年底，收到 21 个国家计量院的复函。1980 年，BIPM 召集和成立了不确定度表示工作组，在征求各国意见的基础上起草了一份建议书，即 INC-1(1980)。该建议书向各国推荐了不确定度的表示原则，从而使测量不确定度的表示方法逐渐趋于统一。1981 年，第七十届 CIPM 批准了上述建议，并发布了一份 CIPM 建议书，即 CI-1981。1986 年，CIPM 再次重申采用上述测量不确定度表示的统一方法，并发布了 CIPM 建议书，即 CI-1986。这份 CIPM 建议书推荐的方法，以 INC-1(1980) 为基础，要求所有 CIPM 及其咨询委员会赞助下的国际比对及其他工作的参加者，在给出结果时必须使用合成不确定度。

自 20 世纪 80 年代以来，CIPM 建议的不确定度表示方法已经在世界各国许多实验室和计量机构使用。但是，正如国际单位制计量单位不仅在计量部门使用一样，测量不确定度也可以应用于一切使用测量结果的领域。为了进一步促进 CIPM 方法在国际上的广泛使用，1980 年 CIPM 要求国际标准化组织(ISO) 在 INC-1(1980) 建议书的基础上，起草一份能广泛应用的指南性文件。这项工作得到了以下 7 个国际组织的支持和赞助。这 7 个国际组织是：国际计量局(BIPM)、国际电工委员会(IEC)、国际临床化学联合会(IFCC)、国际标准化组织(ISO)、国际理论化学与应用化学联合会(IUPAC)、国际理论物理与应用物理联合会(IUPAP)、国际法制计量组织(OIML)。自此，由 ISO 第四技术顾问组(TAG4) 的第三工作组(WG3) 负责起草《测量不确定度表示指南》(缩写为 GUM)，其工作组成员则由 BIPM、IEC、ISO 和 OIML 提名。1993 年，GUM 以 7 个国际组织的名义正式由 ISO 出版发行。1995 年又作了修订和重印。

GUM 是在 INC-1(1980)、CI-1981 和 CI-1986 的基础上编制而成的应用指南，在术语定义、概念、评定方法和报告的表达方式上都作了更明确的统一规定。它代表了当前国际上表示测量结果及其不确定度的约定做法，从而使不同国家、不同地区、不同学科、不同领域在表示测量结果及其不确定度时具有一致的含义。因此，GUM 的贯彻应用必将推动科技进步，促进国际交流。

美国 NIST 非常重视这项工作，提出了执行 GUM 方法的方针，由院长批准后纳入管理手

册，并要求科学家和职工必须遵照执行。根据这个方针，NIST 保证在不确定度表示方面取得内部一致并与国际现行做法一致，从而有助于提高 NIST 在国内和国际市场的竞争力。目前，国际上许多国家的校准实验室和计量机构，也采取相应措施促进使用 GUM 规定的方法。一些区域性和全球性国际组织，都强调用 GUM 方法来表示测量结果及其不确定度，例如亚太计量规则组织（APMP）、欧洲计量组织（EUROMET）、国际实验室认可合作组织（ILAC）、亚太实验室认可合作组织（APLAC）及欧洲认可合作组织（EA）等。

三、测量不确定度评定与表示的应用范围

我国的国家计量技术规范 JJF 1059—1999《测量不确定度评定与表示》，规定的是测量中评定与表示不确定度的一种通用规则，它适用于各种准确度等级的测量，而不仅限于计量领域中的检定、校准和检测。其主要应用领域列举如下：

① 建立国家计量基准、计量标准及其国际比对；

② 标准物质、标准参考数据；

③ 测量方法、检定规程、检定系统、校准规范等；

④ 科学研究及工程领域的测量；

⑤ 计量认证、计量确认、质量认证以及实验室认可；

⑥ 测量仪器的校准和检定；

⑦ 生产过程的质量保证以及产品的检验和测试；

⑧ 贸易结算、医疗卫生、安全防护、环境监测及资源测量。

本规范主要涉及有明确定义的，并可用唯一值表征的被测量估计值的不确定度。对整套测量装置的不确定度的表示不在此列。至于被测量呈现为一系列值的分布或取决于一个或多个参量（例如，以时间为参变量），则对被测量的描述是一组量，应给出其分布情况及其相互关系。

第二章　概率论与数理统计基础知识

一、随机变量的基本概念

1. 随机事件和随机变量

(1) 事件和随机事件

观测或试验的一种结果，称为一个事件。例如，明天的天气是晴天、阴天还是雨天，这三种可能性中的每一种都称为事件。又如，测量工件的直径所得的结果为 9.91mm，9.92mm，9.93mm，…，这里每个可能出现的测量结果都称为事件。与测量结果相联系的不确定度是事件；若工件直径的真值已知，则相应的每一个误差也称为事件。

在客观世界中，我们可以把事件大致分为确定性和不确定性两类。向上抛一石子必然下落，纯水在标准大气压下加热到 100℃ 时必然沸腾等，均属肯定事件或确定性事件。抛掷一枚硬币的结果可能正面朝上、也可能反面朝上，打靶的结果可能射中、也可能射不中等，均属可疑事件或不确定性事件。

确定性事件有着内在的规律，这一点我们比较容易看到和处理。而对于不确定性事件，虽然就每一次观测或试验结果来看是可疑的，但在大量重复观测或试验下却呈现某种规律性(统计规律性)。例如多次重复抛掷一枚硬币，会发现正面朝上与反面朝上的次数大致相等。概率论和数理统计就是从两个不同侧面，来研究这类不确定性事件的统计规律性。在概率统计中，把客观世界可能出现的事件区分为最典型的三种情况：

① 必然事件。在一定条件下必然出现的事件，例如工件直径的测量结果为正，是必然事件。

② 不可能事件。在一定条件下不可能出现的事件，例如工件直径的测量结果为零或负值，都是不可能事件。

③ 随机事件。在一定条件下可能出现也可能不出现的事件，例如工件直径的测量结果出现在 9.91mm 与 9.92mm 之间，是一个随机事件。随机事件即是随机现象的某种结果。

(2) 随机变量

如果某一量(例如测量结果)在一定条件下，取某一值或在某一范围内取值是一个随机事件，则这样的量叫作随机变量。

随机变量不同于其他变量的特点是：它是以一定的概率，在一定的区间上取值或取某一个固定值。例如，工件直径的测量结果在(9.90～9.92mm)区间上取值的概率为 0.9。由前所述，可知测量结果及其不确定度均为随机变量。

随机变量根据其取值的特征可以分为两种：

① 连续型随机变量。若随机变量 X 可在坐标轴上某一区间内取任一数值，即取值布满区间或整个实数轴，则称 X 为连续型随机变量。例如重复测量中所得的一组观测值，就属于连续型随机变量。

② 离散型随机变量。若随机变量 X 的取值可离散地排列为 $x_1, x_2, \cdots$，而且 X 以各种确定的概率取这些不同的值，即只取有限个或可数个实数值，则称 X 为离散型随机变量。取有效数字的位数时，数字的舍入误差就是一种离散型随机变量。

2. 概率和分布函数

(1) 事件的概率

随机事件的特点是：在一次观测或试验中，它可能出现、也可能不出现，但是在大量重复的观测或试验中呈现统计规律性。例如，在连续 n 次独立试验中，事件 A 发生了 m 次，m 称为事件的频数，m/n 则称为事件的相对频数或频率，当 n 极大时，频率 m/n 稳定地趋于某一个常数 p，此常数 p 称为事件 A 的概率，记为 $P(A) = p$。这就是概率的古典定义。概率 p 是用以度量随机事件 A 出现的可能性大小的数值。必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，随机事件的概率 $P(A)$ 为 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。所以，必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情况。概率可以通过一定的法则进行运算，下面简要介绍概率的加法定理和乘法定理。

① 概率加法定理

先引入下列符号：

U 代表必然事件；

V 代表不可能事件；

$A \cup B$ 代表 A 或 B 中至少有一个出现的事件；

$\overline{A}$ 代表 A 不出现的事件，称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件；

AB 代表 A 与 B 同时出现的事件。

若 $AB = V$，称 A，B 为互斥事件，即 A 与 B 不能同时出现。概率加法定理叙述为：互斥的诸事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任一事件出现的概率，为各个事件概率的总和。换言之，若

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n, \text{ 且 } A_iA_j = V \quad (1 < i < j < n)$$

则

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \tag{2.1}$$

[**例**] 加工某零件 100 件，要求零件尺寸是 (100 ± 0.01)mm。加工后测量零件，在 100 件中，尺寸小于 99.99mm 的零件有 2 件，而大于 100.01mm 的零件有 3 件，问任取一件，其尺寸偏差超出 ± 0.01mm 的概率是多少？

[**解**] 设 A_1 为零件尺寸大于 100.01mm 的事件，则 $P(A_1) = 3\%$；A_2 为零件尺寸小于 99.99mm 的事件，则 $P(A_2) = 2\%$。显然，A_1 与 A_2 为互斥的两个事件，$A_1A_2 = V$，$A = A_1 \cup A_2$，应用概率加法定理式(2.1)可得

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) = 5\%$$

② 概率乘法定理

若事件 A 的出现并不影响事件 B 的出现，则称事件 A 与事件 B 是相互独立的。由许多独立

的简单事件所组成，且各独立事件同时出现的事件称为复杂事件。则概率乘法定理可叙述为：复杂事件的概率，等于组成复杂事件的各个简单事件的概率的乘积。换言之，

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{2.2}$$

［例］加工圆锥轴 100 件，加工后测得小端直径超出公差的有 5 件，大端直径超出公差的有 8 件，问任取一件，大端直径和小端直径同时超出公差的概率是多少？

［解］设 A_1 为小端直径超出公差的事件，则 $P(A_1)=5\%$；A_2 为大端直径超出公差的事件，则 $P(A_2)=8\%$。显然，小端直径和大端直径同时超出公差的事件 A 为复杂事件，它由 A_1 和 A_2 两个独立的简单事件所组成。故由概率乘法定理式(2.2)可得

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)=5\%\times 8\%=0.4\%$$

(2) 分布函数

随机变量的特点是以一定的概率取值，但并不是所有的观测或试验都能以一定的概率取某一个固定值。例如，重复测量某圆柱体直径时，作为被测量最佳估计的测量结果是随机变量，记为 X，它所取的可能值是充满某一个区间的（并非某一个固定值）。那么，我们所关心的问题是它落在该区间的概率是多少？即 $P[a\leqslant X\leqslant b]=?$由概率加法定理有

$$P[a\leqslant X\leqslant b]=P[X<b]-P[X<a]$$

显然，我们只要求出 $P[X<b]$ 及 $P[X<a]$ 即可，这要比求 $P[a\leqslant X\leqslant b]$ 简便得多，因为它们只依赖于一个参数。

对于任何实数 x，事件$[X<x]$的概率当然是一个 x 的函数。令 $F(x)=P[X<x]$，显然有 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=+1$，我们称 $F(x)$ 为随机变量 X 的分布函数。所以，分布函数 $F(x)$ 完全决定了事件$[a\leqslant X\leqslant b]$的概率，或者说分布函数 $F(x)$ 完整地描述了随机变量 X 的统计特性。下面按离散型和连续型两种情况，讨论随机变量的分布函数。

① 离散型随机变量的分布函数

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是离散型随机变量 X 的所取值，而 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 X 取上述值的概率，即

$$P(X=x_i)=p_i\quad(i=1,2,\cdots,n) \tag{2.3}$$

概率 P_i 应满足条件 $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$。式(2.3)称为离散型随机变量 X 的概率分布。离散型随机变量的分布规律可以用取值分布列（见表 2.1）和分布图（见图 2.1）直观地表示出来。

表 2.1 离散型随机变量分布表

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 具有下列形式

$$F(x)=\sum_{x_i<n}p_i \tag{2.4}$$

因此，任何离散型随机变量的分布函数都是不连续的。

② 连续型随机变量的分布函数

设连续型随机变量 X 取值于区间 (a,b)，则 X 的分布函数 $F(x)$ 对于任意两实数 $x_1,x_2(x_1$

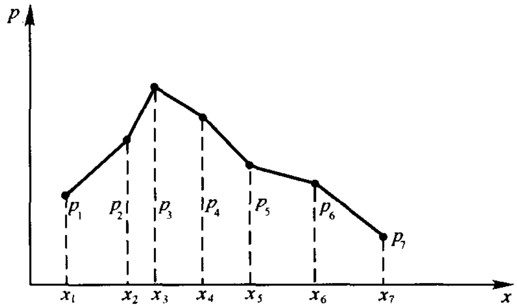

图 2.1 离散型随机变量分布图

$< x_2$) 有

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2) \geqslant 0$$

即 $F(x)$ 是单调增函数，并且假定 $F(x)$ 在 $-\infty < x < \infty$ 间是连续的，在 $-\infty < x < \infty$ 间是可微分的，且导数 $F'(x)$ 在此区间连续。

这两个假定在实际工作中常被满足。连续型随机变量与离散型随机变量不同，其分布规律不可能用分布列表示。为了描述其概率分布的规律，需要引入一个新的概念，即概率分布密度函数 $f(x)$。显然，变量 X 落在 x 至 $x + \Delta x$ 区间内的概率为

$$P(x < X \leqslant x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

则

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) = f(x)$$

所以，概率分布密度函数 $f(x)$ 定义为概率分布函数 $F(x)$ 的导数。由此可将分布函数写成

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

式(2.5) 就是常用的概率积分公式。若已知概率分布密度 $f(x)$，则随机变量 X 落在某一区间 (x_1, x_2) 内的概率 $P(x_1 < X \leqslant x_2)$ 为

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \tag{2.6}$$

例如，对于服从正态分布的随机误差，其分布密度函数 $f(x)$ 具有如下形式

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{2.7}$$

式中　δ—— 随机误差的可能值；

　　　σ—— 测量列的标准偏差或标准差。

二、随机变量的数字特征

由上所述，利用分布函数或分布密度函数可以完全确定一个随机变量。但在实际问题中，求分布函数或分布密度函数不仅十分困难，而且常常没有必要。例如，测量零件的长度得到了一系列的观测值，我们往往只需要知道零件长度这个随机变量的一些特征量就够了，如长度的

平均值（近似地代表长度的真值）及测量标准差（观测值对平均值的分散程度）。用一些数字来描述随机变量的主要特征，显然十分方便、直观、实用，在概率论和数理统计中就称它们为随机变量的数字特征。这些特征量有数学期望、方差、矩等。

1. 数学期望

随机变量 X 的数学期望值记为 $E(X)$ 或简记为 μ_x，它是用来表示随机变量本身的大小，说明 X 的取值中心或在数轴上的位置，也称期望值。数学期望表征随机变量分布的中心位置，随机变量围绕着数学期望取值。数学期望的估计值，即为若干个测量结果或一系列观测值的算术平均值。也就是说数学期望是一个平均的大约数值，随机变量的所有可能值围绕着它而变化。

(1) 离散型随机变量的数学期望

设某机械加工车间有 M 台机床，它们时而工作时而停顿（如为了调换刀具、零件和进行测量等），为了精确估计车间的电力负荷，需要知道同时工作着的机床的台数。为此作了 N 次观察，记下诸独立事件（所有机床都不工作，有 1 台工作，有 2 台工作，……，M 台都工作）的出现次数分别为 $m_0, m_1, \cdots, m_M$。显然，$m_0 + m_1 + \cdots + m_M = N$，则该车间同时工作的机床的平均数 $\bar{n}$ 为

$$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^{M} x_i m_i}{N} = \sum_{i=1}^{M} x_i \frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^{M} x_i \omega_i$$

式中　ω_i——x_i 台机床同时工作的频率。

当 N 很大时，频率 ω_i 趋于稳定而等于概率 p_i，故有

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{M} x_i p_i$$

由上所述，本例中同时工作的机床台数 X 是一个随机变量，其可能值为 $x_i (i = 1 \sim n$，本例中 $x_1 = 0, x_2 = 1, \cdots, x_n = M)$，相应的概率为 $p_i (i = 1 \sim n)$，则其均值 $\sum_{i=1}^{M} x_i p_i$ 即称为随机变量的数学期望。它的一般形式为 $\mu_x = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$，而级数 $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ 应绝对收敛。

(2) 连续型随机变量的数学期望

设连续型随机变量 X 的分布密度函数为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) \mathrm{d}x$ 收敛，根据类似的定义，则 X 的数学期望为

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x \tag{2.8}$$

式中　$f(x)\mathrm{d}x$——随机变量 X 在任意一点 x 取值的概率。

对于任意一个具有分布函数 $F(x)$ 的随机变量 X 而言，则有

$$\mu_x = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x) \tag{2.9}$$

因此，数学期望是均值这一概念在随机变量上的推广，它不是简单的算术平均值，而是以概率为权的加权平均值。见本节后面的例题。

(3) 数学期望的运算法则

① 常数 C 的数学期望值等于常数本身。

$$E(C) = C$$

② 设 X 为一随机变量，C 为一常数，则

$$E(CX) = CE(X)$$

③ 设 X 和 Y 是两个独立的随机变量，则

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

④ 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个任意的随机变量，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个任意常数，则

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(x_i)$$

2. 方差

只用数学期望还不能充分描述一个随机变量。例如对于测量而言，数学期望可用来表示被测量本身的大小，但是关于测量的可信程度或品质高低，比如各个测得值对数学期望的分散程度，就要用另一个特征量 —— 方差来表示。为此，我们以下面用两种方法对某一量进行测量所得的测量结果(列于表 2.2 和表 2.3)为例，看一下哪种方法更为可信或品质更高。

表 2.2　按方法 Ⅰ 所得的测量结果

测得值	28	29	30	31	32	偏差绝对值	0	1	2
概　率	0.1	0.15	0.5	0.15	0.1	概　率	0.5	0.3	0.2

表 2.3　按方法 Ⅱ 所得的测量结果

测得值	28	29	30	31	32	偏差绝对值	0	1	2
概　率	0.13	0.17	0.4	0.17	0.13	概　率	0.4	0.34	0.26

我们比较两个表中的偏差绝对值及概率，很容易看出在没有系统效应情况下，表 2.2 所用方法 Ⅰ 的测量品质比表 2.3 方法 Ⅱ 要高。同时，也可以看出它们的数学期望却是相等的，均为

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 30.0$$

这就意味着还需要用另一个数字特征量，即用方差来进一步描述随机变量的分散性或离散性。方差定义为：随机变量 X 的每一个可能值对其数学期望 $E(X)$ 的偏差的平方的数学期望。它描述了随机变量 X 对数学期望 $E(X)$ 的分散程度，即

$$D_x = D(X) = E[(X - E(X))^2]$$

(1) 离散型随机变量的方差

$$D_x = D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu_x)^2 p_i \tag{2.10}$$

对于上述的测量实例，由表中的数据可以算出方差为

按测量方法 Ⅰ：　$D_1(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - \mu_x)^2 p_i = 1.10$

按测量方法 Ⅱ：$$D_2(X)=\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2p_i=1.38$$

由此可知，若方差小，各测得值对其均值的分散程度就小，则在不考虑系统效应情况下其测量品质高，或更为可信、有效。

(2) 连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\mu_x)^2f(x)\mathrm{d}x \tag{2.11}$$

方差 $D(X)$ 的量纲是随机变量 X 量纲的平方。为了更为实用和易于理解起见，最好用与随机变量同量纲的量来说明或表述分散性，故将方差开方取正值得

$$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$$

式中 σ_x 可简记为 σ，称为测量列的标准差，亦称标准偏差或均方根偏差（见本节例题）。

(3) 方差的运算法则

① 方差

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

上式可证明如下：

$$\begin{aligned}D(X)&=E[X-E(X)]^2=E[X^2-2XE(X)+E^2(X)]\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+E^2(X)=E(X^2)-E^2(X)\end{aligned}$$

② 常数的方差为零

$$D(C)=0$$

③ 设 X 为一随机变量，C 为常数，则

$$D(CX)=C^2D(X)$$

④ 设 X_1，X_2 是两个独立的随机变量，则

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)$$

⑤ 设 X_1，X_2 是任意两个随机变量，则

$$D(X_1+X_2)=D(X_1)+D(X_2)+2\sigma_{x_1x_2}$$

而 $\sigma_{x_1x_2}=E[(X_1-\mu_{x_1})(X_2-\mu_{x_2})]$，称为随机变量 X_1 与 X_2 的协方差。它描述了两个随机变量相互依赖的程度，所以通常用相关系数 $\rho_{x_1x_2}$ 代替之，即

$$\rho_{x_1x_2}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sqrt{D_{x_1}D_{x_2}}}=\frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \tag{2.12}$$

相关系数 $\rho_{x_1x_2}$ 介于 -1 和 $+1$ 之间。若随机变量 X_1，X_2 是互相独立的，则相关系数 $\rho_{x_1x_2}$ 为零。

⑥ 协方差与相关系数用于分量相关的合成标准不确定度评定中，并采用它们的估计值，协方差的估计值为

$$s(x_i,x_j)=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j) \tag{2.13}$$

相关系数的估计值为

$$r(x_i,x_j)=\frac{s(x_i,x_j)}{s(x_i)s(x_j)} \tag{2.14}$$

设 X_1，X_2 是两个独立的随机变量，则

$$D(X_1\cdot X_2)=D(X_1)\cdot D(X_2)+D(X_1)\cdot E^2(X_2)+D(X_2)\cdot E^2(X_1)$$

3. 矩

(1) 原点矩

对于随机变量 X，若 $v_k = E(X^k)$ 存在，则称 v_k 为 X 的 k 阶原点矩。显然，当 $k = 1$ 时有

$$v_1 = E(X)$$

所以，一阶原点矩就是 X 的数学期望。

(2) 中心矩

对于随机变量 X，若 v_1 存在，则当 $\mu_k = E[(X - v_1)^k]$ 存在时，称 μ_k 为 X 的 k 阶中心矩。显然，一阶中心矩恒等于零，二阶中心矩就是方差。

三、随机变量的基本定理

1. 大数定理

对于自然界中的随机现象，虽然不可能确切地判定它的状态及其变化的规律性，但是由于人们在长期实践中积累了丰富的经验，因而能够确定某些事件的概率接近于1或0。也就是说，在一次观测或试验中把概率接近于1或零的事件，分别看成是必然事件或不可能事件。

大数定律的意义就在于：以接近于1的概率来说明大量随机现象的平均结果具有稳定性，从而在确定不变的条件下，可把随机变量视为非随机变量。例如，气体的压力等于单位时间内撞击在单位面积上的气体分子的总效果；显然，气体分子撞击的次数及速度是随机变量，但气体的压力可以认为是一个常数。

(1) 切比谢夫(Tchebyshev)定理

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 为互相独立的随机变量序列，同时其数学期望 $E(X_i) = a$，方差 $D(X_i) \leqslant C$（C 是常数，$i = 1 \sim n$），则对任意的 $\varepsilon > 0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - a\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{2.15}$$

习惯上称这个大数定理为切比谢夫定理，它的实际意义在于：当我们测量某一量时，其真值为 a，进行了 n 次独立的重复观测，测得值为 x_i（$i = 1 \sim n$），那么当 n 充分大时，可以用算术平均值 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 代替真值 a，以满足测量不确定度 ε 的要求。换言之，随机变量序列 $\{X_n\}$ 依概率收敛于 a。

(2) 贝努利定理

设在 n 次独立观测或试验中，事件 A 的出现次数为 m，则当 n 无限增大时，频率 m/n 依概率收敛于它的概率 p，即对任意的 $\varepsilon > 0$，恒有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1 \tag{2.16}$$

这就是历史上最早发现的大数定理，又称为贝努利定理，它的实际意义在于：在观测或试验的条件稳定不变时，如果 n 充分大，则可用频率代替概率，此时频率具有很高的稳定性。

2. 中心极限定理

中心极限定理粗略地说就是：大量的独立随机变量之和，具有近似于正态的分布。例如在测量某量时，产生测量不确定度的随机因素很多，这些个别因素所引起的测量不确定度分量通常很小，但其总和（合成）却较大；为了研究这种合成不确定度的特性，就需要知道相互独立的随机变量之和的分布函数或分布密度函数的形状及其存在条件。

由概率论可以证明，若 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为独立分布的随机变量，则其和的分布近似于正态分布，而不管个别变量的分布如何。随着 n 的增大，这种近似程度也增加。通常若 X_i 同分布，且每一 X_i 的分布与正态分布相差不甚大时，则即使 $n \geqslant 4$，中心极限定理也能保证相当好的近似正态性。这个结论具有重要的实际意义。

四、几种常见随机变量的概率分布及其数字特征

1. 均匀分布（矩形分布）

[**例**]设被测量 X 服从均匀分布，如图 2.2 所示，试求其数学期望值 μ_x、方差 D_x 及标准差 σ。

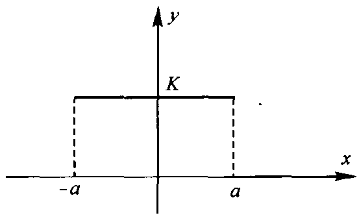

图 2.2　均匀分布

[**解**]设其概率分布密度为 $f(x)$，它在 $-a$ 至 $+a$ 区间内为一常数，令其为 K，则

$$y = f(x) = K$$

被测量落在 $-a$ 至 $+a$ 区间内的概率应为 1，故有

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{+a} K\mathrm{d}x = 1$$

即得 $K = \dfrac{1}{2a}$，因此概率分布为

$$y = f(x) = \frac{1}{2a} \tag{2.17}$$

被测量的期望值为

$$\mu_x = \int_{-a}^{+a} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} x\mathrm{d}x = 0$$

被测量的方差为（注意到 $\mu_x = 0$）

$$D_x = \int_{-a}^{+a}(x-\mu_x)^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-a}^{+a} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{+a} x^2\mathrm{d}x = \frac{a^2}{3}$$

所以标准差为

$$\sigma = \sqrt{D_x} = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{2.18}$$

式(2.18)即为被测量服从均匀分布时,其标准差与分散区间半宽之间的关系式。

在某一区间[$-a,a$]内,被测量值以等概率落入,而落于该区间外的概率为零,则称被测量值服从均匀分布,通常记作$U[-a,a]$。服从均匀分布的测量有

① 数据切尾引起的舍入不确定度;

② 电子计数器的量化不确定度;

③ 摩擦引起的不确定度;

④ 数字示值的分辨力;

⑤ 滞后;

⑥ 仪器度盘与齿轮回差引起的不确定度;

⑦ 平衡指示器调零引起的不确定度。

在缺乏任何其他信息的情况下,一般假设为服从均匀分布。

另外,服从均匀分布的变量的正弦或余弦函数,服从反正弦分布(见图2.3)。服从反正弦分布的测量有

① 度盘偏心引起的测角不确定度;

② 正弦振动引起的位移不确定度;

③ 无线电中失配引起的不确定度;

④ 随时间正余弦变化的温度不确定度。

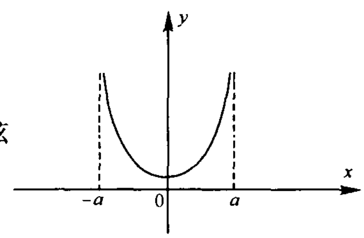

图2.3　反正弦分布

2. 正态分布(拉普拉斯-高斯分布)

[**例**]设被测量X服从正态分布,如图2.4(a)所示,试说明其分布密度函数中参数μ和σ的实际意义和分布曲线的特点。

[**解**]由式(2.7)可知正态分布的概率分布密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\qquad(-\infty<x<+\infty)\tag{2.19}$$

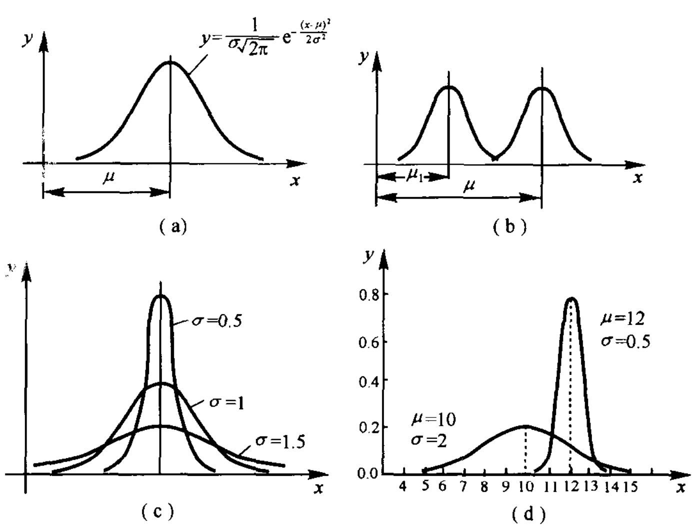

图2.4　正态分布

根据连续型随机变量数学期望和方差的定义，用类似于上例的方法可以算得(通过简单的积分)：被测量的期望值 μ_x 恰为概率分布密度函数中的参数 μ，而被测量的方差 D_x 恰为概率分布密度函数中的 σ^2，或标准差即为 σ。这是正态分布的重要特点。对于均值为 μ、标准差为 σ 的正态分布，通常记之以 $N(\mu,\sigma)$，对于均值为零、标准差为 σ 的标准正态分布，则记之以 $N(0,\sigma)$。

由图 2.4(a) 可见，正态分布曲线在 $x=\mu$ 处具有极大值，曲线不仅是单峰的，而且对 $x=\mu$ 直线来说是对称的。由图 2.4(b) 可见，正态分布的中心是在 $x=\mu$ 处，μ 值的大小决定了曲线在 x 轴上的位置。由图 2.4(c) 可见，在相同 μ 值下，σ 值愈大，曲线愈平坦，即随机变量的分散性愈大；反之 σ 愈小，曲线愈尖锐(集中)，随机变量的分散性愈小。还可以看到，正态分布曲线在 $x=\mu\pm\sigma$ 处有两个拐点。图 2.4(d) 对两条不同 μ 值和不同 σ 的正态分布曲线进行了比较。

显然，随机变量的分布是多种多样的，而正态分布在计量领域极其重要。这是因为概率论的中心极限定理表明，正态分布在测量应用中具有实际意义。例如，在 3 ～ 5 次独立的重复条件下，观测值的平均值的分布是近似正态的，而不必考虑单次观测值的分布是否为正态。

受大量、微小、独立因素影响的连续型随机变量，当样本大小 n 有限时，作出以 f_i 为纵坐标的直方图。观察其图形，得到的结论是"两头少、中间多"，且图形基本上呈对称型，整个图形与横轴所围的面积为 1。

当样本大小 n 充分大时，直方图将愈呈对称，而台阶形的折线也将趋于一条光滑曲线(见图 2.5)。这条曲线有如下四个特点：

① 单峰性，即曲线在均值处具有极大值；

② 对称性，即曲线有一对称轴，轴的左右两侧曲线是对称的；

③ 有一水平渐近线，即曲线两头将无限接近于横轴；

④ 在对称轴左右两边曲线上离对称轴等距离的某处，各有一个拐弯的点(拐点)。

把从经验中得出的直方图上升为理论，找到具有上面四个特点的曲线，且曲线下的面积是 1，该曲线在数学上可以由下面的函数 $f(x)$ 表达出来

$$y=f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

函数 $f(x)$ 称为概率分布密度函数，$f(x)$ 所表示的曲线称为正态分布曲线。其中 $\mu,\sigma(\sigma>0)$ 是正态分布的两个参数。

正态分布是人们考察自然科学和工程技术中得到的一种连续分布，是大量实践经验抽象的结果。例如一批机器零件毛坯的重量，在相同条件下加工出来的一批螺栓口径大小，细纱的强度，同一民族同性别成年人的身体高度，射击时中靶点的横坐标(或纵坐标)，测量误差等连续型随机变量，都服从正态分布。

正态分布以 $x=\mu$ 为其对称轴，它是正态总体的平均值。参数 σ 刻划总体的分散程度，它是总体的标准差。所以，正态分布曲线可由总体平均值 μ 及标准差 σ 确定下来。图 2.4(c) 给出了 μ 相同，σ 不同($\sigma=0.5,\sigma=1,\sigma=1.5$) 的正态分布图形。

由于 μ,σ 能完全表达正态分布的形态，所以常用简略记号 $X\sim N(\mu,\sigma)$ 表示正态分布。当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，$X\sim N(0,1)$ 称为标准正态分布。

在概率论中，X 落在下述区间内的概率特别有用(见图 2.6)：

$$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma)=0.6826$$
$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma)=0.9545$$
$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma)=0.9973$$

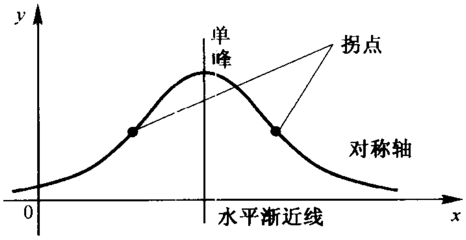

图 2.5　正态分布概率密度曲线

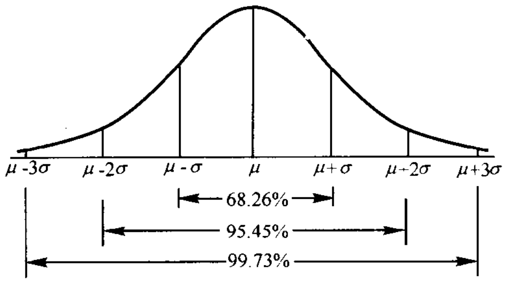

图 2.6　重要的概率值

3. t 分布(学生分布)

被测量 $x_i \sim N(\mu,\sigma)$,其 N 次测得值的算术平均值 $\bar{x} \sim N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$。设 N 充分大,则

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}} \sim N(0,1)$$

若以有限 n 次测量的标准差 s,代替无穷 N 次测量的标准差 σ,则

$$\frac{\bar{x}-\mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} \sim t(\nu)$$

式中,ν 为自由度,上式即为服从 t 分布的表示式。当自由度 ν 趋于 ∞ 时,s 趋于 σ,$t(\nu)$ 趋于 $N(0,1)$。

t 分布是一般形式,而标准正态分布是其特殊形式,$t(\nu)$ 成为标准正态分布的条件是当自由度 ν 趋于 ∞(见图 2.7)。

对于 t 分布,t 变量处于$[-t_p(\nu),\ +t_p(\nu)]$内的概率为 p,$t_p(\nu)$ 为其临界值(见图 2.8)。

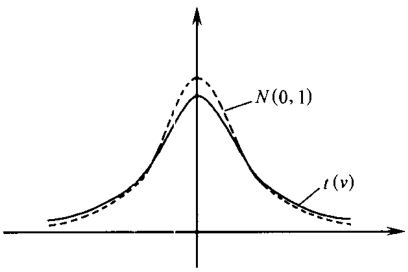

图 2.7　t 分布与标准正态分布

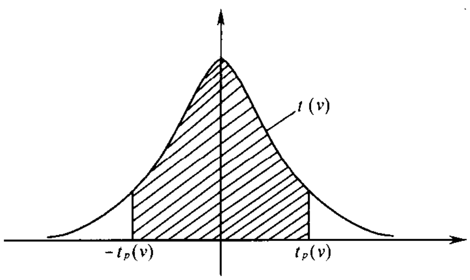

图 2.8　临界值 $t_p(\nu)$