

从惊讶到思考

——数学悖论奇景



从惊讶到思考

——数学悖论奇景

《科学美国人》编辑部编著

李思一 白葆林 译

顾基义 校

科学技术文献出版社

1986

内 容 简 介

本书属于趣味数学读物。全书分逻辑学悖论、概率论悖论、关于数的悖论、几何学悖论、统计学悖论和关于时间的悖论等六章。每章通过十多个生活中经常遇到的小故事，提出不同的悖论，用近400幅图画和生动风趣的文字加以说明，使该书有强烈的趣味性和游戏色彩。它可激发读者对数学的兴趣，可以锻炼思考和解题技巧。

读者对象：数学爱好者、青年学生、知识青年，青年教师和广大科技工作者。

从 惊 讶 到 思 考

《科学美国人》编辑部著

李思一 白葆林 译

轻工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

开本：787×1092¹/₁₆；印张：7.125 字数：152千字

1986年10月北京第一版第三次印刷

印数：35,171—42,170册

科技新书目，131—72

统一书号：17176·322 定价：1.35元

译者说明

本书译自《科学美国人》杂志社发行的一套数学悖论幻灯片“Paradox Box”(悖论箱)的说明。“Paradox Box”是第一次采用幻灯形式来集中演示一些生动有趣而又异乎寻常的悖论，还配有一套录音带作解说，以此来激发人们对数学的兴趣。遗憾的是，我们无力把包括幻灯片、录音带在内的全套材料介绍给国内读者，只能将幻灯片的全部画面复印出来，附以解说，以连环画的形式给出各种悖论小故事，这样虽不如原有材料生动活泼，倒也不失其新颖有趣之处。

为了通俗起见，Paradox一概译为悖论。全书共分六章，每章有十多个小故事，提出不同的悖论。为了帮助读者理解和进一步深入学习，一组画面之后备有评注，详细说明这组画的内容，另外还提供一些背景材料和有益建议。参考书目统一附于书后。

由于我们的水平不高，因此在本书的翻译工作中一定存在不少问题。承蒙研究生院的颜基义同志悉心校订，科学出版社的白树枫同志帮助编审，才使本书得以顺利完成。在此谨对他们表示衷心的感谢。

前 言

“Paradox Box”是一套有六组片子的幻灯片，它包括逻辑学、概率论、数论、几何学、统计学和时间等六个方面的数学悖论，另外还附有录音带作解说。本书是这套材料的说明。

“悖论”也可叫“逆论”，或“反论”，这个词的意义比较丰富，它包括一切与人的直觉和日常经验相矛盾的数学结论，那些结论会使我们惊异无比。悖论有三种主要形式。

1. 一种论断看起来好像肯定错了，但实际上却是对的（佯谬）。

2. 一种论断看起来好像肯定是对的，但实际上却错了（似是而非的理论）。

3. 一系列推理看起来好像无懈可击，可是却导致逻辑上自相矛盾。

悖论有点像魔术中的变戏法，它使人们在看完之后，几乎没有一个不惊讶得马上就想知道：“这套戏法是怎么搞成的？”当把技巧告诉他时，他就会不知不觉地被引进深奥而有趣的数学世界之中。正因为如此，悖论就成了一种十分有价值的教学手段。

悖论是属于领域广阔、定义严格的数学分支的一个组成部分，这一分支以“趣味数学”知名于世。这就是说它带有强烈的游戏色彩。然而，切莫以为大数学家都看不起“趣味数学”问题。欧拉就是通过对bridge-crossing之谜的分析

打下了拓扑学的基础。莱布尼兹也写到过他在独自玩插棍游戏（一种在小方格中插小木条的游戏）时分析问题的乐趣。希尔伯特证明了切割几何图形中的许多重要定理。冯·纽曼奠基了博弈论。最受大众欢迎的计算机游戏——生命是英国著名数学家康威发明的。爱因斯坦也收藏了整整一书架关于数学游戏和数学谜的书。

趣味数学具有重大教育学价值，这一点只是在最近才为一大批教师所认识。很多现象说明，这一趋势正在发展。雅可比的教本：《数学——人类的魄力》获得了极大成功，其部分原因无疑是他巧妙地把趣味性材料揉进了传统的数学问题中。现在在教师会议和期刊里，趣味数学的文章也越来越多。美国教师委员会出版的威廉·沙夫编的《趣味数学书目》发行量是很大的。

就我们所知，悖论箱是第一次用视听方法向中学生和大学低年级学生介绍趣味数学的重要尝试。这六个部分的幻灯片故事内容都很新颖，大部分是过去没有见过的。有些材料即便不是新的，它也是用不同形式和色调来表现的。

这套书有五个主要目的：

1. 激发学生对数学的兴趣；
2. 向读者介绍重要的数学思想；
3. 发起丰富多彩的数学活动；
4. 使人洞悉解题过程；
5. 提高学生对现代数学所具有的美妙、多样、甚至幽默性质的鉴赏力。

目 录

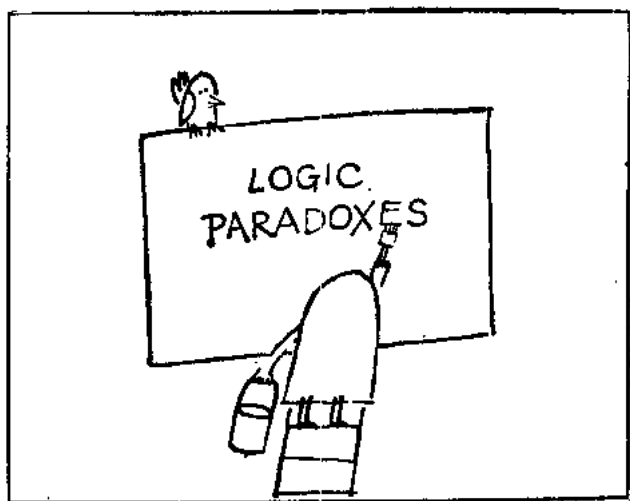
前言

第一章 逻辑学悖论	(1)
1. 克里特人伊壁孟德	(3)
2. 说谎者悖论	(4)
3. 徽章和涂写	(5)
4. 一句话和它的反话	(6)
5. 发狂的计算机	(7)
6. 无穷的倒退	(8)
7. 柏拉图-苏格拉底悖论	(10)
8. 爱丽斯和红色国王	(11)
9. 鳄鱼和小孩	(12)
10. 唐·吉訶德悖论	(14)
11. 理发师悖论	(15)
12. 占星家、机器人和目录	(17)
13. 无聊与有趣	(18)
14. 语义学和集合论	(20)
15. 抽象语言	(21)
16. 类型的理论	(23)
17. 梵学者(印度预言家)的预言	(24)
18. 意想不到的老虎	(26)
19. 纽科姆悖论	(29)
第二章 概率论悖论	(33)

1. 赌徒的谬误.....	(35)
2. 四只猫的性别.....	(38)
3. 三张卡片的骗局.....	(43)
4. 电梯悖论.....	(47)
5. 女朋友的烦恼.....	(49)
6. 三个贝壳的游戏.....	(52)
7. 碰运气.....	(54)
8. 鸚鵡之谜.....	(57)
9. 钱包游戏.....	(61)
10. 中立原理.....	(63)
11. 帕斯卡赌注.....	(66)
第三章 关于数的悖论.....	(69)
1. 六个席位之谜.....	(70)
2. 赚了多少钱?.....	(72)
3. 人口爆炸.....	(74)
4. 无所不在的 9.....	(77)
5. 无可奈何的汽车司机.....	(80)
6. 一块钱哪里去了?.....	(84)
7. 奇妙的方阵.....	(87)
8. 奇怪的遗嘱.....	(91)
9. 惊人的编码.....	(93)
10. 无穷饭店.....	(96)
第四章 几何学悖论.....	(103)
1. 绕着一个姑娘转圈.....	(105)
2. 月亮的不解之谜.....	(107)
3. 镜子的魔力.....	(109)

4. 小立方块和女士	(113)
5. 兰迪先生的奇异地毯	(115)
6. 失踪的舞蹈家	(121)
7. 可内外翻剥的奇妙轮胎	(124)
8. 使人为难的编织问题	(127)
9. 不可逃遁的点	(129)
10. 形状怪诞的形体	(131)
11. 病态曲线	(133)
12. 未知的宇宙	(135)
13. 反物质	(139)
第五章 统计学悖论	(143)
1. 骗人的“平均数”	(145)
2. 某年的母亲英雄	(149)
3. 轻率的结论	(151)
4. 小世界的悖论	(154)
5. 你属于哪一宫?	(156)
6. 圆周率 π 中的数字结构	(158)
7. 错综的群体	(159)
8. 奇异的纸牌把戏	(161)
9. 选举悖论	(164)
10. 罗尼哈特小姐找朋友	(167)
11. 亨普尔关于乌鸦的悖论	(170)
12. 古德曼的“蓝绿”悖论	(174)
第六章 关于时间的悖论	(177)
1. 卡罗尔关于坏钟的悖论	(179)
2. 迷惑人的车轮	(181)

3. 滑雪者的挫折·····	(182)
4. 基诺悖论·····	(184)
5. 蠕虫与橡皮绳悖论·····	(187)
6. 超级任务·····	(189)
7. 主人和狗的悖论·····	(191)
8. 时间能够倒流吗? ·····	(195)
9. 时间机器·····	(198)
10. 超光速电话·····	(200)
11. 并列的世界·····	(202)
12. 时间的迟延·····	(204)
13. 命运、机会和自由意志·····	(206)
参考书目 ·····	(210)
第一章·····	(210)
第二章·····	(211)
第三章·····	(212)
第四章·····	(213)
第五章·····	(215)
第六章·····	(216)



第一章 逻辑学悖论

如果你曾向学生介绍过逻辑学的基本概念，就会发现，没有什么比一个使人主意忽左忽右的悖论更能引起他们的兴趣了。他们被一步一步地引上繁花似锦的小道，遵循着一条无懈可击的推理思路往前走，结果他们忽然发现自己已陷入矛盾之中。到底是什么错了？难道就在演绎推理这一过程背后有可能隐伏着什么倒霉的缺陷吗？

这一章的主要目的，是尽可能用娱乐的方式，通过提出现代逻辑学中最重要悖论来引起学生的兴趣。在这里，“悖论”这个词意思比其他部分要窄一点。在其他几章中，悖论是强烈违反我们直觉的问题。在这里，悖论只是直接导致彼此矛盾的结果，就像证明 $2+2$ 又等于 4 ，又不等于 4 一样。逻辑悖论是“不可解”的，除非能找到一种方法来完全消除这种恶性的矛盾。

尽管从古希腊起到今天，逻辑悖论一直给人们带来很大乐趣，可是最伟大的数学家都总是极严肃地对待它。在发展现代逻辑学和集合论中一些巨大进展正是努力解决经典悖论的直接结果。在这里，你会看到引自伯特兰·罗素的话，他谈到他花了好些年的时间研究悖论而没有成功，后来他和阿尔弗雷德·怀特里德合作，写了《数学原理》，这是一本奠基了现代形式逻辑的代表性论著。

作为一个数学教师，不用人提醒就懂得，逻辑学是一切演绎推理的基础，一个不懂基础逻辑的学数学的学生是没有能力来掌握数学基础的。对这些基础的理解往往是较困难的，它使初学学生丧失对数学的兴趣。幸好，这组故事可以帮助你使学生认识到，逻辑学并不像他们想像的那样枯燥无味，而是一个对数学很重要的、生动有趣的课题、其中有很

多令人兴奋的问题尚待解决。这组故事有三个中心问题：

1. 在我们谈论语句的真实价值时，为什么需要以一种更高级的语言（称为“元语言”）来谈论它？

2. 为什么现代集合论有一些规则禁止一个集合是此集合本身的元素？

3. 在什么特殊情况下，预言未来在逻辑上是不可能的？

最好是在学习逻辑学、集合论或演绎（推理）证明的时候来认真阅读这一部分。现代几何学教科书，如雅可比的《几何学》，和很多代数以及普通数学教科书一样是以演绎推理开头的，因此在教课（或学习）之前最好先看看这一章。

这一章的内容为展开演绎推理方面的讨论提供了丰富的背景知识，并预计到可能会提出的问题，还为较优秀的学生提供了很多精彩的补充材料。

1. 克里特人伊壁孟德*



伊：所有的克里特人都是撒谎者。

M：他说的是真的吗？如果他说的是实话，那么克里特人都是撒谎者，而伊壁孟德是克里特人，他必然说了假话。他撒谎了吗？如果他确实撒了谎，那么克里特人就都不是说谎的人，因而伊壁孟德也必然说了真话。他怎么会既撒谎，同时又说真话呢？

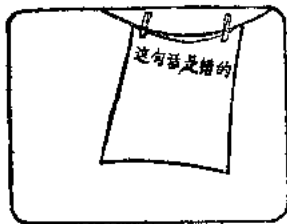
* 这里附有一个假设条件，即撒谎者不说一句真话，而且所有克里特人都是撒谎者的否定形式是大家全不撒谎。这是撒谎者悖论的原始形式。

伊壁孟德是个半传奇式的希腊人，他在公元前6世纪住在希腊。有一个神话说他曾经一下子睡了57年。

关于他的上面那段文字，如果我们假定撒谎者总是说假话，不撒谎的人总是说真话，那么就会出现逻辑的矛盾。按此假定，“所有的克里特人都是撒谎者”这句话不可能是真话，因为这说明伊壁孟德就是撒谎的人，因此他说的就不是真话。可是这又意味着克里特人是说真话的，那么伊壁孟德说的话也必定是真话，因此上面引的那句话也不可能是假话。

古希腊人曾为此大伤脑筋，怎么会一句话看上去完美无缺，自身没有矛盾，却既是真话又是假话呢！一个斯多噶派哲学家，克利西帕斯写了六篇关于“说谎者悖论”的论文，没有一篇成功。有一位希腊诗人叫菲勒特斯，他的身体十分瘦弱，据说他的鞋中常带着铅以免他被大风吹跑，他常常担心自己会因思索这些悖论而过早地丧命。在《新约》中，圣·保罗在他给占塔斯的书信中也引述过这段悖论（1:12—13）。

2. 说谎者悖论



M：我们陷入了著名的说谎者悖论之中。下面是它最简单的形式。

甲：这句话是错的。

M：上面这个句子对吗？如果是对的，这句话就是错的！如果这句话是错的，那这个句子就对了！像这样矛盾的说法比你所能想到的还要普遍得多。

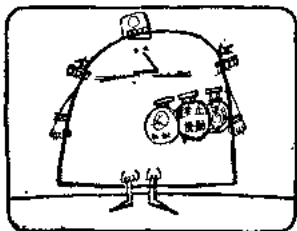
学生们是否能够解释，为什么这类悖论采用上述形式表达（即一句话谈的正是它本身）就变得清晰起来？这是因为它消除了说谎者是否总是说谎，不说谎者总是说真话的问题。

这一悖论作这类变化是无穷的。例如，罗素曾经说，他相信哲学家乔治·摩尔平生只有一次撒谎，就是当某人问他：是否他总是说真话时，摩尔想了一会儿，就说：“不是。”

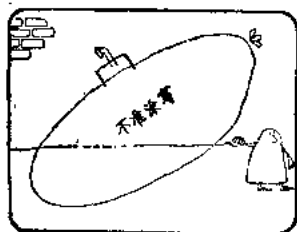
再变化一下：这本小书中所有的说明都是可靠的，只有这一节中关于说谎者悖论的评述部分的第三自然段（即现在的这一段）除外。

也许学生们还可以作出其他变化。

3. 徽章和涂写



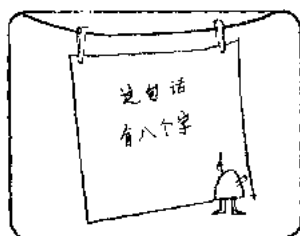
M：颁发一枚勋章，勋章上写着：
禁止授勋！



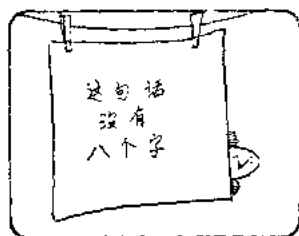
M：或者涂写一个告示：
不准涂写！

学生们知道为什么这些叙述是矛盾的吗？它们都违背了它们自己所提出的要求。学生们一定愿意编出其他的例子、比如：在缓冲器的连结杆上写“除去缓冲器连结杆”，一个招牌上写：“不许读这个招牌”，等等。一个单身汉宣称，只有漂亮得不愿嫁给他的姑娘，他才想要。一个人拒绝加入一切愿吸收他为成员的俱乐部。一个小女孩说，她很高兴她讨厌吃菜花，因为要是她喜欢的话，就会吃得太多，结果她就不能老吃到菜花了。更为接近说谎者悖论的是下面这种自相矛盾的话：“一切规则都有例外”和“所有知识都值得怀疑。”

4. 一句话和它的反话



M：这句话有几个字？七个字。显然原话错了！那么它的反话就应该是的吧，是不是？



M：不对，这句话的反话正好是八个字。所以，它像它原来的话一样是错的。我们怎么才能解决这样奇怪的尴尬局面呢？

这种悖论的创造者是谁，人们都不知道。这里还有另一个变了点花样的货真价实的悖论，学生们一定会觉得很有趣

的，在黑板上写：

在黑板上标出三个有错误的句子，

1. $2 + 2 = 4$

2. $3 \times 6 = 17$

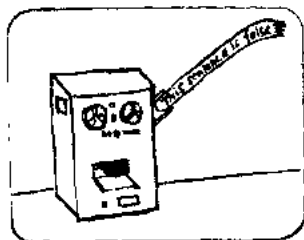
3. $8 / 4 = 2$

4. $13 - 6 = 5$

5. $5 + 4 = 9$

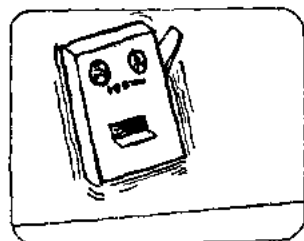
回答：只有第2句和第4句是错的。所以说“有三个句子错了”的断言错了，而这个断言就成了第三个错句！

5. 发狂的计算机



M：很多年以前，一台设计用于检验语句正误的计算机中馈入了说谎者悖论。

语句：“这句话是错的”。



M：这台可怜的计算机发起狂来，不断地打出对、错、对、错的结果，陷入了无休止的反复中。

世界上第一台用于解决真正的逻辑问题的计算机，是在1947年由威廉·伯克哈特和西奥多·卡林制造出来的，那时他们还在哈佛大学学习。当他们让这台机器评价说谎者悖论