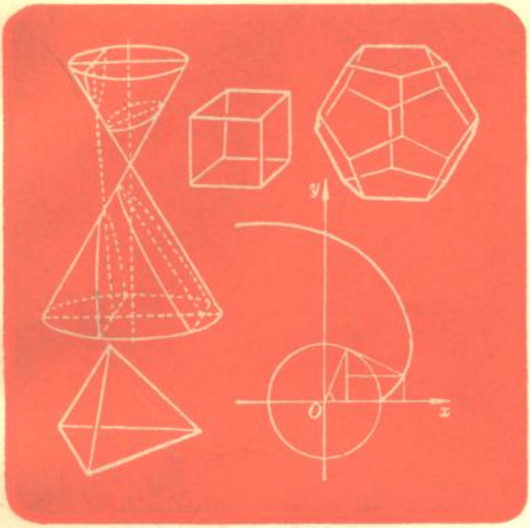


马　明

圆和二次方程

上海教育出版社

圆和二次方程

马明

上海教育出版社

圆和二次方程

马　明

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 1.875　字数 37,000

1964年12月第1版　1979年5月第5次印刷

印数 278,001—588,000 本

统一书号：7150·1616　定价：0.15 元

內容提要

这本书包括了四个短篇，都是比較有趣的、又有实际意义的数学問題．例如：《不可及点的作图》对于实际測量工作是有启发的；《圓和二次方程》初步把代数与几何結合起来，介紹了用圓来解二次方程的方法；《勾股定理和勾股数組》介紹了用割补法証明勾股定理的面积图和勾股数組的推导公式；《海罗的光綫問題》对某些求最短距离的問題提供了綫索．全书启发性比較强，对灵活运用知識有一定帮助．可供初中三年級学生閱讀．

目　录

前　言

在这本小册子里汇集了四篇短文——不可及点的作图、圓和二次方程、勾股定理和勾股数組以及海罗的光綫問題.

«不可及点的作图»是一种有趣的几何作图,解这类問題,除了限用沒有刻度的直尺和圓規这两种作图工具外，还要使作图工具不和图里的某些点接触. 这些点叫作不可及点，这种作图叫做不可及点作图. 解这类問題是需要一些技巧的，这里也提供了一种一般方法——軸对称法.

«圓和二次方程»是一篇代数和几何相結合的短文. 目前，用几何图形来計算或者解方程的方法已經被广泛地应用在实际工作部門中. 在这篇短文里介紹了一种用圓来解二次方程并且对二次方程的根进行討論的方案，目的是让讀者看到代数和几何的某种直接联系.

«勾股定理和勾股数組»是一篇带有历史性的短文. 这里，第一部分介紹我国古代数学家用割补法証明勾股定理的研究成果,第二部分介紹勾股数組.

«海罗的光綫問題»是一个古老的数学問題. 它从最簡单的几何知識出发，推出光学和声学的种种应用. 它也是研究最短路程問題的，从这里我們不仅可以知道有关它的一些簡单历史,还将看到数学的用处极大. 在閱讀这篇短文时,說理部分可能是一个难点,但是如果你能讀讀、想想、画画，再讀

讀、再想想，也还是可以看得懂的．克服了这一关，你的閱讀能力就可能提高一步．

从內容来看，这四篇短文的联系不很明显，而从解决問題的方法来看，它們或多或少地都用到軸对称法（或者叫鏡射法、折紙法）．这个方法的原理很簡单，也很容易被初学的人接受，而且它的应用范圍很广泛，不論解决数学問題或者某些实际問題，都經常要用到它．因此，我們这里着重地介紹了这个方法．

不可及点的作图

如果你是一个实际工作者，遇到下面两个問題怎么办？

問題 1 两条直綫 a、b 相交于点 X，要作 $\angle X$ 的平分綫，但如果点 X 在河的另一岸，不可到达．（图 1）

問題 2 經过已知点 P 作一条直綫，使它經过两条已知直綫 a、b 的交点，但如果这个交点在图紙的外面．（图 2）

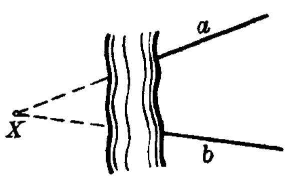


图 1

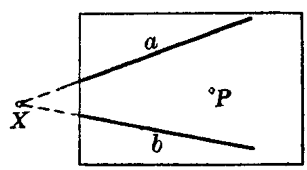


图 2

在数学里，这类問題叫做**不可及点的作图問題**．这类問題是，在作图时不能使作图工具（直尺和圓規）直接和不可及点接触．

稍微想一想，这类問題是难不倒我們的．对問題 1 来說，

解决的方法很多.

解 1 要画出一个角的平分綫，只要先找出这条平分綫上的任意两点，例如点 M 和 N 就行了. 想一想，这样的点有些什么性质?——在角的平分綫上的任意点，和这个角的两边距离相等. 根据图 3，你一定能够得到解决問題的办法.

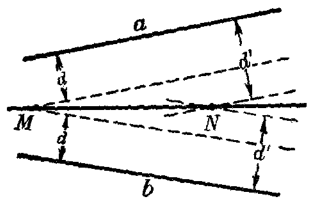


图 3

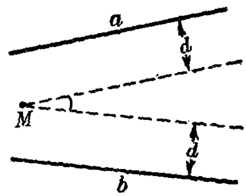


图 4

解 2 按照图 4，作 $\angle M$ 的平分綫也就可以了.

解 3 根据等腰三角形頂角的平分綫就是底边上的中垂綫这个性质，如果我們能够作出一个以不可及点 X 为頂点，两腰分别在直綫 a 和 b 上的等腰三角形，那么只要作出这个三角形底边上的中垂綫，問題就获得解决了. 怎样作出这个等腰三角形呢? 請参看图 5(图里，$AB \parallel a$，取 $AC=AD$).

如果我們对数学的基本知識很熟悉的話，再肯动动脑筋，一个数学問題的解法往往会有多种多样的. 例如，我們知道一个三角形的内心和旁心(三角形任何两个角的外角平分綫

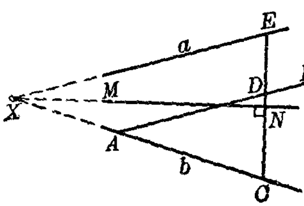


图 5

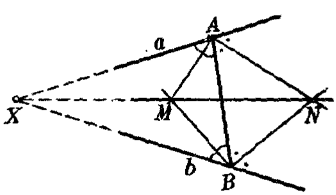


图 6

和第三个內角的平分綫的交点叫作三角形的旁心)是在三角形的一个角的平分綫上的，稍微想一想，就可以得出第四种解法.

解 4 如图 6，作 $\triangle ABX$ 的內心 M 和旁心 N，直綫 MN 就是 $\angle X$ 的平分綫.

根据軸对称图形的性质，还可以得出第五种解法.

解 5 如图 7，以直綫 MN 为对称軸，分别作 a 和 b 的軸对称图形 a' 和 b'，它們相交于点 X'；再作 $\angle X'$ 的平分綫 t'；然后作 t' 的軸对称图形 t，t 就是所求的角平分綫了. 在完成上述作图时，我們沒有必要使作图工具和不可及点 X 接触.

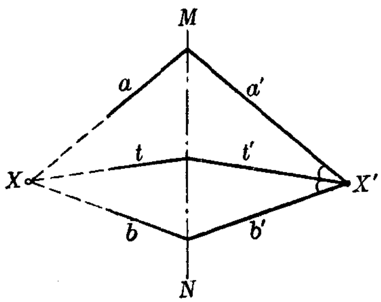


图 7

如果把对称軸設想为一面鏡子，上述这个作图可以分为两步来考虑：第一步，作 a、b 的鏡射图 a'、b'，得 a' 和 b' 的交点 X'，在“鏡子”的右边完成你所要的相应图形 t'；第二步，把 t' 鏡射到“鏡子”的左边，就得到 $\angle X$ 的平分綫 t.

这里，可能产生一个問題：如果点 X' 在图紙的外面，怎么办？那我們只要把对称軸 MN 适当地向左边移动一下就可以了. 其实，这种顾虑也是不必要的，因为，对于不可及点的作图来說，我們只限定不使作图工具和不可及点接触，至于图紙的大小，我們认为是沒有限制的. 所以要提出这个問題，是因为它在我們实际工作时也許会有些帮助.

我們可以把軸对称法概括如下：

F 是已知图形(如上題里的 a、b),其中有不可及点,要作图形 Φ(如上題里的分角綫 t).它的步驟是,先作 F 的鏡射图,得图形 F'(如上題里的 a'、b' 和 X'),在 F' 上作 Φ 的相应图形,就是 Φ 的鏡射图 Φ'(如上題里的 t'). 再作 Φ' 的鏡射图,就得到要作的图形 Φ.

上面这段話可以用下图来表示:

$$F \xrightarrow{\text{鏡射}} F' \longrightarrow \Phi' \xrightarrow{\text{鏡射}} \Phi.$$

讀者可以用軸对称法来解問題 2.

在問題 2 里,不可及点 X 是由两条已知直綫 a、b 决定的.如果我們把这种条件簡单地記作 $X[a, b]$,那么問題 2 可以簡单地說成:作两点 P 和 X 的連結綫,但 $X[a, b]$.

这个問題除了应用前面提到的軸对称(鏡射)方法来解外,还可以应用其他一些方法.

下面我們再来看几种解法:

解 1 我們知道,平行四边形的两条对角綫互相平分.根据这个性质,得作法如下:

經过点 P 作 b 的平行綫交 a 于点 A,經过点 P 作 a 的平行綫交 b 于点 B,作綫段 AB 的中点 O,連結 PO, PO 一定經过点 X.(图 8)

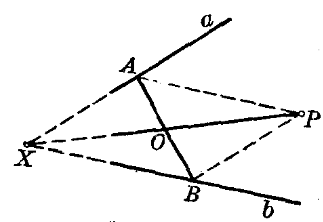


图 8

注意 根据上面的作法,我們可以得到綫段 XP 的中点,同时得到点 X 和点 P 間的距离.

解 2 根据三角形的三条高一定相交于一点这个性

质，也可以作出所求的直綫．讀者可以自己試一試．

解 3 根据比例綫段的性质，我們又可以得到一种作法．（参看图 9）

下面，再提出几个問題供讀者练习一下．

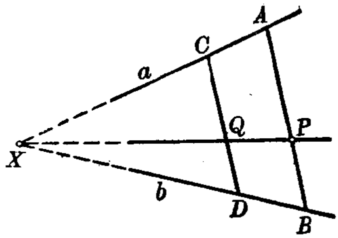


图 9

练　　习

1. 經过点 $X[a,\ b]$ 作已知直綫 l 的平行綫（垂直綫）．
2. 經过点 $X[a, b]$ 作一条直綫，使它和已知直綫 l 成定角 α．
3. 作点 X_1 和点 X_2 的連結綫，但 $X_1[a,\ b]$，$X_2[c,\ d]$．
4. 經过点 $X[a,\ b]$，作已知圓的切綫．
5. P 是已知点，X 是不可及点，求作 P 和 X 的連綫，并且确定綫段 PX 的长度，但 X 是直綫 l 和圓 O 的交点．
6. 求作点 X_1 和点 X_2 的連綫，确定綫段 X_1X_2 的长度，但
   (1) $X_1[a,\ b]$，$X_2[l,\ \odot O]$；
   (2) $X_1[a,\ \odot O_1]$，$X_2[b,\ \odot O_2]$．
7. 已知 $X[\odot O_1,\ \odot O_2]$，求作点 X 和点 O_1 的連綫以及点 X 和点 O_2 的連綫．
8. 求作点 X_1 和点 X_2 的連綫，但
   $$X_1[\odot O_1,\ \odot O_2],\quad X_2[\odot O_3, \odot O_4].$$
9. 作 $\triangle X_1X_2X_3$ 的內心、外心、垂心和重心，这里，X_1、X_2、X_3 是由这三角形的三条边所决定的．

作为結束，想再談一下軸对称法（或者鏡射法）．

上面这几道练习题虽然不十分困难，但是多少要費点周折．不过，如果你采用鏡射的方法来完成，可以說，不可及点的作图的麻煩就可以完全消除．因为，你只要做一次“鏡射”，不可及点就变为可及点了．

在几何作图里的已知条件常用图形表出，我們用字母 F 表示这种已知图形．那么，所謂几何作图，就是根据已知图形 F 和求作的要求(ω)作出另一个图形，設为 Φ．例如，“求作已知角的平分綫”这个問題，其中已知角就是图形 F，而角的平分綫就是图形 Φ，作图要求(ω)是按照 F 作 F 的角平分綫．它的过程可以表示成：

$$\text{已知角} \xrightarrow{\text{(作角的平分綫)}} \text{已知角的平分綫}.$$

一般地可以表示成：

$$F \xrightarrow{(\omega)} \Phi.$$

我們都知道，只利用直尺和圓規，不能解所有作图問題．例如，F 是一个任意大小的角，Φ 是它的三等分綫，那么，这个作图問題只利用直尺和圓規就不能解決．对于不可及点的作图問題，我們又多了一項麻煩，就是 F 里有不可及点．那么我們要問：对于一些利用直尺和圓規能解的作图問題，如果添上了不可及点（一个或者几个），是不是仍旧可以利用直尺和圓規来解呢？我們說，是仍旧可以的！

要討論这个問題，得先研究一下不可及点的确定問題．

由于作图工具限于直尺和圓規，而这两种工具只能用来画直綫和圓，这样，不可及点的确定就只能有下面三种情况：

(1) 它是两条已知的直綫的交点；

(2) 它是两个已知圓的交点；

(3) 它是一条已知直綫和一个已知圓的交点.

对于上面这三种情况中的任何一种，我們都能够作出它的軸对称图形，就是作图时，作图工具可以不接触不可及点. 这个結論的正确性是很容易証实的. 这里，我們对情况(3)进行証明，其他两种情况請讀者自己完成.

在图 10 里，点 X_1 和点 X_2 是两个不可及点，它們是由已知圓 O 和已知直綫 l 确定的. 把由圓 O 和直綫 l 所构成的图形記做 F，图形 F 里有不可及点 X_1 和 X_2. 現在要証实：利用直尺和圓規一定可以作出 F 的軸对称图形 F'，但作图时不能使直尺和圓規与不可及点接触.

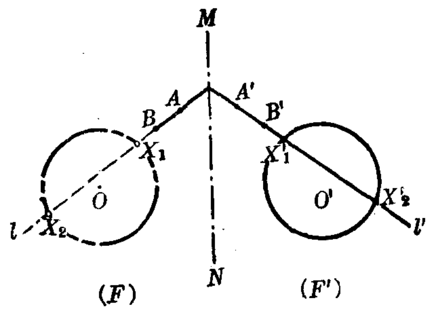


图 10

在已知直綫 l 上任意取两个可及点 A 和 B，以任意直綫 MN 为对称軸，作 A 和 B 的对称点 A' 和 B'. 經过 A' 和 B' 作直綫 l'，那么 l' 就是 l 的軸对称图形. 同样地，在已知圓 O 上任意取三个可及点(图里沒有标出)，作它們的軸对称点，那么圓 O 的軸对称图形圓 O' 就可以作出.

用同样的方法可以对情况(1)和情况(2)进行証明. 这样一来，由于尺規作图里的不可及点只能由上面这三种情况来决定，所以我們就可以得出結論：F 是已知图形，其中有一个或者几个不可及点，那么，按照作軸对称图形的要求，F 的軸对称图形 F' 总是可以作出的. 为了下面的叙述簡便起見，我們把这个重要結論簡单記作：

$$F[X_1, X_2, \cdots\cdots] \xrightarrow{(\text{軸对称})} F'.$$

有了这一点准备知識,前面提出的問題就可以得到証明。

設 F 是已知图形,其中沒有不可及点,$\varPhi$ 是按照某种要求 (ω) 求作的图形,并且,利用直尺和圓規可以作出图形 $\varPhi$。(这段話可以簡单地記作 $F \xrightarrow{(\omega)} \varPhi$.) 求証:当 F 里有不可及点(一个或者几个)时,图形 $\varPhi$ 仍旧可以作出.(这段話可以簡单地記作 $F[X_1, X_2, \cdots\cdots] \xrightarrow{(\omega)} \varPhi$.)

証明 图 F 里有不可及点(参看图 11,图里的不可及点沒有标出),根据上面所說的,我們有

$$F[X_1, X_2, \cdots\cdots] \xrightarrow{(\text{軸对称})} F'.$$

这时 F' 里沒有不可及点.根据假設,按照某种要求 (ω) 求作的图形 $\varPhi'$ 是可以作出的,也就是

$$F' \xrightarrow{(\omega)} \varPhi'.$$

再作 $\varPhi'$ 的軸对称图形 $\varPhi$(这当然是可以作出的),也就是有

$$\varPhi' \xrightarrow{(\text{軸对称})} \varPhi.$$

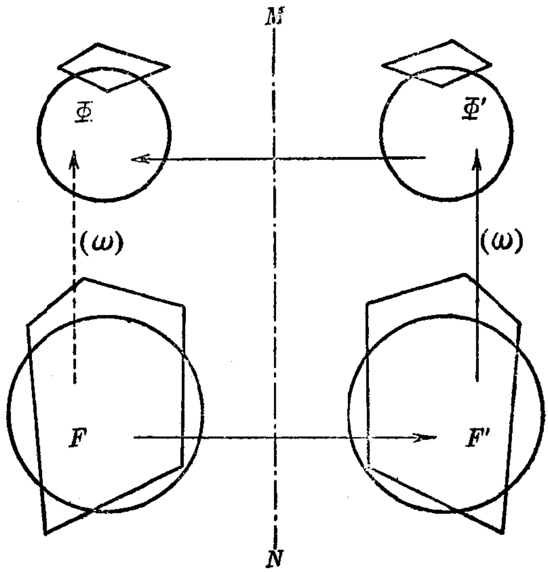
把这三个式子連起来看,就得到

$$F[X_1, X_2, \cdots\cdots] \xrightarrow{(\text{軸对称})} F' \xrightarrow{(\omega)} \varPhi' \xrightarrow{(\text{軸对称})} \varPhi.$$

也就是

$$F[X_1, X_2, \cdots\cdots] \xrightarrow{(\omega)} \varPhi.$$

証明的具体过程可以参看图 11.(在图 11 里,我們是把 F 和 $\varPhi$ 分开来画的,实际上,在許多作图問題中 F 和 $\varPhi$ 常是交錯在一起的.把它們分开来画,只是为了清楚起見.)



$$F \longrightarrow F' \longrightarrow \Phi' \longrightarrow \Phi$$

图 11

圓和二次方程

圓和二次方程之間有种种联系，用圓来解二次方程就是其中的一种.

先来看几个例子.

我們要解下面几个方程:

$$x^2-5x+4=0; \tag{I}$$

$$x^2+5x-6=0; \tag{II}$$

$$x^2+6x+9=0; \tag{III}$$

$$x^2-2x+3=0. \tag{IV}$$

先来看方程(I). 在直角坐标系內作出两点 K、P_1,使点 K 的坐标是(0, 1);点 P_1 的横坐标是这个方程里 x 的一次項系数的相反数,纵坐标是方程里的常数項,就是(5,4).再以連結这两点的綫段为直徑画圓,交 x 軸于两点 X_1 和 X_2(图12),那么,这两点的横坐标 1 和 4 恰好是这个方程的两个根.

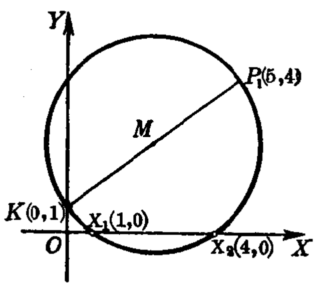


图 12

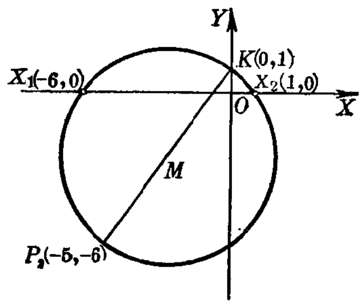


图 13

再来看方程(II). 在直角坐标系內作出两点 K、P_2, 使点 K 的坐标是(0,1);点 P_2 的横坐标是这个方程里 x 的一次項系数的相反数,纵坐标是方程里的常数項,就是(−5, −6).再以連結这两点的綫段为直徑画圓, 交 x 軸于两点 X_1 和 X_2(图 13),那么,这两点的横坐标 −6 和 1 恰好是这个方程的两个根.

方程(I)和方程(II)就是我們学过的簡化二次方程

$$x^2-ax+b=0 \tag{A}$$

的形式①.

---

① 在課本里,簡化二次方程是用 $x^2+px+q=0$ 来表示的. 現在我們把 x 的系数改为負号,并且用 a、b 分别代替 p、q,这样不会影响問題的本质,但为下面的叙述带来了方便.

把上面这两个例子与方程(A)联系起来看，我們可以得到一个启发：在直角坐标系內，以連結两点 $K(0, 1)$、$P(a, b)$ 的綫段为直徑画圓，和 x 軸相交于两点，那么这两点的横坐标就是方程(A)的两个根.

这种現象是偶然的还是必然的？現在我們还不知道．不过，我們可以把这种用圓来解二次方程的方法，再用于方程(III)和方程(IV)，看一看会产生什么結果．我們知道，方程(III)的两个根是相等的，都等于 -3，而方程(IV)沒有根．用上面的方法試試看.

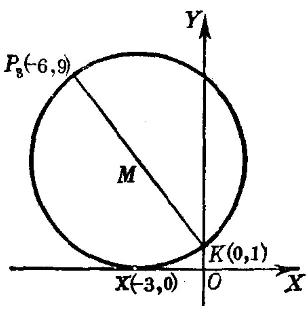


图 14

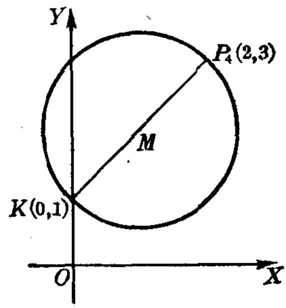


图 15

在直角坐标系內，以連結两点 $K(0, 1)$、$P_3(-6, 9)$ 的綫段为直徑画圓，可以看到这个圓和 x 軸只有一个交点(图14)，而这点的横坐标是 -3；如果把点 P_3 改为 $P_4(2, 3)$，这个圓和 x 軸就沒有交点(图15)．这两个結果与解方程(III)和解方程(IV)的結果完全一致，这种現象太使人兴奋了！把上述四个現象与方程(A)联系起来，并且概括一下，我們也許会想到下面这个定理可能成立.

定理 設方程

$$x^2-ax+b=0, \tag{A}$$