高等学校辅导教材

新编复变函数题解

知识提要 · 疑难解析 · 例题解析

西安交大《复变函数》习题解析

孙清华　赵德修

华中科技大学出版社

高等学校辅导教材

新编复变函数题解

孙清华　赵德修

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新编复变函数题解/孙清华　赵德修
武汉:华中科技大学出版社,2001 年 4 月
ISBN 7-5609-2385-2

Ⅰ. 新…
Ⅱ. ①孙…　②赵…
Ⅲ. 复变函数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O174.5

新编复变函数题解　　孙清华　赵德修

责任编辑:李立鹏　　封面设计:刘　卉
责任校对:蔡晓瑚　　责任监印:熊庆玉

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

经　销:新华书店湖北发行所

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:华中科技大学出版社沔阳印刷厂

开本:850×1168　1/32　　印张:11.375　　字数:270 000
版次:2001 年 4 月第 1 版　　印次:2001 年 4 月第 1 次印刷　　印数:1—5 000
ISBN 7-5609-2385-2/O・222　　定价:12.80 元

内容简介

本书是学习复变函数课程的辅助教材，是21世纪高等学校数学系列辅助教材之一. 本书按照教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写，具有题型多、方法全、覆盖面广、针对性强的特点，非常适合在校大学生与有志学习本门课程人员的需要.

本书应用解析方法对复变函数的方法、概念与习题进行了讨论、求索、分析、归纳，使读者通过学习本书后能较好地掌握复变函数的思想、方法与技巧. 本书以大量的例题解析为读者提供有效的服务，还提供了西安交大陆庆乐编的《复变函数》全书的习题解析.

本书将是大学生必备的参考书，也是教学人员的一本很好的教学参考书.

前 言

复变函数是高等工科院校的一门重要的数学基础课.复变函数是在实函数的基础上产生和发展起来的,因此它与微积分学的概念、方法有许多相似和联系,但又有许多的发展与区别.在今天,复变函数论一方面成为一种重要的解析工具,一方面又给其他学科(如流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等)提供了一种广泛的几何定性研究的方法.正因为如此,复变函数课程日益引起大家的重视.但是人们在学习掌握这门课程中普遍感到概念难懂,习题难做,方法难于掌握.本书就是为了帮助大家解决学习的困难而编写的.

本书按照国家教育部《关于复变函数课程的基本要求》编写,因此特别适合在校大学生和有志学习本门课程的人员的需要.

在本书中,我们用解析方法对复变函数论中的概念与习题作了分析解析,演绎归纳,讨论求索.相信读者在学习本书后一定会受到启发,获得自己需要的知识、方法和解答.

为了满足广大读者的要求,我们在本书中还对西安交大陆庆乐编著的《复变函数》中的全部习题作了解答,以供读者参阅.

本书是21世纪高等学校数学系列辅助教材之一,欢迎读者使用本系列辅助教材.在本书编写出版过程中,得到武汉科技学院(武汉纺织工学院)领导、空军雷达学院领导以及华中科技大学出版社领导的热情支持与帮助,在此一并向他们表示衷心的感谢.

本书由武汉科技学院孙清华、空军雷达学院赵德修主编.由于水平所限和时间仓促,错漏之处在所难免,欢迎读者给予批评指正.

孙清华　赵德修

2001年2月

目　录

第一章　复数与复变函数概念

§1.1　知 识 提 要

1. 复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x,y 为任意实数，$\mathrm{i}(\mathrm{i}^2=-1)$称为虚单位. x,y 又称为 z 的实部与虚部，记为

$$x=\mathrm{Re}(z),\quad y=\mathrm{Im}(z).$$

$z=x+\mathrm{i}y$ 与直角坐标系平面上的点(x,y) 成一一对应，平面称复平面. $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$表示复数 z 的向量的长度，称复数的模. $\mathrm{Arg}z=\theta=\mathrm{Arctan}(y/x)$称为 z 的辐角，表示 z 的向量与 x 轴正向间的交角的弧度数. 其中满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的 θ_0 称为辐角 z 的主值，记作 $\theta_0=\arg z$.

2. 复数的各种表示法

(1) 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用复平面上点(x,y)表示.

(2) 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可用从原点指向点 (x,y)的平面向量表示.

(3) 复数的三角表达式为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，其中 $r=|z|,\theta$ 为 $z\neq0$ 时任一辐角值.

(4) 复数的指数表达式为 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

(5) 复数的复球面表示. 任取一与复平面切于原点的球面，原点称球面的南极，过原点且垂直平面的直线与球面的交点称为球面的北极，连接平面上任一点与球面北极的直线段与球面有一个交点，又在平面上引人一个假想点∞与球面北极对应，构成扩充复

平面与球面点的一一对应，即复数与球面上点的一一对应．球面称为复球面．

3. 复数的代数运算（z_1,z_2 不为零）

（1）$z_1=z_2$，当且仅当两复数实部与虚部分别相等．

（2）$z=0$，当且仅当 z 的实部与虚部同时为 0．

（3）$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则 $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$．

（4）$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$．即 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\mathrm{Arg}|z_1z_2|=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$．

（5）$z_1/z_2=(x_1x_2+y_1y_2)/(x_2^2+y_2^2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)/(x_2^2+y_2^2)$．即 $|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|,\mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$．

（6）$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$．

（7）$\sqrt[n]{z}=r^{1/n}[\cos(\theta+2k\pi)/n+\mathrm{i}\ \sin(\theta+2k\pi)/n],k=0,1,\cdots,n-1$．在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值恰为以原点为中心，$r^{1/n}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点．

4. 曲线与区域

（1）设 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，其中 $x(t),y(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 为实变量 t 的单值连续函数，则 $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ 表示复平面上的一条连续曲线．

一条没有重点的连续曲线称简单曲线或约当曲线．如果简单曲线的起点与终点重合，称简单闭曲线．

如果在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上，$x'(t),y'(t)$ 连续，且对每一 t 值，有 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq0$，称曲线 $z(t)$ 是光滑的．

任意一条简单闭曲线分复平面为三个部分．曲线 C 为边界，有界区域为 C 的内部，无界区域为 C 的外部．

（2）复平面上的非空连通开集称为区域．区域连同其边界称

闭区域.

若在复平面上区域 D 内任作一条简单闭曲线,其内部总属于 D,称 D 为单连通域.若 D 不是单连通域,则 D 为多连通域.

5. 复变函数

设 G 为一个复数集,若有一个确定法则存在,使对于任一 $z\in G$,有一个或几个复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 与之对应,则称复变数 w 是复变数 z 的函数,记作

$$w = f(z).$$

复变函数在几何上表示 z 平面上一个点集 G(定义集合)到 w 平面上一个集合 G^*(函数值集合)的映射(或变换).w 称为 z 的像(映像),z 称为 w 的原像.

6. 复变函数的极限

设 $w=f(z)$在点 z_0 的某去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义,A 为一确定常数.若对任给的 $\varepsilon>0$,存在相应 $\delta>0$,使对满足 $0<|z-z_0|<\delta$ 的 z,恒有 $|f(z)-A|<\varepsilon$,则称 A 为 $f(z)$当 z 趋向 z_0 时的极限,记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A.$$

由于 $z\to z_0$ 的方式的任意性更强,因此复变函数的极限定义比一元实函数极限定义要求苛刻得多.

复变函数极限的运算法则与实函数极限运算法则相同.

7. 复变函数的连续性

如果$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$,称 $f(z)$在 z_0 连续.若 $f(z)$在区域 D 内每一点都连续,称 $f(z)$在 D 内连续.

$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续的充要条件为 u 和 v 在点 (x_0,y_0)连续.

复变函数连续性的运算法则与实函数连续性运算法则相同.

学习与考试要求

(1) 熟练掌握复数的各种表示方法以及四则、乘幂和共轭运算.

(2) 了解区域的概念.单连域、多连域的区分.

(3) 了解曲线、光滑曲线、简单闭曲线的定义,能用复数的方程或不等式表示一些常见的区域和曲线.

(4) 掌握复变函数的概念,理解映射的意义,理解复变函数与两个实二元函数之间的关系.

(5) 了解复变函数的极限与连续性概念,知道它们与实一元函数极限与连续性的异同.

重点与难点

重点是复数表示法之间的转换、区域的确定、复变函数的概念.

难点是复球面概念,复变函数理解为复平面上两个集合间的映射,以及复变函数的极限与连续性.

§1.2 疑难解析

1. 辐角的主值 $\operatorname{Arg}z$ 怎样确定?

答 $\operatorname{Arg}z$ 可以由 $\operatorname{Arg}(y/x)$ 的主值 $\arctan(y/x)$ 按下列关系来确定

$$\operatorname{Arg}z=\begin{cases}\arctan(y/x), & \text{当 } x>0,\\ \pm\pi/2, & \text{当 } x=0, y\neq 0,\\ \arctan(y/x)\pm\pi, & \text{当 } x<0, y\neq 0,\\ \pi, & \text{当 } x<0, y=0.\end{cases}$$

其中 $-\pi/2<\arctan(y/x)<\pi/2$.

2. 复数为什么不能比较大小?

答 我们知道,实数是有序的,所以实数可以比较大小.而复

数是无序的，因此不能比较大小.

假若复数能比较大小，则由复数是实数的推广可知，它的大小顺序关系应遵循实数中的大小顺序关系. 如在实数中有

若 $a>b,c>0$，则 $ac>bc$；

若 $a>b,c<0$，则 $ac<bc$.

现在我们来看复数 i 和 0. 因为 $\mathrm{i}\neq 0$，若 $\mathrm{i}>0$，则两边同乘“大于”0 的 i，得

$\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}>0\cdot\mathrm{i}$，即 $-1>0$，而这是错误的；

若 $\mathrm{i}<0$，同样推出 $-1>0$. 显然，i 与 0 无法比较大小.

所以，我们说复数不能比较大小. 但是复数的模、实部、虚部都是实数，可以比较大小.

3. 复数是否一定有辐角？

答 除零以外的复数都有辐角. 当 $z=0$ 时，它的辐角可取任意值而不确定，这与零向量有任意方向是一致的.

4. 复数的运算与向量运算有何相同与区别？

答 复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以用从原点指向点 (x,y) 的向量表示. 在运算上它们有相同之处也有相异之处.

相同之处是有同样的加减运算和数乘运算.

相异之处是复数有乘除、乘幂和方根等运算，而向量没有这些运算；向量有数量积、向量积、混合积等运算，而复数没有这些运算.

5. 如何理解两个复数 z_1 与 z_2 的乘积和商的辐角公式？

答 对于公式

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\quad \mathrm{Arg}(z_1/z_2)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2,$$

应该理解为：任意给定一个等式右端两个多值函数一对可能取的值，左端多值函数也必有一个值使这个等式成立. 反过来说也对.

这是因为公式两端的 Arg 都表示无穷多个值，等式是在全体意义上的相等，而不是个别意义上的相等. 例如，

设 θ_1,θ_2 是 $\mathrm{Arg}z_1$ 和 $\mathrm{Arg}z_2$ 的任意一对选定的值，则

$\mathrm{Arg}(z_1z_2)$应有一 θ 满足 $\cos\theta=\cos(\theta_1+\theta_2)$,$\sin\theta=\sin(\theta_1+\theta_2)$,虽然 θ 不一定就是 $\theta_1+\theta_2$,但一定有 $\theta+2k\pi=\theta_1+\theta_2$. 而 $\theta+2k\pi$ 是 $\mathrm{Arg}(z_1z_2)$无穷多值中的一个. 反过来也是一样.

6. 为什么在复平面中规定无穷远点只是一点?

答 在高等数学中,∞可以分为$+\infty$和$-\infty$,而在复变函数中只有唯一的无穷远点∞. 这是由复球面上的点与扩充复平面上点的一一对应性而得出的,复球面上只有一个 N 点,对应的∞点也就只有一个. 引入唯一的无穷远点∞在理论上有重要的意义,∞可以作为复平面的唯一的边界点.

7. 怎样理解复变函数 $w=f(z)$的意义?

答 设 $z=x+\mathrm{i}y$,$w=u+\mathrm{i}v$,则 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$. 所以复变函数 w 与复变数 z 之间的关系 $w=f(z)$相当于两个实函数关系:

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

定义一个复变函数 $w=f(z)$相当于定义两个实二元函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$.

复变函数 $w=f(z)$在几何上反映 z 平面上一个点集 G(定义集合)到 w 平面上一个点集 G^*(函数值集合)的一个映射.

8. 一个点是不是区域? 一个矩形的内部加上边界上一点是不是区域? 为什么?

答 一个点不是区域,因为这时点不是内点,不存在在点的一个属于 E 的邻域.

一个矩形的内部加上边界上一点也不是区域,这时点集不是开集.

9. 复变函数 $w=f(z)$当 $z\to z_0$ 的极限与实变函数 $y=f(x)$当 $x\to x_0$ 的极限有何异同?

答 这两个极限的定义在形式上与叙述方法上几乎十分相似,但意义却大不相同.

对极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$而言,$x\to x_0$ 是任意的,但只能在 x_0 的邻域内

从左、从右或时左时右地趋向 x_0，而对极限$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$来说，$z\to z_0$ 的任意性更强一些，z 可以从任何方向，以任何方式趋向 z_0，因而条件更严格和苛刻.

其相同点是，只要 z(或 x)进入 z_0(或 x_0)的 δ 邻域，它的像点 $f(z)$(或 $f(x)$)就进入 A 的 ε 邻域. 而且，它们有相同的极限运算法则.

10. 函数 $\mathrm{Arg}z$ 在何处连续?

答 由题 1 已知辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的确定方式，故可知当 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 不是原点也不是负实轴或虚轴上的点时，与 z_0 足够接近的点 z 也不是原点与负实轴上的点. 这时有

$$\mathrm{Arg}z=\begin{cases}\arctan(y/x);\\ \text{或 } \arctan(y/x)\pm\pi.\end{cases}$$

因为 $x_0\neq 0$，所以 $\arctan(y_0/x_0)$有意义，故

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\begin{cases}\arctan(y/x);\\ \arctan(y/x)\pm\pi\end{cases}=\begin{cases}\arctan(y_0/x_0);\\ \arctan(y_0/x_0)\pm\pi.\end{cases}$$

即 $\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_0$.

当 z_0 为正虚轴上点 $z_0=\mathrm{i}y_0(y_0>0)$时，有

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z=\pi/2=\mathrm{Arg}z_0.$$

当 z_0 为负虚轴上的点 $z_0=\mathrm{i}y_0(y_0<0)$时，有

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z=-\pi/2=\mathrm{Arg}z.$$

当 z_0 为负实轴上点 $z_0=x_0(x_0<0)$时，由于

$$\lim_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z=\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^+}}(\arctan(y/x)+\pi)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0^-}}(\arctan(y/x)-\pi)\end{cases}=\begin{cases}\pi;\\ -\pi.\end{cases}$$

所以$\lim\limits_{z\to z_0}\mathrm{Arg}z$ 不存在.

又在原点处，辐角不确定.

综述之，除原点及负实轴上点外，Arg$z$ 在复平面内处处连续.

§1.3 例题解析

一、复数的基本概念

复数是复变函数论的预备知识，因此读者必须熟悉复数的基本概念，初学者最容易弄错的是复数的辐角，应根据 $z=x+iy$ 中点 (x,y) 的坐标确定 θ 在哪一象限来取它的值. 对复数的各种表示式要能熟练转换，以适应不同运算的不同要求.

例 1 计算

1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4$； 2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$； 3) $(1+i\sqrt{3})^3$；

4) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$； 5) $\dfrac{i}{(i-1)(i-2)}$.

解 1) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^4=\left(\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}\right)^4=(-i)^4=1.$

2) $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}+i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}.$

3) $(1+i\sqrt{3})^3=(2e^{i\frac{\pi}{3}})^3=8e^{i\pi}=-8.$

4)
$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^{10}=\left(\frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{-i\pi/3}}\right)^{10}=(e^{i2\pi/3})^{10}=e^{i20\pi/3}$$
$$=\cos(20\pi/3)+i\sin(20\pi/3)$$
$$=-1/2+i\sqrt{3}/2.$$

5)
$$\frac{i}{(i-1)(i-2)}=\frac{i(-i-1)(-i-2)}{(i-1)(-i-1)(i-2)(-i-2)}$$
$$=\frac{(1-i)(-2-i)}{10}=-3/10+i/10.$$

例 2 求下列复数的虚部、实部、共轭复数、辐角和模.

1) $\dfrac{1}{i}$， 2) $\dfrac{3+i}{2-i}$， 3) $(1+2i)(2+\sqrt{3}i)$，

4) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}$,　　5) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

解　1) $1/i=-i$. $\mathrm{Re}(z)=0$, $\mathrm{Im}(z)=-1$, $\bar{z}=i$, $|z|=1$, $\mathrm{Arg}z=-\pi/2$.

2) $(3+i)/(2-i)=(3+i)(2+i)/5=1+i$. $\mathrm{Re}(z)=1$, $\mathrm{Im}(z)=1$, $\bar{z}=1-i$, $|z|=\sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}z=\pi/4$.

3) $(1+2i)(2+\sqrt{3}i)=2(1-\sqrt{3})+i(4+\sqrt{3})$. $\mathrm{Re}(z)=2(1-\sqrt{3})$, $\mathrm{Im}(z)=4+\sqrt{3}$, $\bar{z}=2(1-\sqrt{3})-i(4+\sqrt{3})$, $|z|=\sqrt{35}$, $\mathrm{Arg}z=\pi-\arctan[(7+5\sqrt{3})/4]$.

4) $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)(1-i)}{(1-\sqrt{3}i)(1+i)}=\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{-2}\cdot\dfrac{(1-i)^2}{2}=\sqrt{3}/2+i/2$. $\mathrm{Re}(z)=\sqrt{3}/2$, $\mathrm{Im}(z)=1/2$, $\bar{z}=\sqrt{3}/2-i/2$, $|z|=1$, $\arg z=\pi/6$.

5) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n=(e^{i\pi/3})^n=e^{in\pi/3}=\cos(n\pi/3)+i\sin(n\pi/3)$. $\mathrm{Re}(z)=\cos(n\pi/3)$, $\mathrm{Im}(z)=\sin(n\pi/3)$, $\bar{z}=\cos(n\pi/3)-i\sin(n\pi/3)$, $|\bar{z}|=1$, $\arg z=n\pi/3+2k\pi$ (k 使 $-\pi\leqslant n\pi/3+2k\pi\leqslant\pi$).

例 3　化简 $\sqrt{1+2x\sqrt{x^2-1}i}$; $|x|\geqslant1$.

解　设原式 $=u+iv$. 则 $1+2x\sqrt{x^2-1}i=u^2-v^2+2uvi$, 即 $u^2-v^2=1$, $uv=x\sqrt{x^2-1}$.

解方程得 $u=\pm x$, $v=\pm\sqrt{x^2-1}$, 所以, 原式 $=\pm(x+i\sqrt{x^2-1})$.

例 4　化下列复数 z 为三角形式和指数形式.

1) $1+i$,　　2) $-\sqrt{12}-2i$,

3) $-2\sqrt{3}+2i$,　　4) $1-\cos\theta+i\sin\theta$.

解　1) 因为 $|z|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $\tan\theta=y/x=1$, $\theta=\pi/4$, 所