电 路 图 论

〈日〉梶谷洋司 著
孙雨耕 译
许镇琳 校

天津大学出版社

河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：787×1092毫米1/32 印张：10¼ 字数230千字
1989年1月 第一版 1989年1月第一次印刷
印数：1—2500
ISBN 7-5618-0106-8

TM·9
定价：4.30元

序

图论是组合（*combinatorial*）数学或离散（*discrete*）数学的一个主要分支。在理论和应用方面，对图论的研究近年骤然活跃起来了。

“图”的概念不仅在人的直观所能理解的范围内，而且在研究对象的模型化方面具有广泛的适应性。因此，不仅在工程学，而且在社会学、心理学、经济学等诸多学科领域日渐采用图论的分析方法。但是，在这些领域中，应用图论的研究成果还未必能说是成功的。这是因为除了用图论方法将实际问题公式化以外，应用图论解决实际问题的成果还不多见。

在以上诸领域中，电路理论的发展必然要对图论提出要求。同时，电路理论也是最有效且最系统地应用图论的领域。实际上，在电路理论中用到的图论知识几乎涉及到图论过半的内容。这样说并不为过 不仅如此，由于图论常常容易被看成是一些片断研究成果的堆积，因而在统一地、系统地阐述图论时，电路理论是图论所能依附的最大支柱之一。

本书将叙述在线性集中参数电路理论这一范围内，图论方法将占有何种地位，以及图论将给这一理论范围带来怎样的成果。同时，从电路理论的立场出发，试图构成图论的一支体系。

现提一下本书的取材。本书以电路的解析理论为中心。没有收进与电路综合理论、电路故障诊断理论有关的图论内容以及著者认为还未形成体系的研究成果。对图论中虽比较重要、

目　　录

第一章 电 路 图 论

图论是数字的一个分支。如果从应用方面看，在理解和处理研究对象的方法上，图论所提供的观点是一种独特的思想。本章将简单地介绍图论的导入、图论在电路理论中的作用以及电路理论在整个图论应用领域中的地位。

1.1 电 路 图 论

图（*graph*）是指由有限个点的集合以及连结两点的若干条线段所组成的图形。图1.3所示图形便是其中之例。自古以来，人们用各种不同的方法导入图的概念，而上述定义是最基本的。实际上，无论采用什么方法来定义，“图”所包含的内容既不会比上述定义多，也不会比上述定义少。当欲指定一个图时，是用图形还是用其他方法来表示这个图，这不过是图的表示方法的多样性问题。

所谓图论，简言之，它是系统地研究具有图结构的有关问题的一个数学分支。尽管有时把它看成是在拓扑学或组合数学体系下的一个组成部分，但就其所具有的内容和特点而言，图论足以形成独自的体系。

如果不考虑各元件的特性，那么集中参数电气网络（以下简称电路）的配线图本身就是图，称为电路的图。当然，电路的功能是由元件特性和元件间的结线构造所决定的。但如果在电路的功能中，着重研究与元件间的结线构造密切相关的性

质．那么这种研究范畴就形成了“图论形”电路理论。一般在电路理论中，把不考虑元件特性而普遍成立的性质，称之为“图论形”性质。

从电工理论和作为其成果的电气产业蓬勃发展的今天向前追溯130年，在1845年，克希霍夫（*G·Kirchhoff*）[1.1]提出了元件电压间、元件电流间所遵循的规律，即克希霍夫电压定律和电流定律，在电路的图上，称其为“图论形”定律。其后，他又于1847年导出了求解线性*电路中各部分电压电流的图论公式。

于是 克希霍夫成为独自解决电路理论的起点—“电路方程的公式化”和终点—“决定电路解的形式”这两大课题的天才。以他的研究为标志，电路理论才开始向“图论形”电路理论的方向迈进了。

由于图论本身的研究当时也还处于黎明期，又由于克希霍夫不仅从数学上提供了基本的图论定理，并且向人们展示了图论所具有的广阔的应用领域，故克希霍夫被公认为图论的奠基人之一。

直接沿用克希霍夫方法的脉络继续研究的是*Feussner*。本书将常常引用其研究成果。其后虽然*Foster*、*Whitney*等人的卓越贡献也为世人所散见。但从1930年前后至近代，是用函数论方法研究电路综合理论的全盛时期。在这一时期，对于图论的研究没有发生什么影响，也无有意识地进行图论研究。实际上，由于在“古典电路综合理论”中，元件特性起着重要的决定性作用，而图论所研究的是与元件值无关的电路性质，故很难期待在这一时期图论会有大的发展。如果把电路理论分成“公式化”、“解析”、“综合”这三段，那么遗憾的是，同克希霍

* 指除电源外，各元件的电压、电流关系符合欧姆定律。

夫时代一样，至今仍然认为图论仅适用于前两段。认为解析理论研究之后就应研究综合理论，即综合理论是建立在解析理论之上的。因而在综合理论发展的全盛时期，忽视用图论方法研究电路的现象就可以理解了。

但是，近年来，由于电路研究的蓬勃发展，人们从不同角度重新评价了图论应有的地位，特别是最近，电路的计算大都用计算机进行，而应用图论进行问题的公式化和执行计算是非常有效的，故被广泛采用。所谓用计算机进行电路综合，其方法不过是通过反复的解析逐渐接近所要求的指标。因而在解析论中，图论是非常有用的。

如果在系统中图形结构起基本作用，那么研究这种系统的领域，即图论的应用领域，被认为是一个体系并称之为网络理论。近年来，这一观点正为人们所公认。图论形电路理论不单是网络理论的一个领域，它还是网络理论中许多研究方法的源泉，从而具有其主要支柱的地位。

本书是电路理论中，成功地利用图论解决电路问题的一个概论。并不是电路理论或图论本身，也不是以网络理论的概论为目标的。也许称为电路图论更合适。网络理论目前仍在发展，且涉及多方面知识的聚积，故从表面看，研究者很不容易入门。本书的另一个目的正在于给予研究网络理论体系一个入门。对此，也可把它看成是为此目的，选择电路理论为最佳例子而进行阐述的一本书。

需要指出的是，本书一般不引用那些与过于常识性的术语和概念有关的文献，也没有引用出于较早著作中而不能确定其是否正确的文献。对所引的极为近期的文献，虽然主观上期望它们都是正确的，但其中难免有不妥之处。此外，也没有精细地考虑所引文献在大量文献中所占的份量。

1.2 研究的对象——电路范围

可用图论形电路理论有效地进行研究的电路是由集中参数元件组成的所谓集中参数电路。今后凡在本书中提到的电路。都只限定这样的电路。一般电路可由

(i) 组成电路的元件的种类;

(ii) 元件间的关联关系(图)

所完全确定,而对它的研究是从

(iii) 指定表示电路状态的基本量;

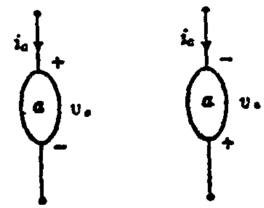
(iv) 电路定律的公式化

开始的。因而叙述图论形电路理论之前,有必要明确以上四项内容。以便明确适用范围。但是.所谓图论形这个词表示的是一种观点.故难以详尽地介绍图论形电路理论的运用范围。读者通过深入地阅读本书虽然可以领会,但需指出的是,全书的脉络是直流线性电阻电路理论。如果不计元件的类型,那么这个理论与正弦稳态激励电路理论是相同的。其中,部分理论可用来求LCR电路中的初始问题。也能用来研究有源电路。例如含有变压器、受控源、零子、任意子等元件的电路.不言而喻.克希霍夫定律对非线性电路、时变电路也都是适用的。有了以上认识及大学低年级的电工理论知识,可以预料,即使不作特殊说明,也能明瞭本书进行的各个讨论所适用的范围。由于以上原因,本书没有特别指明电流、电压是交流的还是用复数表示的,也没有指明元件是L、C、R还是其他。通篇是假定为直流电阻电路的条件下记述的。仅在具有特定含义时,才说明其适用范围。对读者常识以内的概念,往往不加定义直接采用。使之尽可能不偏离图论形电路理论的方向展开叙述。

针对本书的研究对象，首先规定与上述(i)~(iv)各项有关的一般性注意事项并约定符号。

(i) 组成电路的元件种类：

所有元件都是“2端元件”。2端元件需满足以下条件：其外部有两个可以接触到的通电场所（端子）且从一端流入的电流等于从另一端流出的电流。图1.1的(a)或(b)为其图形表示。图中a为元件符号，i_a、v_a表示元件电流、电压的数值。它们分别为沿图中用箭头或+、−所示极性测得的值。同图(a)和(b)中电流、电压的极性是相对反向的，具有$i_a=i_a$，$v_a=-v_a$，或$i_a=-i_a$，$v_a=v_a$的关系。



(a) (b)

图 1.1 2端元件a及其电流电压表示

通常所见电路往往含有非2端元件的电路元件(例如变压器等2端口元件、晶体管等3端元件)，但它们大都可以通过2端元件的组合模型化。因此局限在2端元件电路范围内的讨论从理论上来说并不失其一般性。

其次，可以按一个元件的电流、电压这两者之中，一方是不依赖另一方而独立的，还是一方可由另一方唯一确定，或者两个元件的电流、电压具有某种受控关系而将元件分为电源元件、自元件或耦合元件。详见5.1节。

(ii) 元件间的关联关系（图）：

图1.2所示为含有6个元件和4个元件连接点的电路图N，尽管这个图所表示的内容是多样的，但如果不考虑元件的类型（不区分L、C、R、电压源），也不考虑元件值（元件的导抗、电压源的电压）而只观察表示元件间相互关联的图形，即可得到图1.3(a)所示的“电路N的图”。电路的图与图形的

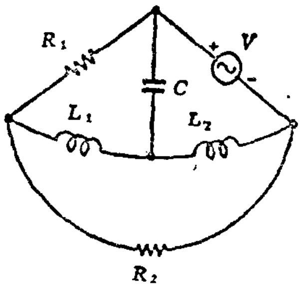


图 1.2　电路N的电路图

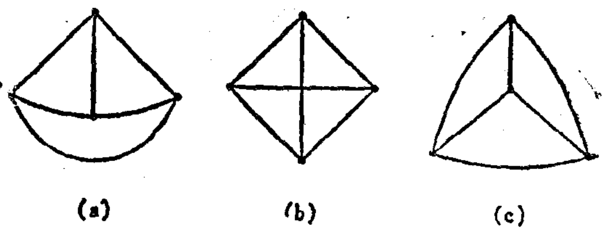


图 1.3　电路N的图

大小、各点的位置、线段的形状等是无关的。只要点和线段的关联关系正确，那么所画出的图形就都是等价的，故同图（b）、（c）也是N的图。

(iii)　电路的基本量：

本书采用元件的电流和电压作为电路方程的公式化中所用的变量。如果提到电路的状态，是指电路中所有元件的电流和电压。把电路中其他的量，例如有功功率、无功功率或各点间的电位差等均看成可由基本量计算出的二次量。

(iv)　电路定律：

有克希霍夫电流定律（*Kirchhoff's current law*，简记为*KCL*），克希霍夫电压定律（*Kirchhoff's voltage law*，简记为*KVL*）及元件特性这三条定律。

KCL：对于各点，流入该点的元件电流的总和为零。

KVL：把形成回路的各元件电压沿同一方向循行时，各元件电压总和为零。

关于元件特性，请参见5.1节。

关于如何以基本量为变量按电路定律书写电路方程式，也详述于5.1节。

1.3 图的术语和概念

在图论的术语中，称连结点（*vertex*, *node*, *point*）对的线段为边（*edge*, *arc*, *branch*）。在2维平面上用图形表示图时，为把二边相交叉处同点相区别，点用面积可忽略的黑点表示，见图1.3(*b*)。

由于我们要研究电路理论，所以通过表现电路结线构造这一例子而导出图的概念。但是如果所要研究的是社会学，则将使个人与点、个人间的友好关系与边分别对应，从而导出图的概念。如果是交通学，则点与站、边与线路相对应。如果是方程理论，则可使点与变量、边与非零系数相对应从而说明图的含义。但在图论中，图本身不过是单纯地表示边与点的关联关系。只要不自相矛盾，点和边是自由的，不附加任何意义。本节将总的介绍与图的一般性问题有关的各基本概念在标记上的约定，这些约定并不限于电路的图。

(i) 图的元素：

设一图为G。用自然数1，2，…，n标记G的点，用符号e_1，e_2，…，e_m标记边。点及边称为图的元素．称G是由点集$V=\{1, 2, \cdots, n\}$及边集$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$构成的。欲明记构成元素时，将$G$写成$G(V, E)$。

(ii) 关联、邻接：

在图$G(V, E)$中，当有必要指明边e的两端点是i和j时，可将e写成$e(i, j)$，有时也用点对（i，j）表示e。称e与i和j关联（*incident*），或称e以i和j为端点．并称i和j（通过e）相邻接(*adjacent*)。此外，二个边e，e'

共有端点时，也称 e 和 e' 是邻接的*。

(iii) 元素的标记：

图的各边各点其本身本来是不具特殊意义的，仅仅为了将点与点、边与边或一个图的点、边与另一个图的点、边相区别，才给它们附上标记．称为有标记(*labeled*)图。不过在应用领域内所研究的图形多为有标记图。例如在电路的图中，可以按对应电路的电路元件和端子的特点，分别给对应的边和点附加足以显示这些特点的标记。

还可将元素分类，即对图中多个元素配以相同的标记。这是附加标记这一方法的延伸，即“种属”概念。以电路的图为例，可以按照边与 L、C、R、电源之中哪一种相对应来分类。

(iv) 同构：

所谓两图 G_1、G_2 是相同的，一般区分为两种情况。其一是，G_1、G_2 的点和边已具有1:1对应的标记，且两图中对应点和边的关联关系一致．此时 G_1、G_2 作为有标记图是同构的(*isomorphism*)。其二是，两图中各点各边均无特性．适当地给两图的点和边附加标记，可以作到1:1对应，成为有标记图且同构．此时，G_1、G_2 作为无标记图是同构的。图1.4所示两图作为无标记图是同构的，但作为有标记图则是不同构的。

(v) 边的方向：

例如在直流电路中，连结两点的一个电阻元件与连结两点的一个整流器，在电路对应的图中，同样都是用一条边来表示。这从反映电路的角度来看，显然是不十分贴切的。因为在这样的图中似乎整流器实质上并不存在。为了反映在这样的

---

* 一般视两元素是异类的还是同类的而分别使用关联和邻接两个术语。

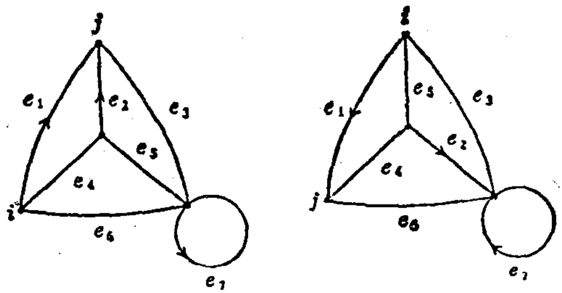


图 1.4　作为无标记图同构、作为有标记图不同构的图对

连接点对间作用元件的非对称性，往往给边加上“方向”，可用箭头表示，如图1.4中e_1、e_2、e_7所示。称这种边为有向边（*directed edge*）。不仅此例，由于定义了有向边，就可以从实际系统得到正确的模型。

如欲明确表示图1.4中$e_1(i, j)$是有向边，i 和 j 具有图示的关系时，可将其写成如下几种形式

$$(\overrightarrow{i\ .\ j}),\ e_1(\overrightarrow{i, j}),\ e_1(\overleftarrow{j, i})$$

并称e_1与$i(j)$是正（负）向连接的。

在图论的各种问题中究竟令边的方向具有何种意义，这个问题对理论的扩展有很深的影响，是比较难的问题。并不仅限于上述一目了然的例子。在电路理论中，最初是用有向边来表示电路元件的电流、电压的极性。

在强调一条边不是有向边时，可称其为无向边（*undirected edge*）。所有边都是有向边的图称为有向图(*directed graph*)，所有边都是无向边的图称为无向图（*undirected graph*）。虽然有向边、无向边均存在的图是最一般的，但在实际问题中，一条无向边多可以用二条并联的、方向相反的有向边等价置换。因而在理论上多只讨论一般有向图和无向图。

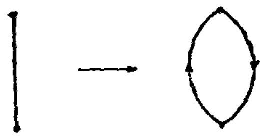


图 1.5 用有向边表示无向边

（vi） 加权图：

对边和点附加定量特性的图称为加权图（*weighted graph*）。以电路的图为例，元件的阻抗值、元件的最大容许电流值等均是常见的边的权。

（vii） 网络：

以上对图的元素，定义了"加标号"、"加方向"、"加权"等概念。如果沿着这个势头不断地进行图的元素的特性化，恐怕最终将会和原系统（电路）本身没什么差异了。因而有必要研究一下在确保图本身的面目的范围内，元素的特性化允许进行到何种程度。对此，一般从经验上，认为"加标记"、"加方向"尚可属图论范畴的，而"加权"后的图形同图的感觉迥然不同。在图论的应用领域中，往往称边加权图为网络（*network*）。

（viii） 子图：

在图$G(V, E)$中，设$V_S \subset V$、$E_S \subset E$满足条件SG*

$$SG \quad 若 e(i, j) \in E_S, 则 i, j \in V_S$$

于是可以研究图G_S。G_S的点集为V_S，边集为E_S，V_S的点和E_S的边的关联关系与在G中是相同的。此时称G_S含于G，是G的子图（*subgraph*），称SG为子图条件。

〔例1.1〕 在图1.6所示图$G(V, E)$中，$V_S = \{1, 3, 4\}$，$E_S = \{l_1, l_2\}$，不满足子图条件。

在用V_S、E_S精确地定义$G(V, E)$的子图$G_S(V_S, E_S)$时，V_S、E_S满足条件SG。在具体记述V_S、E_S满足SG条件时，往往文字很冗长。此时可改成另一种记述方法，即$G_S(V_S, E_S)$完

* 对于二个集合A、B，$A \subset B$表示"$A = B$"或"A含于B"，$a \in A$表示a是A的元素。

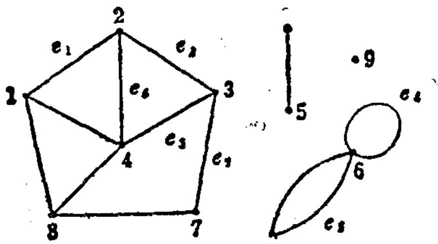


图 1.6 图$G(V, E)$

全可以仅由指定E_S以及V_S中所有非E_S边的端点的点V'_S所确定，这种看法是“边优先”。“点优先”时也类似。即$G_S(V_S,E_S)$完全可以仅由指定V_S以及端点在V_S内但不属于E_S的所有边E'_S所确定。

在以上二种记述中，若分别出现$V'_S=\phi$或$E'_S=\phi$，则看成是二种特殊的子图。讨论如下。

(a) 边区域图(*edge section graph*)：它是边集为E_S、V_S是所有E_S的边的端点的子图，可用E_S定义。

(b) 点区域图(*vertex section graph*)：它是点集为V_S，E_S是所有以V_S的点为其两端点的边的子图，可用V_S定义。

【例1.2】 图1.7所示为图1.6的图的几个子图。

图(a)为用

$$V_S=\{2,\ 3,\ 4,\ 7\},\ E_S=\{e_2,\ e_6\}$$

定义的子图。它也可以用

$$V'_S=\{7\},\ E_S=\{e_2,\ e_6\}$$

或用

$$V_S=\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}\quad E'_S=\{e_3,\ e_7\}$$

来定义。图(b)的图形是边区域图，可用

$$E_S=\{e_2,\ e_3,\ e_4\}$$