

内 容 简 介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材七个分册——矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计的题解。除对该教材的习题逐个作了解答之外，还增选了若干补充题并给出了解法或证明。

本书可供高等院校学生和自学工程数学的读者使用，也可供有关科技人员参考。

工 程 数 学 题 解

杨 曙 杨应辰 等编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 $1/32$ 印张 26 $1/2$ 568千字

1983年10月第一版 1983年10月第一次印刷 印数：00,001—42,000册

统一书号：15034·2566 定价：3.50元

前 言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材七个分册——矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计的题解。编写本题解的目的在于给读者，特别是自学的读者，在解题过程中遇到困难时作个参考，但不希望妨碍读者的独立思考。对该教材中的习题均按原来章次、习题顺序逐个地作了解答。同时，在每章习题后面增选了一些题目并给出解法或证明，供进一步学习参考。

解题的思路和方法是多种多样的。我们编题解时的主要依据是“工程数学”教材中所论述的基本概念、理论与运算方法，以便引导初学的读者去熟悉与掌握这些基本概念、理论和运算方法。因此没有过多地强调解题技巧及编写各种解法。

本书各部分分别由杨曙、李恒沛、王省富、周德润、周肇锡、刘运华、程云鹏、王自果、聂铁军、侯谊、杨应辰、徐明聪、成如翼、李志尧、萧亮壮、谭锐先、林世明、朱燕堂等编写。

水电研究院张之良教授审阅了“数学物理方程与特殊函数”部分的题解；江西工学院水利分院数学教研室曾编过三部分题解并寄赠编者，我们未来得及参考。对这些，我们在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，所给出的解题方法不一定是很好的，并且还可能存在不少缺点或错误，请读者指正。

编 者

目 录

矢量分析题解

第一章 矢性函数的微分和积分·····	2
习题一·····	2
第二章 梯度、散度和旋度·····	12
习题二·····	12
第三章 管式场和有势场·····	28
习题三·····	28
第四章 关于梯度、散度和旋度的计算公式·····	37
习题四·····	37
第五章 正交曲线坐标·····	50
习题五·····	50

复变函数题解

第一章 复数·····	62
习题一·····	62
第二章 复变函数的概念·····	74
习题二·····	74
第三章 复变函数的导数·····	88
习题三·····	88
第四章 复变函数的积分·····	110
习题四·····	110

第五章 无穷级数	129
习题五	129
第六章 留数理论及其应用	152
习题六	152
第七章 保角变换	175
习题七	175
第八章 多角形变换	188
习题八	188
第九章 多值函数与黎曼曲面	196
习题九	196

积分变换题解

第一章 富里哀变换	204
习题一	204
第二章 拉普拉斯变换	228
习题二	228

线性代数题解

第一章 行列式与 n 阶线性方程组	300
习题一	300
第二章 n 维向量	324
习题二	324
第三章 矩阵	336
习题三	336
第四章 矩阵的运算	344
习题四	344

第五章 线性方程组	375
习题五	375
第六章 二次型和矩阵的特征值	389
习题六	389
*第七章 线性空间简介	419
习题七	419

计算方法题解

第一章 误差知识	448
习题一	448
第二章 方程的近似解法	450
习题二	450
第三章 线性代数计算方法	454
习题三	454
第四章 插值法	465
习题四	465
第五章 曲线拟合与最小二乘法	471
习题五	471
第六章 数值微分与数值积分	475
习题六	475
第七章 常微分方程初值问题的数值解法	479
习题七	479
第八章 偏微分方程的差分解法	482
习题八	482

数学物理方程与特殊函数题解

数学物理方程

第一章 典型方程与典型问题	486
习题一	486
第二章 驻波法 (分离变数法)	492
习题二	492
第三章 积分变换法 (频谱法)	566
习题三	566
第四章 行波法	582
习题四	582
第五章 点源法	600
习题五	600
第六章 二阶线性方程分类与定解问题的适定性	614
习题六	614

特殊函数

第一章 Γ 函数和B函数	620
习题一	620
第二章 贝塞尔函数	627
习题二	627
第三章 勒让德函数	643
习题三	643
第四章 切比雪夫多项式	654
习题四	654

概率论与数理统计题解

第一章 排列与组合	662
习题一	662
第二章 事件和概率	665
习题二	665
第三章 随机变量与分布函数	690
习题三	690
第四章 随机变量的数字特征	716
习题四	716
第五章 极限定理	738
习题五	738
第六章 随机过程	746
习题六	746
第七章 数理统计学概说	763
习题七	763
第八章 参数估计	768
习题八	768
第九章 假设检验	790
习题九	790
第十章 方差分析	813
习题十	813
第十一章 回归分析	825
习题十一	825

向量分析题解

杨 曙 编
李恒沛

第一章 矢性函数的微分和积分

习 题 一

1 证明方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} + Bt$$

确定一直线，其中 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 是常矢， $B \neq 0$ ， t 是参变数。

【证】 $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ， $\mathbf{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ ， $\mathbf{B} = \{B_x, B_y, B_z\}$ 。于是由 $\mathbf{r} = \mathbf{A} + Bt$ ，有

$$x = A_x + B_x t, \quad y = A_y + B_y t, \quad z = A_z + B_z t.$$

这就是以 t 为参变数的空间直线的参数方程，或者消去参数 t ，得标准方程：

$$\frac{x - A_x}{B_x} = \frac{y - A_y}{B_y} = \frac{z - A_z}{B_z}.$$

2 求

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] \text{ 和 } \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})],$$

其中 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ 都是 t 的可导函数。

【解】

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} \right) \\ &\quad + \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} [\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})] &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \times \frac{d}{dt} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \\
&= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \times \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} \right) \\
&\quad + \mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right).
\end{aligned}$$

3 已知 $\mathbf{r} = \{t^3 + 2t, -3e^{-2t}, 2\sin 5t\}$, 试求下列各式在 $t = 0$ 时的值:

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2) \quad \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|,$$

$$(3) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \quad (4) \quad \left| \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|.$$

【解】 $\mathbf{r}'(t) = \{3t^2 + 2, 6e^{-2t}, 10\cos 5t\},$

$$\mathbf{r}''(t) = \{6t, -12e^{-2t}, -50\sin 5t\}.$$

故 (1) $\mathbf{r}'(0) = \{2, 6, 10\} = 2\{1, 3, 5\};$

$$(2) \quad |\mathbf{r}'(0)| = 2\sqrt{1+3^2+5^2} = 2\sqrt{35};$$

$$(3) \quad \mathbf{r}''(0) = \{0, -12, 0\},$$

$$(4) \quad |\mathbf{r}''(0)| = 12.$$

4 设 $\mathbf{a} = \{x^2 \sin y, z^2 \cos y, xy^2\}$, 求 $d\mathbf{a}$.

【解】 $d\mathbf{a} = \{d(x^2 \sin y), d(z^2 \cos y), d(xy^2)\}$
 $= \{2x \sin y dx + x^2 \cos y dy,$

$$2z \cos y dz - z^2 \sin y dy, y^2 dx + 2xy dy\}.$$

5 试求圆柱螺线 (参考樊映川编: 高等数学讲义)

$$\mathbf{r} = \{a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta\}, \quad -\infty < \theta < +\infty$$

在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时的切线方程。

【解】 $\mathbf{r}'(\theta) = \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\},$

$$\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \{-a, 0, b\}.$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{-a} = \frac{y-a}{0} = \frac{z - \frac{b}{2}\pi}{b}.$$

6 试求曲线

$$\mathbf{r} = \{at, bt^2, ct^3\}$$

上某一点的切线和法平面。这里 a, b, c 都是常数。

【解】 $\mathbf{r}'(t) = \{a, 2bt, 3ct^2\},$

于是所求切线方程为

$$\frac{x-at}{a} = \frac{y-bt^2}{2bt} = \frac{z-ct^3}{3ct^2};$$

法平面方程为

$$a(x-at) + 2bt(y-bt^2) + 3ct^2(z-ct^3) = 0.$$

7 一质点以等速度沿着曲线

$$\mathbf{r} = \{a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta\}, \quad -\infty < \theta < +\infty$$

运动, 求其速度和加速度。

【解】 $d\mathbf{r} = \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\} d\theta,$

$$\begin{aligned} (d\mathbf{r})^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = (a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta + b^2)(d\theta)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(d\theta)^2. \end{aligned}$$

由 $(d\mathbf{r})^2 = (ds)^2$, 得

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2} d\theta.$$

于是速度

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\};$$

加速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(v \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right) \frac{ds}{dt} \\ &= v^2 \frac{d}{ds} \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right) \end{aligned} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{而 } d \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right) &= d \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{ -a \sin \theta, a \cos \theta, b \} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{ -a \cos \theta, -a \sin \theta, 0 \} d\theta, \\ \frac{d \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \right)}{ds} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{ -a \cos \theta, -a \sin \theta, 0 \} d\theta}{\sqrt{a^2 + b^2} d\theta} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \{ -a \cos \theta, -a \sin \theta, 0 \}. \end{aligned}$$

代入 (*) 中, 求得加速度

$$\boldsymbol{w} = \frac{-av^2}{a^2 + b^2} \{ \cos \theta, \sin \theta, 0 \}.$$

3 一质点沿着曲线

$$\boldsymbol{r} = r \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}$$

运动, 其中 r 、 φ 都是时间 t 的函数。(1) 求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及与其垂直方向的投影 v_r 和 v_φ , (2) 求加速度 $\boldsymbol{w}$ 在同样方向上的投影 w_r 和 w_φ 。

【解】 矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模为 r , 矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量为 $\{ \cos \varphi, \sin \varphi \}$ 。

与矢径 $\boldsymbol{r}$ 垂直的方向上的单位矢量为

$$\{ -\sin \varphi, \cos \varphi \}.$$

現 $\mathbf{r}'(t) = r'(t) \{\cos \varphi, \sin \varphi\} + r \{-\sin \varphi, \cos \varphi\} \times \varphi'(t),$

故 $v_r = r'(t),$
 $v_\varphi = r\varphi'(t).$

又 $\mathbf{r}''(t) = [r''(t) - r\varphi'^2(t)] \{\cos \varphi, \sin \varphi\} + [2r'(t)\varphi'(t) + r\varphi''(t)] \times \{-\sin \varphi, \cos \varphi\},$

因此 $w_r = r''(t) - r\varphi'^2(t),$
 $w_\varphi = 2r'(t)\varphi'(t) + r\varphi''(t).$

9 一质点以常速 v 在半径为 r 而圆心在坐标原点的圆周上运动, 证明其加速度为

$$\mathbf{w} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}_0.$$

【证】 圆周方程为

$$\mathbf{r} = r \{\cos \theta, \sin \theta\},$$

于是 $d\mathbf{r} = r \{-\sin \theta, \cos \theta\} d\theta, \quad ds = r d\theta.$

因此

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(s) s'(t) = v \mathbf{r}'(s) \\ &= v \{-\sin \theta, \cos \theta\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \frac{d}{dt} v \{-\sin \theta, \cos \theta\} = v \frac{d}{dt} \{-\sin \theta, \cos \theta\} \\ &= v \frac{d}{ds} \{-\sin \theta, \cos \theta\} \frac{ds}{dt} = v^2 \frac{d \{-\sin \theta, \cos \theta\}}{ds} \\ &= v^2 \frac{\{-\cos \theta, -\sin \theta\} d\theta}{r d\theta} \\ &= -\frac{v^2}{r} \{\cos \theta, \sin \theta\} = -\frac{v^2}{r^2} \mathbf{r}_0. \end{aligned}$$

10 试证圆柱螺线的切线和 z 轴相交成固定的角。

【证】 圆柱螺线的参数方程为

$$\mathbf{r} = \{a \cos \theta, a \sin \theta, b\theta\}, -\infty < \theta < +\infty.$$

于是 $d\mathbf{r} = \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\} d\theta,$

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2} d\theta.$$

因此切线上的单位矢量

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\}.$$

这单位切矢量 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\mathbf{k}$ 间的夹角记为 φ , 于是

$$\cos \varphi = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

因为 a 和 b 都是常数, 故夹角 φ 保持不变。证毕。

11 试证矢径函数 $\mathbf{r}(t)$ 的长度为一固定数的充要条件是 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 。

【证】 必要性 设

$$\mathbf{r}(t) = r \mathbf{r}_0(t),$$

其中 r 为 $\mathbf{r}(t)$ 的模, 且为常数, 而 $\mathbf{r}_0(t)$ 是与 $\mathbf{r}(t)$ 同向的单位矢量。于是

$$\mathbf{r}'(t) = r \mathbf{r}'_0(t).$$

作数量积

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = r \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'_0(t),$$

因 $\mathbf{r}'_0(t)$ 与 $\mathbf{r}_0(t)$ 垂直, 可见 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 。

充分性 设 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ 。由 $\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{r}_0(t)$, 有

$$\mathbf{r}'(t) = r'(t) \mathbf{r}_0(t) + r(t) \mathbf{r}'_0(t).$$

$$\begin{aligned} \text{现} \quad 0 &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [t'(t) \mathbf{r}_0(t) \\ &\quad + \mathbf{r}(t) \mathbf{r}_0'(t)] = t'(t) \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}_0(t) \\ &\quad + \mathbf{r}(t) \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}_0'(t). \end{aligned}$$

因 $\mathbf{r}_0'(t) \perp \mathbf{r}(t)$, 所以上式右端第二项为零。今要求第一项也为零, 可是 $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}_0(t) \neq 0$, 故 $\mathbf{r}'(t)$ 非为零不可。由此可见, $\mathbf{r}(t)$ 为常数, 即 $\mathbf{r}(t)$ 的长度为一固定数。

补 充 题

12 若直线经过点 $P_0(-3, 1, 2)$ 并和矢量 $\mathbf{a} = \{1, 2, -1\}$ 平行, 求直线方程。

【解】 设 $P(x, y, z)$ 为所求直线上的动点, 于是有

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel \mathbf{a} \quad \text{或} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\mathbf{a}.$$

$$\text{而} \quad \overrightarrow{P_0P} = \{x+3, y-1, z-2\},$$

故所求直线的矢量方程为

$$\{x+3, y-1, z-2\} = t\{1, 2, -1\};$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = -3 + t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 2 - t; \end{cases}$$

标准方程为

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

13 设 $\mathbf{r} = \{-a \sin \theta, a \cos \theta, b\}$,

$$\text{求} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') d\theta.$$

【解】 $\mathbf{r}' = \{-a \cos \theta, -a \sin \theta, 0\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{r}' &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin \theta & a \cos \theta & b \\ -a \cos \theta & -a \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \{ab \sin \theta, -ab \cos \theta, a^2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}') d\theta \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \{-ab \cos \theta, -ab \sin \theta, a^2 \theta\} \Big|_0^{2\pi} \\ &= \{0, 0, a^2 \pi\}. \end{aligned}$$

14 已知曲线

$$x = a \sin^2 t, \quad y = a \sin t \cos t, \quad z = a \cos t,$$

(1) 证明这曲线的法平面通过坐标原点;

(2) 找出这曲线上的点, 使过该点的切线平行于平面 $x + z = 4$ 。

【解】 (1) $\mathbf{r} = \{a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t\},$
 $\mathbf{r}' = a \{2 \sin t \cos t, \cos^2 t - \sin^2 t,$
 $\quad -\sin t\}.$

所给曲线的法平面方程为

$$\begin{aligned} \sin 2t(x - a \sin^2 t) + \cos 2t\left(y - \frac{a}{2} \sin 2t\right) \\ - \sin t(z - a \cos t) = 0. \end{aligned}$$

以坐标原点 $(0, 0, 0)$ 代入上式左端, 得

$$\begin{aligned} &-a \sin 2t \sin^2 t - \frac{a}{2} \sin 2t \cos 2t + \frac{1}{2} a \sin 2t \\ &= -a \sin 2t \sin^2 t + \frac{a}{2} \sin 2t (1 - \cos 2t) = 0. \end{aligned}$$

这说明所给曲线的法平面通过坐标原点。

(2) 所给平面 $x + z = 4$ 的法矢量 $\mathbf{n} = \{1, 0, 1\}$ 。

令 $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} = 0,$

即 $2 \sin t \cos t - \sin t = 0,$

$$\sin t (2 \cos t - 1) = 0.$$

由 $\sin t = 0$, 有 $t = 0, \pi$; 由 $\cos t = \frac{1}{2}$, 有 $t = \pm \frac{\pi}{3}$ 。

当 $t = 0, \pi$ 时, 所求的点为

$$(0, 0, a) \text{ 与 } (0, 0, -a);$$

当 $t = \pm \frac{\pi}{3}$ 时, 所求的点为

$$\left(\frac{3}{4}a, \frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a \right)$$

与 $\left(\frac{3}{4}a, -\frac{\sqrt{3}}{4}a, \frac{1}{2}a \right).$

15 试求曲线

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

的垂足曲线。(由坐标原点至曲线的切线所引垂线的垂足之轨迹称为垂足曲线)

【解】 $\mathbf{r} = \{a \cos t, a \sin t, bt\},$

$$\mathbf{r}' = \{-a \sin t, a \cos t, b\}.$$

过坐标原点与 $\mathbf{r}'$ 垂直的矢径记为 $\mathbf{R}$,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \lambda \mathbf{r}' = \{a \cos t - \lambda a \sin t,$$

$$a \sin t + \lambda a \cos t, b\lambda + bt\}.$$