内容简介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”教材七个分册——矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计的题解。除对该教材的习题逐个作了解答之外，还增选了若干补充题并给出了解法或证明。

本书可供高等院校学生和自学工程数学的读者使用，也可供有关科技人员参考。

工程数学题解

杨曙 杨应辰 等编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/32 印张 26 1/2 568千字

1983年10月第一版 1983年10月第一次印刷 印数：00,001—42,000册

统一书号：15034·2566 定价：3.50元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的"工程数学"教材七个分册——矢量分析、复变函数、积分变换、线性代数、计算方法、数学物理方程与特殊函数、概率论与数理统计的题解。编写本题解的目的在于给读者，特别是自学的读者，在解题过程中遇到困难时作个参考，但不希望妨碍读者的独立思考。对该教材中的习题均按原来章次、习题顺序逐个地作了解答。同时，在每章习题后面增选了一些题目并给出解法或证明，供进一步学习参考。

解题的思路和方法是多种多样的。我们编题解时的主要依据是"工程数学"教材中所论述的基本概念、理论与运算方法，以便引导初学的读者去熟悉与掌握这些基本概念、理论和运算方法。因此没有过多地强调解题技巧及编写各种解法。

本书各部分分别由杨曙、李恒沛、王省富、周德润、周肇锡、刘运华、程云鹏、王自果、聂铁军、侯谊、杨应辰、徐明聪、成如翼、李志尧、萧亮壮、谭锐先、林世明、朱燕堂等编写。

水电研究院张之良教授审阅了"数学物理方程与特殊函数"部分的题解；江西工学院水利分院数学教研室曾编过三部分题解并寄赠编者，我们未来得及参考。对这些，我们在此表示衷心感谢。

由于我们水平有限，所给出的解题方法不一定是很好的，并且还可能存在不少缺点或错误，请读者指正。

编　　者

目　　录

矢量分析题解

复变函数题解

积分变换题解

线性代数题解

计算方法题解

数学物理方程与特殊函数题解

数学物理方程

特 殊 函 数

概率论与数理统计题解

矢量分析题解

杨　曙
李恒沛　编

第一章　矢性函数的微分和积分

习　题　一

1　证明方程

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}t$$

确定一直线，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是常矢，$\boldsymbol{B}\neq 0$，t 是参变数。

【证】　$\boldsymbol{r}=\{x,\ y,\ z\}$，$\boldsymbol{A}=\{A_x,\ A_y, A_z\}$，$\boldsymbol{B}=\{B_x, B_y, B_z\}$。于是由 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}t$，有

$$x=A_x+B_xt,\qquad y=A_y+B_yt,\qquad z=A_z+B_zt。$$

这就是以 t 为参变数的空间直线的参数方程，或者消去参数 t，得标准方程：

$$\frac{x-A_x}{B_x}=\frac{y-A_y}{B_y}=\frac{z-A_z}{B_z}。$$

2　求

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})] \text{ 和 } \frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})],$$

其中 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都是 t 的可导函数。

【解】

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})] &=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d}{dt}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\ &=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}\right)\\ &\quad+\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right);\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\frac{d}{dt}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

$$=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}\times\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}\right)$$

$$+\boldsymbol{a}\times\left(\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\right)。$$

3 已知$\boldsymbol{r}=\{t^3+2t,\ -3e^{-2t},\ 2\sin 5t\}$，试求下列各式在$t=0$时的值：

（1）$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$，　（2）$\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|$，

（3）$\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$，　（4）$\left|\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|$。

【解】 $\boldsymbol{r}'(t)=\{3t^2+2,\ 6e^{-2t},\ 10\cos 5t\}$，

$\boldsymbol{r}''(t)=\{6t,\ -12e^{-2t},\ -50\sin 5t\}$。

故 （1）$\boldsymbol{r}'(0)=\{2,\ 6,\ 10\}=2\{1,\ 3,\ 5\}$；

（2）$|\boldsymbol{r}'(0)|=2\sqrt{1+3^2+5^2}=2\sqrt{35}$；

（3）$\boldsymbol{r}''(0)=\{0,\ -12,\ 0\}$；

（4）$|\boldsymbol{r}''(0)|=12$。

4 设$\boldsymbol{a}=\{x^2\sin y,\ z^2\cos y,\ xy^2\}$，求$d\boldsymbol{a}$。

【解】 $d\boldsymbol{a}=\{d(x^2\sin y),\ d(z^2\cos y),\ d(xy^2)\}$

$=\{2x\sin y\,dx+x^2\cos y\,dy,$

$2z\cos y\,dz-z^2\sin y\,dy,\ y^2dx+2xy\,dy\}$。

5 试求圆柱螺线（参考樊映川编：高等数学讲义）

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ b\theta\},\quad -\infty<\theta<+\infty$$

在$\theta=\dfrac{\pi}{2}$时的切线方程。

【解】 $\boldsymbol{r}'(\theta)=\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\}$，

$$r'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\{-a,\ 0,\ b\}。$$

所求切线方程为

$$\frac{x}{-a}=\frac{y-a}{0}=\frac{z-\frac{b}{2}\pi}{b}。$$

6 试求曲线

$$r=\{at,\ bt^2,\ ct^3\}$$

上某一点的切线和法平面。这里 a，b，c 都是常数。

【解】 $$r'(t)=\{a,\ 2bt,\ 3ct^2\},$$

于是所求切线方程为

$$\frac{x-at}{a}=\frac{y-bt^2}{2bt}=\frac{z-ct^3}{3ct^2};$$

法平面方程为

$$a(x-at)+2bt(y-bt^2)+3ct^2(z-ct^3)=0。$$

7 一质点以等速度沿着曲线

$$r=\{a\cos\theta,\ a\sin\theta,\ b\theta\},\quad -\infty<\theta<+\infty$$

运动，求其速度和加速度。

【解】 $$dr=\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\}d\theta,$$

$$(dr)^2=dr\cdot dr=(a^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta+b^2)(d\theta)^2$$
$$=(a^2+b^2)(d\theta)^2。$$

由 $(dr)^2=(ds)^2$，得

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,d\theta。$$

于是速度

$$v=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{ds}\ \frac{ds}{dt}=\frac{v}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\};$$

加速度

$$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(v\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(v\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)\frac{ds}{dt}$$

$$=v^2\frac{d}{ds}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)。\qquad (*)$$

而 $$d\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)=d\left[\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\}\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\cos\theta,\ -a\sin\theta,\ 0\}d\theta,$$

$$\frac{d\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)}{ds}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\cos\theta,\ -a\sin\theta,\ 0\}d\theta}{\sqrt{a^2+b^2}\,d\theta}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\{-a\cos\theta,\ -a\sin\theta,\ 0\}。$$

代入（*）中，求得加速度

$$\boldsymbol{w}=\frac{-av^2}{a^2+b^2}\{\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0\}。$$

8 一质点沿着曲线

$$\boldsymbol{r}=r\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}$$

运动，其中 r、φ 都是时间 t 的函数。（1）求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及与其垂直方向的投影 v_r 和 v_φ，（2）求加速度 w 在同样方向上的投影 w_r 和 w_φ。

【解】 矢径 $\boldsymbol{r}$ 的模为 r，矢径 $\boldsymbol{r}$ 方向上的单位矢量为

$$\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}。$$

与矢径 $\boldsymbol{r}$ 垂直的方向上的单位矢量为

$$\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi\}。$$

现 $$\boldsymbol{r}'(t)=r'(t)\{\cos\varphi,\sin\varphi\}+r\{-\sin\varphi,\cos\varphi\}\times\\ \times\varphi'(t),$$

故 $$v_r=r'(t),$$
$$v_\varphi=r\varphi'(t)。$$

又 $$\boldsymbol{r}''(t)=[r''(t)-r\varphi'^2(t)]\{\cos\varphi,\ \sin\varphi\}+\\ +[2r'(t)\varphi'(t)+r\varphi''(t)]\times\\ \times\{-\sin\varphi,\ \cos\varphi\},$$

因此 $$w_r=r''(t)-r\varphi'^2(t),$$
$$w_\varphi=2r'(t)\varphi'(t)+r\varphi''(t)。$$

9 一质点以常速 v 在半径为 r 而圆心在坐标原点的圆周上运动，证明其加速度为

$$\boldsymbol{w}=-\frac{v^2}{r^2}\boldsymbol{r}。$$

【证】 圆周方程为

$$\boldsymbol{r}=r\{\cos\theta,\ \sin\theta\},$$

于是 $$d\boldsymbol{r}=r\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}d\theta,\quad ds=rd\theta。$$

因此

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}'(s)s'(t)=v\boldsymbol{r}'(s)$$
$$=v\{-\sin\theta,\ \cos\theta\},$$

$$\boldsymbol{w}=\frac{d}{dt}v\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}=v\frac{d}{dt}\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}$$

$$=v\frac{d}{ds}\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}\frac{ds}{dt}=v^2\frac{d\{-\sin\theta,\ \cos\theta\}}{ds}$$

$$=v^2\frac{\{-\cos\theta,\ -\sin\theta\}d\theta}{rd\theta}$$

$$=-\frac{v^2}{r}\{\cos\theta,\ \sin\theta\}=-\frac{v^2}{r^2}\boldsymbol{r}。$$

10 试证圆柱螺线的切线和 z 轴相交成固定的角。

【证】 圆柱螺线的参数方程为

$$\boldsymbol{r}=\{a\cos\theta,\ \ a\sin\theta,\ \ b\theta\},\ -\infty<\theta<+\infty。$$

于是
$$d\boldsymbol{r}=\{-a\sin\theta,\ \ a\cos\theta,\ \ b\}d\theta,$$

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,d\theta。$$

因此切线上的单位矢量

$$\tau=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\{-a\sin\theta,\ \ a\cos\theta,\ \ b\}。$$

这单位切矢量 τ 与 $\boldsymbol{k}$ 间的夹角记为 φ，于是

$$\cos\varphi=\tau\cdot\boldsymbol{k}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}。$$

因为 a 和 b 都是常数，故夹角 φ 保持不变。证毕。

11 试证矢径函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 的长度为一固定数的充要条件是 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$。

【证】 必要性 设

$$\boldsymbol{r}(t)=r\boldsymbol{r}_0(t),$$

其中 r 为 $\boldsymbol{r}(t)$ 的模，且为常数，而 $\boldsymbol{r}_0(t)$ 是与 $\boldsymbol{r}(t)$ 同向的单位矢量。于是

$$\boldsymbol{r}'(t)=r\boldsymbol{r}_0'(t)。$$

作数量积

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=r\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}_0'(t),$$

因 $\boldsymbol{r}_0'(t)$ 与 $\boldsymbol{r}_0(t)$ 垂直，可见 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$。

充分性 设 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=0$。由 $\boldsymbol{r}(t)=r(t)\boldsymbol{r}_0(t)$，有

$$\boldsymbol{r}'(t)=r'(t)\boldsymbol{r}_0(t)+r(t)\boldsymbol{r}_0'(t)。$$

现 $$0=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t)=\boldsymbol{r}(t)\cdot[r'(t)\boldsymbol{r}_0(t)+r(t)\boldsymbol{r}_0'(t)]=r'(t)\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}_0(t)+r(t)\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}_0'(t)。$$

因 $\boldsymbol{r}_0'(t)\perp\boldsymbol{r}(t)$，所以上式右端第二项为零。今要求第一项也为零，可是 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}_0(t)\neq 0$，故 $r'(t)$ 非为零不可。由此可见，$r(t)$ 为常数，即 $\boldsymbol{r}(t)$ 的长度为一固定数。

补 充 题

12 若直线经过点 $P_0(-3,1,2)$ 并和矢量 $\boldsymbol{a}=\{1,2,-1\}$ 平行，求直线方程。

【解】 设 $P(x,y,z)$ 为所求直线上的动点，于是有

$$\overrightarrow{P_0P}\parallel\boldsymbol{a} \quad 或 \quad \overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{a}。$$

而 $$\overrightarrow{P_0P}=\{x+3,\ y-1,\ z-2\},$$

故所求直线的矢量方程为

$$\{x+3,\ y-1,\ z-2\}=t\{1,2,-1\};$$

参数方程为

$$\begin{cases} x=-3+t, \\ y=1+2t, \\ z=2-t; \end{cases}$$

标准方程为

$$\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}。$$

13 设 $\boldsymbol{r}=\{-a\sin\theta,\ a\cos\theta,\ b\}$，

求 $$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')d\theta。$$

【解】 $$\boldsymbol{r}'=\{-a\cos\theta,\ -a\sin\theta,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}'=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -a\sin\theta & a\cos\theta & b\\ -a\cos\theta & -a\sin\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\{ab\sin\theta,\ -ab\cos\theta,\ a^2\}。$$

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r}')d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\{-ab\cos\theta,\ -ab\sin\theta,\ a^2\theta\}\Big|_0^{2\pi}$$

$$=\{0,\ 0,\ a^2\pi\}。$$

14　已知曲线

$$x=a\sin^2 t,\quad y=a\sin t\cos t,\quad z=a\cos t,$$

（1）证明这曲线的法平面通过坐标原点；

（2）找出这曲线上的点，使过该点的切线平行于平面 $x+z=4$。

【解】（1）$\boldsymbol{r}=\{a\sin^2 t,\ a\sin t\cos t,\ a\cos t\}$,

$$\boldsymbol{r}'=a\{2\sin t\cos t,\cos^2 t-\sin^2 t,\ -\sin t\}。$$

所给曲线的法平面方程为

$$\sin 2t(x-a\sin^2 t)+\cos 2t\left(y-\frac{a}{2}\sin 2t\right)-\sin t(z-a\cos t)=0。$$

以坐标原点（0，0，0）代入上式左端，得

$$-a\sin 2t\sin^2 t-\frac{a}{2}\sin 2t\cos 2t+\frac{1}{2}a\sin 2t$$

$$=-a\sin 2t\sin^2 t+\frac{a}{2}\sin 2t(1-\cos 2t)=0。$$

这说明所给曲线的法平面通过坐标原点。

（2）所给平面 $x+z=4$ 的法矢量 $\boldsymbol{n}=\{1,0,1\}$。

令
$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

即
$$2\sin t\cos t-\sin t=0,$$
$$\sin t(2\cos t-1)=0。$$

由 $\sin t=0$，有 $t=0,\pi$；由 $\cos t=\frac{1}{2}$，有 $t=\pm\frac{\pi}{3}$。

当 $t=0,\ \pi$ 时，所求的点为
$$(0,\ 0,\ a)\text{ 与 }(0,\ 0,\ -a)；$$

当 $t=\pm\frac{\pi}{3}$ 时，所求的点为
$$\left(\frac{3}{4}a,\ \frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{1}{2}a\right)$$

与
$$\left(\frac{3}{4}a,\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a,\ \frac{1}{2}a\right)。$$

15 试求曲线
$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=bt$$
的垂足曲线。（由坐标原点至曲线的切线所引垂线的垂足之轨迹称为垂足曲线）

【解】
$$\boldsymbol{r}=\{a\cos t,\ a\sin t,\ bt\},$$
$$\boldsymbol{r}'=\{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\}。$$

过坐标原点与 $\boldsymbol{r}'$ 垂直的矢径记为 $\boldsymbol{R}$，
$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{r}'=\{a\cos t-\lambda a\sin t,$$
$$a\sin t+\lambda a\cos t,\ bt+\lambda b\}。$$