高等学校教学参考书

机械设计中的有限元法

许尚贤 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

机械设计中的有限元法

许尚贤 编

高等教育出版社

内 容 提 要

本书以常用机械零、部件为对象，阐述有限元法及其程序设计的基本理论和方法，并介绍一些在机械设计中实用的有限元程序以及大型通用结构分析程序 SAP 5。第一章以轴的有限元静力分析为例，给读者对有限元法及其程序设计有一个初步的但是完整的概念。第二章采用最基本的三节点三角形单元，全面讨论平面问题有限元法的基本理论和程序设计技巧，以齿轮为例。第三章介绍实用的等参单元基本概念及其计算特点以及有限元网格的自动形成。第四章讨论机械设计中常见的轴对称问题有限元法。第五章介绍滑动轴承和稳定温度场的有限元分析和计算。第六章以轴的有限元动力分析为例，扼要讨论动力分析的有限元法。最后还附有必要的先修知识和SAP 5大型有限元程序简介。

本书可作为高等工业学校机械设计课程的教学参考书或选修课教材，对从事机械设计工作的教师和工程技术人员也是一本有价值的参考书。

（京）112号

高等学校教学参考书

机械设计中的有限元法

许尚贤 编

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省涞水县印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张 13 字数 320 000

1992年 7月第 1版 1992年 7月 第 1 次印刷

印数 0001—3 456

ISBN 7-04-003230-9/TH·250

定价 7.95 元

前言

60年代以来，由于电子计算机的迅速发展，有限元法在工程上获得了广泛的应用。它首先在力学范畴，进而渗透到工程技术各个领域中，是一种十分有效的通用数值计算方法。它既有数学理论，又有程序设计技巧。现在很多高等学校为本科生和研究生开设了“有限元法”课程。目前出版的这方面书籍往往侧重于力学、传热学或针对某些专业机械，对于从事机械设计的大学生、研究生和工程技术人员来说，急需一本以机械零、部件为对象，既讲理论，又讲程序设计的参考书。书的内容特别要侧重于机械零、部件有限元模型的建立和从机械工程的角度出发，对计算结果的分析研究，使读者对机械设计中有限元法的基本理论、程序设计和具体应用有一个较全面完整的了解和掌握，达到不仅能自行编制一些机械设计中专用的有限元程序，而且能够学会在机械设计中直接调用大型通用有限元程序进行计算的目的。

基于上述精神，本书的主题是在阐述有限元法及其程序设计的基本理论和方法的同时，强调有限元法在机械设计中的应用。因此，本书以常用机械零、部件为对象，既要从教学角度讲清有限元法及其程序设计的基本理论和方法，又要介绍一些用于机械零、部件设计中的实用有限元程序，特别是从机械工程角度来阐明一些基本思想和概念。为此，首先第一章以轴的有限元静力分析(一维问题)为例，给读者对有限元法及其程序设计有一个初步的但是完整的概念。然后，第二章以齿轮为例(二维问题)，从教学角度出发，采用最基本的三节点三角形单元，全面介绍平面问题有限元法的基本理论和程序设计技巧。接着，第三章从实用角度出发，介绍矩形单元以及大型通用有限元程序采用的等参单元

的基本概念及其计算特点，并对不同单元类型进行分析比较。鉴于有限元法的巨大工作量是输入原始数据，所以本书介绍了有限元网格的自动形成。由于机械零、部件常为回转体，所以第四章介绍轴对称问题的有限元法。为了将有限元法从固体力学领域推广应用到流体力学、热力学等连续介质或场问题这类工程技术领域，第五章进一步介绍滑动轴承和稳定温度场的有限元分析和计算。最后，第六章以轴的有限元动力分析为例，对目前大家十分关心的动力分析作了扼要的介绍。在附录中还提供了为学习本书必须具备的有关矩阵、变分法和弹性力学的基本知识以及大型通用结构分析程序SAP 5 的简介。这样，学完本书后，使读者对机械设计中有限元法的基本理论、程序设计和具体应用能有一个比较全面完整的了解和掌握，不仅能自行编制一些机械设计中专用的有限元程序，而且能够在机械设计中直接调用大型通用程序SAP5。因此，本书不同于一般的有限元法书籍，是一本结合机械设计，阐述有限元法理论、程序和应用相结合的教学参考书或选修课教材，对一般从事机械设计的科技工作者，本书也是一本有价值的参考书。

全书承纪名刚教授审阅，提出了很多宝贵意见，谨在此表示衷心感谢。由于编者水平和经验所限，书中难免有不少缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

许尚贤

于东南大学

1990年 3 月

目　录

第一章 绪 论

§1-1 概 述

有限元法① 是最近二三十年发展起来的一种有效的通用计算方法，它既包括有数学理论，又包括有程序设计技巧。这种方法首先在固体力学范畴，而后在工程技术各个领域中得到了广泛的应用。众所周知，从数学角度来看，一个工程问题往往可以用一个偏微分方程来描述，但是常常很难求得精确的解析解。50年代开始，随着电子计算机的应用，有限元法作为一种数值分析工具，借助于高速电子计算机的配合，使得以前这类难以处理的工程技术问题都可能获得一个近似的计算机解。因此，有限元法引起了工程师和科学家的极大兴趣。现在，它已经被公认是一种有效的数值计算方法，被广泛应用于固体力学、流体力学、热传导以及电磁学等连续介质或场问题这类工程技术领域。在机械设计中，从齿轮、轴、轴承等通用零、部件到机床、汽车、飞机等复杂结构件的应力和变形分析(包括热应力和热变形分析)，采用有限元法计算，都可以获得一个足够精确的近似解来满足工程上的要求。

有限元法分析的思想可以追溯到更早一些时候，1943年R. Courant首先提出离散化概念——将一个原来是连续的整体剖分(离散)成为有限个分段连续单元的组合，并第一次尝试应用三角形单元的分片连续函数来求解扭转问题。50年代，有限元法首先用于飞机设计中，1956年M. J. Turner和R. W. Clough等人用矩阵法对飞机结构进行了受力和变形分析，应用当时出现的数字计算机，第一次给出了用三角形单元求得复杂平面应力问题

---

① 英文是Finite Element Method，简称FEM。

的解。1960 年 R. W. Clough 首次提出"有限元"这个名词，有限元法作为一种数值分析方法正式出现于工程技术领域。

有限元法的第一个黄金时期开始于 60 年代初，当时，将一个连续体离散化为有限个单元组合体的这种有限元的概念开始在工程界流行，G. N. White 和 K. O. Friedrichs 采用了规则的三角形单元，从变分原理出发来求解微分方程式。1963 年 J. F. Besseling 等人认识到有限元法是里兹法的另一种形式，并且证实了它是处理弹性连续介质问题的一种通用方法，此后有限元法才开始巩固其地位。1965 年 O. C. Zienkiewicz 等发表了有限元法可以应用于所有能按变分形式计算的场问题，这就使有限元法得到了更广泛的应用。

随着有限元法在工程界和物理界日益流行，较多的应用数学家有兴趣对这个方法给予严格的数学论证，使有限元的第二个黄金时期大约于 1968 年开始。当时，他们发表了很多关于有限元法的数学文献，论证有限元法的基本原理是逼近论，是偏微分方程及其变分形式和泛函分析的结合，并致力于估计各种单元类型离散化的误差、收敛速度和稳定性。

从数学角度来看，有限元法是将一个偏微分方程化成一个代数方程组，利用计算机求解。大家知道，电算和手算不同，它不适合用于零敲碎打的算法，而要求系统化的计算程序，由于电子计算机的运算速度极快，它特别适合多次重复迭代的算法。为了应用电算的这个特点来求解线性方程组，有限元法广泛采用矩阵算法，它在大量运算中显示出巨大优点。因此可以说，有限元法的发展借助于两个重要的工具：在理论推导中采用了矩阵方法，在实际计算中使用了电子计算机。

1960 年以后，有限元法在工程上获得了广泛的应用。它作为分析飞机复杂结构的一个有效方法首先应用于航空工业部门；随后，迅速推广到造船、建筑、机械等各个工业部门。中国科学院冯

康教授早在六七十年代在设计水坝中就应用了有限元法，独立地发展了有特色的数学理论基础。近年来，随着引进SAP①、NASTRAN② 等一些大型通用的有限元程序，国内有限元法的研究和应用获得了迅速的发展。随着计算机的普及和应用，可以预料，作为通用的一种数值计算方法，有限元法将会被广大工程技术人员所采用。

§ 1-2 一维问题的有限元静力分析

什么是有限元法？它是怎样进行计算的？为什么它能获得如此迅速的发展？这要从工程问题的需要和有限元法的本质谈起。

工程上很多问题可以列出其微分方程和边界条件，但是很难求出精确的解析解。例如图 1-1 所示的变截面悬臂梁轴，在自由端

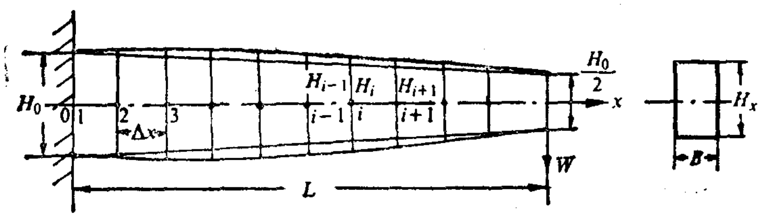


图 1-1 变截面悬臂梁轴

处作用垂直载荷W，梁的横剖面为矩形，其宽度B不变，而高度H_x是距离 x 的函数$H_x=f(x)$，从固定端的H_0变化到自由端的$\frac{H_0}{2}$。这类轴的静力分析是求沿 x方向各剖面的挠度 $v(x)$和转角$\theta(x)$，显然，它们只是一个变量x 的函数，为最简单的一维问题。

① Structure Analysis Program 的缩写。

② National Aeronautics and Space Administration Structural Analysis 的缩写。

由材料力学弯曲理论可知，距离固定端 x 处的弯矩 N 为

$$N = EI\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = W(L-x) \tag{1-1}$$

式中，v 为垂直位移（挠度），I 为剖面的惯性矩，对于矩形剖面，$I=\frac{BH^3}{12}$。这是一个微分方程式，其边界条件为

$$\begin{cases} v|_{x=0} = v(0) = 0 \\ \theta|_{x=0} = \left.\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = \theta(0) = 0 \end{cases} \tag{1-2}$$

因为剖面高度 H_x 随距离 x 的函数 $f(x)$ 不是简单的线性关系，所以很难求出微分方程式(1-1)的精确解析解。

对于支承在前后轴承上的传动轴（图 1-7，a），上面装有齿轮和带轮，传递动力，其简化的力学模型如图 1-7，b 所示。确定载荷和支承反力后，也能列出类似式(1-1)的微分方程和式(1-2)的边界条件，当轴的剖面直径不同时，也难求出精确的解析解。

又如图 5-3 所示的滑动轴承中，封油边上油膜压力 $p(x、z)$ 是变量 x 和 z 的函数，为二维问题，它由著名的雷诺方程式(5-34)来描述，这是一个二阶二维偏微分方程，边界条件如式(5-36)和(5-37)所示，也很难求出精确的解析解。

再如，我们可能需要求出具有一些加强肋和奇特形状孔的机床床身的承载能力和热变形，这是一个三维空间问题。利用弹性力学知识，虽然可以写出基本的应力应变方程和边界条件，但是随即可以看出不可能找到简单的解析解。

从以上例子中发现，困难在于零件的几何形状或者流体场等问题的某些特征是不规则的或者“任意的”，因而很难找出整个求解域中的位移或者压力的分布曲线，也就是说，这类问题很难求得解析解，而这类问题正是需要设计师去解决的实际问题。

过去常用的一种解决办法是作简化假设，回避难点，把问题简

化为一个能够处理的类型，这样，虽然往往会导致不太准确的答案，但至少可供参考，有时是可行的。例如图 1-1 所示的实例，若简化假设为剖面高度 H_x 沿轴向（x 方向）按直线变化，即

$$H_x=f(x)=H_0\left(1-\frac{x}{2L}\right) \tag{1-3}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}=v''(x)&=\frac{W}{EI_0}(L-x)\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-3}\\&=\frac{WL}{EI_0}\left[2\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-2}-\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-3}\right]\end{aligned} \tag{1-4}$$

式中，$I_0=\frac{BH_0^3}{12}$。

积分可得

转角 $\theta(x)=v'(x)=\frac{WL^2}{EI_0}\left[4\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-1}-\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-2}\right]+A_1$

垂直挠度 $v(x)=\frac{WL^3}{EI_0}\left[-8\ln\left(1-\frac{x}{2L}\right)-2\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-1}\right]+A_1x+A_2$

积分常数 A_1 和 A_2 由边界条件式(1-2)求出，为

$$A_1=-3\frac{WL^2}{EI_0} \quad 和 \quad A_2=2\frac{WL^3}{EI_0}$$

从而得

$$\theta(x)=\frac{WL^2}{EI_0}\left[4\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-1}-\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-2}-3\right] \tag{1-5}$$

$$v(x)=\frac{WL^3}{EI_0}\left[-8\ln\left(1-\frac{x}{2L}\right)-2\left(1-\frac{x}{2L}\right)^{-1}-\frac{3x}{L}+2\right] \tag{1-6}$$

式(1-6)就是整个悬臂梁轴的挠度函数，它只能在式(1-3)所示的特定条件下才能求得，即假设为"锥形"变截面悬臂梁轴，根据式(1-3)才能凑得式(1-4)的。如果不按直线变化的式(1-3)，即不是"锥形"变截面而是"桶形"变截面梁轴的话，就无法找到整个悬臂梁轴的挠度函数 $v(x)$ 解析表达式(1-6)，也就无法求得精确的解析解。

举例来说，若图 1-1 所示的悬臂梁轴，已知 $L=5$ m，$B=0.1$m，$H_0=0.3$ m，载荷 $W=10$ kN，轴的材料为钢，其弹性模量 $E=208$ GN/m^2，欲求自由端($x=L$)的垂直挠度 $v(L)$ 和转角 $\theta(L)$ 的话，我们可以根据式(1-5)和(1-6)，不难求得

$$v(L)=0.1456\times10^{-1}\text{m 和 }\theta(L)=0.5342\times10^{-2}\text{rad}$$

虽然它们不是图 1-1 所示"桶形"变截面梁轴的精确值，只要"锥形"与"桶形"的形状接近，上述结果数据还是可供参考的。

在广泛应用电子计算机的今天，另一种解决办法是保留问题的复杂性，尝试寻求近似的数值解。最常用的一种数值分析方法是人们所熟知的有限差分法①。如图 1-1 所示，将整个连续体(悬臂梁轴)划分成规则的差分网格(一般取等步长)，用差分代替微分，将微分方程式(1-1)离散为差分方程。设等步长划分为 n 格，则步长 $\Delta x=\dfrac{L}{n}$，第 i 个节点的坐标 $x_i=(i-1)\Delta x=\dfrac{L}{n}(i-1)$，($i=1$，2，…，$n+1$)。现在考虑其前后三个连续的节点 x_{i-1}、x_i 和 x_{i+1}，节点挠度分别为 v_{i-1}、v_i 和 v_{i+1}。

在 $x=x_i+\dfrac{\Delta x}{2}$ 处的一阶导数

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=x_i+\frac{\Delta x}{2}}\approx\left.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|_{x=x_i+\frac{\Delta x}{2}}=\frac{v_{i+1}-v_i}{\Delta x}$$

① 英文是 Finite Difference Method，简称 FDM。

同理，在 $x=x_i-\dfrac{\Delta x}{2}$ 处的一阶导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i-\frac{\Delta x}{2}}\approx\frac{v_i-v_{i-1}}{\Delta x}$$

则在 $x=x_i$ 处的二阶导数为

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_i}=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{x=x_i}\approx\frac{\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i+\frac{\Delta x}{2}}-\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{\Delta x}\right)-\left(\frac{v_i-v_{i-1}}{\Delta x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

所以，微分方程式(1-1)的差分形式为

$$v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}=W_i$$

即
$$v_i=\frac{1}{2}(v_{i+1}+v_{i-1}-W_i)\quad(i=2,3,\cdots,n)\tag{1-7}$$

式中，$W_i=W(x_i)=\dfrac{W}{EI_i}L\left(1-\dfrac{i}{n}\right)\left(\dfrac{L}{n}\right)^2$，

$$I_i=\frac{BH_i^3}{12},\quad H_i=f(x_i)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \text{\Large 0} & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & & & \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -W_1 \\ -W_2 \\ \vdots \\ -W_{n+1} \end{bmatrix}\tag{1-7$'$}$$

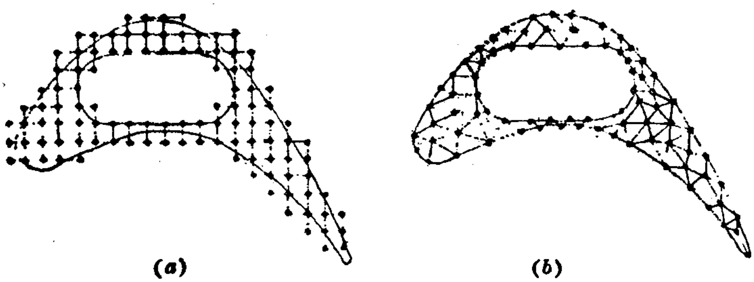
式(1-7)表明第 i 节点的挠度 v_i 可以用其相邻节点的挠度 v_{i-1} 和 v_{i+1} 来表示，是一个线性代数方程组，边界条件为

$$\begin{cases} v_1 = v_i \big|_{i=1} = 0 \\ \theta_1 = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\Big|_{i=1} = \dfrac{v_2 - v_1}{\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{1-8}$$

因此，只要先假设悬臂梁轴各节点的初始位移值，利用迭代技术，就可以求解出轴上各节点处挠度 v_i 的近似值，进而不难根据差分定义 $\theta_i = \dfrac{v_i - v_{i-1}}{\Delta x}$，求出各节点处转角 θ_i 的近似值了。

有限差分法所推导的差分方程式(1-7)是对基本微分方程式(1-1)的逐点近似。求解域划分成较多的节点时，可获得工程上所要求的计算精度。

不过，有限差分法难以适应不规则的几何形状和复杂的边界。例如，图 1-2 所示涡轮叶片的横剖面，由于叶片内部的冷却通道以



(a)——典型的有限差分法模型；(b)——典型的有限元法模型

图 1-2　涡轮叶片横截面的离散化

及叶片的外形轮廓要求，几何形状是复杂的。为了求出在给定载荷作用下的应力分布和温度分布，对于这样一个二维问题，如图 1-2，*a* 所示，采用有限差分法求解时，在整个叶片横剖面上划分成均匀规则的直角差分网格，但是边界变成了阶梯形，显然不能和实际边界吻合，误差较大。此时，有限元法显示出极大的优越性，如图 1-2，*b* 所示，有限元法不像有限差分法那样把求解域划分成网

格点有规则的排列，而是把求解域划分成许多有限个小的、互相在节点处连接的子区域或称单元，这些单元的形状和大小是任意的（最简单的二维单元当然是三节点三角形单元），从而用这样一组离散的单元组合体来代替和逼近求解域，实现对基本微分方程的分片近似。由于单元的形状和疏密程度可以任意安排，因而可用较少的节点和单元对求解域提供一个较好的近似，又因为采用三角形单元时，曲线边界为一系列直线所代替，显然比有限差分法的阶梯线能更好地逼近曲线边界。这个例子并不企图说明在所有问题中有限元法都比有限差分法好，只想说明有限元法特别适合于具有复杂几何形状和边界条件的问题。事实上，对于求解域边界方正和内部单一的简单情况，有限差分法（特别采用不等步长的话）可以获得与有限元法同样良好的效果，而且计算过程简单，计算时间短得多。只有几何形状和边界条件复杂的工程问题，有限元法才显示出巨大的优越性。

让我们回到图 1-1 所示变截面梁轴受弯曲的实例，详细地讨论有限元法是怎样进行运算的。

（一）连续体的离散化

图 1-1 所示的悬臂梁轴是一个弹性连续体，可以看成由无限个质点组成，沿 x 方向的质点垂直位移 $v(x)$ 是坐标 x 的函数，所以具有无限多的值，这是一个具有无限个未知量的问题。采用有限元法，就是将该轴任意划分成有限个单元①，如图 1-3 所示。由于本例是一维问题，只需采用杆单元②，图中只划分成 10 个杆单元，每个杆单元有两个节点③ i 和 j（见图 1-4），共 11 个节点。把连续体转化成由这些有限个单元组成的集合体，相邻单元之间只在节点处互相连接在一起，传递力和位移，这一过程称为离散化。

---

① 有限元法的名词由来。

② 也称为梁单元，或者直线单元。

③ 也称为结点。

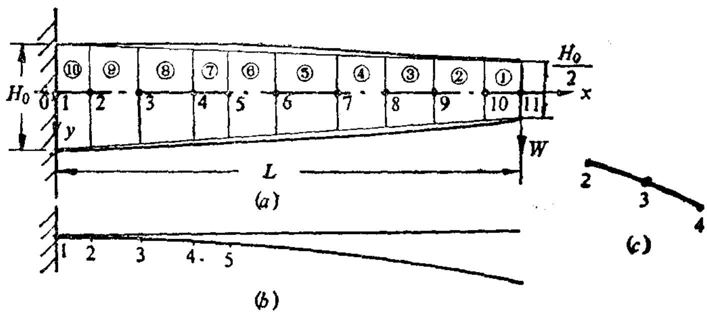
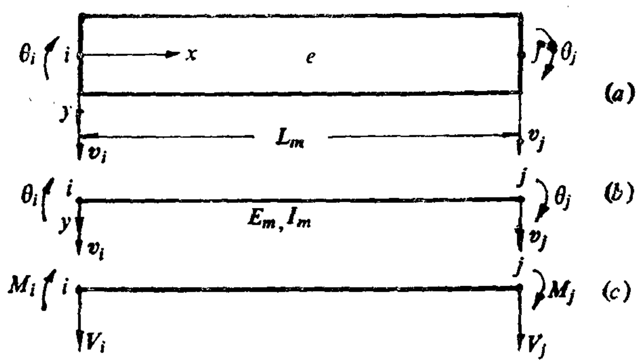


图 1-3　变截面悬臂梁轴的有限元模型及挠度曲线



(a)——一个典型杆单元；(b)——位移 v 和转角 θ；(c)——力 V 和力矩 M

图 1-4　典型杆单元

应该强调指出，有限元法的单元可以任意划分。划分单元后，应将单元和节点编号，如图 1-3 中所示，单元号用①、②、···表示；节点号用 1、2、···表示。

（二）单元分析

图 1-3 中一个典型的杆单元 e 如图 1-4，a 所示，单元长 L_m，因为单元很小，可以近似认为是等截面梁，其弹性模量为 E_m，剖面二次矩为 I_m，并承受纯弯曲。单元节点为 i 和 j，取 x 轴沿中