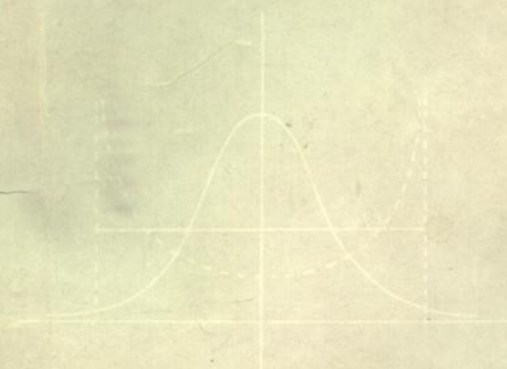


实验误差估计与数据处理

(兼谈电子计算机语言程序)

肖明焱



中国科学院计算所

1578

51.817
290
C.2

序 言

一九七七年，国务院颁发了《中华人民共和国计量管理条例（试行）》，进一步有力地推动了全国计量工作的发展。计量科学技术发展的趋势，必然对实验误差估计与数据处理的要求越来越高，因为，误差理论是计量科学、检定工作和其它科学实验的技术基础理论之一。在计量基准、标准的研究中，误差分析和估计常常占有相当的比重，而计量仪器的设计、生产、评定、计量等也都离不开误差理论的指导，故而，国家标准计量局曾根据各地举办误差学习班的要求，数次通知了我们要在学习班上作关于误差理论与数据处理的中心发言。这一工作得到我院有关领导的支持，因而，使作者获得了良好的交流和征求意见的机会。

误差研究工作不断地受到院内外许多同志的关心、鼓励和帮助。去年九月在无锡市，由我院召开的“全国误差与数据处理学术座谈会”就是生动的一例。有许多同志主动为作者寄送资料和文献，热情讨论，提供算例和表演实验，力促误差工作的发展。计量工作中的这些交流活动繁荣了误差的学术讨论，使得我们在现今国际、国内都还有分歧的误差名词和合成方法上有可能在“统一性”的方向上迈出了乐观的一步。

现今计量科学正朝向数字化、自动化、快速化和国际

交流的方向发展着，误差名词和估计要适应这种客观形势的需要。本书根据计量科学和检定以及其它实验中常见的误差共性问题，收入了长、热、力、电、时、放等十大计量中的各方面最常用的算例，力求深入浅出，简明适用，适应面广。但因能力有限，虽经74年以来的误差《讲义》修改多次，缺点还可能不少，希望通过交流后，能多提些意见，帮助作者修改、完善，以便能更好地为祖国的三大革命和四个现代化服务！

让我们团结在以华主席为首的党中央周围，在不同的工作岗位上，为我国的计量事业作出贡献！

肖明耀 1978年于
中国计量科学研究院

目 录

第一章	误差的概念与表示	(1)
第一节	误差公理与研究意义	(1)
第二节	误差定义	(2)
	绝对误差, 相对误差, 分贝误差, 引用误差。	
第三节	误差源	(11)
	装置误差, 环境误差, 人员误差, 方法误差。	
第四节	误差的分类	(13)
	系统误差, 随机误差, 粗差。	
第五节	精 度	(17)
	准确度, 正确度, 精密度。	
第二章	无系差实验与误差的简单估计	(19)
第一节	系统误差的一般消除方法	(19)
第二节	系统误差的特殊消除方法	(24)
第三节	重复性、稳定性与实验结果的精密度	(26)
第四节	随机不确定度的精确估计	(36)
第五节	标准差的若干不同算法	(39)
第六节	线性修正值的实验确定及其误差估计	

		(40)
	折线法、平均点法、最小二乘法。	
第七节	全组合比对时严格而简易的计算.....	(47)
第三章	概率分布与误差原理.....	(54)
第一节	同条件下多次测量与随机误差特性.....	(54)
第二节	统计直方图.....	(58)
第三节	概率分布.....	(59)
	正态分布, 均匀分布, 反正弦分布。	
第四节	概率计算与方差.....	(63)
第五节	t 分布原理.....	(74)
第六节	小 结.....	(78)
第七节	算术平均值公理与最小二乘原理.....	(80)
第四章	随机误差对结果的影响	
	——方差或标准差的传递.....	(85)
第一节	问题的提出.....	(85)
第二节	几个简单关系的传递公式.....	(87)
	倍数, 和差, 相关系数。	
第三节	线性关系.....	(92)
第四节	非线性函数.....	(97)
第五节	误差传递公式的应用.....	(100)
	数据合理处理, 误差分配, 测量设计, 最佳实验条件, 限差。	
第六节	权与不等权测量.....	(107)
第五章	系统误差对结果的影响.....	(116)
第一节	系统误差的表达.....	(116)
第二节	系统误差的表现形式.....	(117)

第三节	恒定系差的估计.....	(119)
第四节	可变系差的一般研究方法.....	(124)
第六章	实验误差的合成.....	(127)
第一节	一般原则.....	(127)
第二节	误差合成.....	(128)
	已定系差, 随机不确定度, 系统不确定度, 总的不确定度, 准确度。	
第三节	举 例.....	(140)
第四节	简单评论.....	(145)
第七章	有效数字计算与结果的表示.....	(147)
第一节	数字舍入原则.....	(147)
第二节	有效数字.....	(148)
第三节	有效数字运算规则.....	(150)
第四节	最后结果的表示.....	(152)
第八章	坏值及其剔除.....	(154)
第一节	拉依达准则.....	(154)
第二节	肖维勒准则.....	(156)
第三节	格拉布斯准则.....	(158)
第四节	t 检验(罗马诺夫斯基)准则.....	(159)
第五节	狄克逊准则.....	(161)
第九章	最小二乘法.....	(164)
第一节	原理与公式.....	(164)
第二节	经典最小二乘法公式.....	(168)
第三节	矩阵有关知识.....	(176)
第四节	矩阵最小二乘法公式.....	(180)
第五节	举 例.....	(186)

第六节	电子计算机通用程序.....	(192)
第十章	随机过程的误差.....	(198)
第一节	随机过程及其特征.....	(198)
第二节	平稳随机过程.....	(202)
第三节	谱.....	(204)
第四节	作用在线性系统的随机过程.....	(212)
第五节	在频率稳定度中的应用——阿伦方差	(214)
第十一章	电子计算机源程序编制初步.....	(219)
第一节	算题与程序.....	(220)
第二节	程序的多样性与通用化.....	(224)
第三节	几点注意.....	(230)
第四节	操作与结果.....	(232)
附 录		(233)
	算法语言86个基本符号及其意义, 标准函数 符及其意义, 输入与输出语句及其意义, 源 程序的基本结构及其意义, 希腊字母与英文、 译音对照, 电传编码与字符对照。	
	——参考资料.....	(246)

第一章 误差的概念与表示

第一节 误差公理与研究意义

1. 误差公理

对自然界所发生的量变现象的研究，常常需要借助于各式各样的实验与测量来完成。由于被测量的数值形式常是不可通约的（不能以有限位数表示），又由于认识能力的不足和科学水平的限制，实验中测得的值和它的真实值并不一致，这种矛盾在数值上的表现即为误差。随着科学水平的提高和人们的经验、技巧、专门知识的丰富，误差可以被控制得愈来愈小，但是不能使误差降低为零，误差产生的必然性，已为实践所证实，也为一切从事科学实验的人们所公认，由此，下列重要的误差公理成立，即

误差公理：实验结果都具有误差，误差自始至终存在于一切科学实验的过程之中。

2. 研究意义

误差之所以上升到理论研究，这是因为：

①人们所进行的实验与测量，目的在于研究自然界中所发生的量变现象，借以认识我们周围所发生的客观过程，从而能动地改造客观世界，而误差常常会歪曲这些客观现象，我们要正确认识不以人们意志为转移的客观过程的规律，有效地为人民服务，就必须分析实验测量时产生的误差的原因

和性质，正确处理数据，以消除、抵偿和减弱误差。

②在计量科学和实验工作中，必须保证量值的统一及正确传递。提供物理量单位的计量基准、标准的研究成果，技术革新中的仪器、仪表的性能和质量，科学实验中的数据等，它们的质量是否过硬，怎样正确使用，还决定于实验研究的理论和误差分析是否正确。

③误差理论可以帮助我们正确地组织实验和测量，合理地设计仪器，选用仪器及选定测量方法，使我们能以最经济的方式获得最有利的结果。

误差理论的建立和发展同其它理论一样，都是遵循“实践—理论—实践”的发展规律的，“社会实践中的发生、发展和消灭的过程是无穷的，人的认识的发生、发展和消灭的过程，也是无穷的。”实验和测量工作是在不断发展的，是无止境的，误差理论的发展也是同样的情况，它有待于一切从事实验科学工作的同志的不断地变革和发展。

第二节 误差定义

1. 绝对误差

某量值的误差定义为该量的给出值（包括测量值、标称值、预置值、示值、近似值等要研究和给出的非真值）与其客观真值之差，即

$$\text{误差} = \text{给出值} - \text{真值} \quad (2.1)$$

例如：真值为102毫米的量块，测得为103毫米，则测量值103毫米的误差为1毫米；真值为6.42微安的电流，在微安

表的示值为6.34微安，则微安表的示值6.34微安的误差为-0.08微安；标称值为100千赫的晶体振荡器，其实际输出的真实频率值为99.999千赫，则标称值100千赫的误差为1赫；电阻箱预置的电阻值为110欧，其真值为115欧，则预置值110欧的误差为-5欧； π 的近似值取3.14时，其误差约为-0.0016；等等。

公式(2.1)中的给出值包括了测量值、示值、标称值、预置值，计算近似值等，它是我们要研究的对象。某量值的误差是指该量给出值的误差，如果一个量没有给出值，也就无法谈及它的误差大小。

什么是真值？自然界中的一切物体都是处于永恒的运动中，而被测量的真值的确定，是假设在一定的时间内，实际上不变的被测量的真正大小。此外，还有一些人为的规定，例如，量块两平行端面的几何长度表征量块的长度，但在精密测量中发现，无论量块的端面研磨的如何精细，也不能保证端面没有起伏或两端面绝对平行，因此，量块两端面间的距离各处就不相等，这时，人们又规定量块两端面对角线中心的垂直连线（或其它规定）之长度表征量块的长度，在某一极短的时间间隔内，量块具有稳定的、实际的长度，就是该瞬间量块的真值，所以，真值具有时间和空间的含义。由此，可以定义如下：

真值：在某一时刻和某一位置或状态下，某量的效应体现出的客观值或实际值。

一般说来，真值是未知的，因此真误差也就未知，有些情况真值是可以知道的，又有些情况从相对的意义来说也是知道的。

真值可知的情况有如下几种:

①理论真值: 例如, 平面三角形三角之和恒为 180° ; 同一量值自身之差为零自身之比为1, 等等。

②计量学约定真值: 国际计量大会决议

(A)长度单位——米的长度等于氪86原子的 $2p_{10}$ 和 $5d_5$ 能级之间跃迁的辐射在真空中波长的1650763.73倍。

(B)质量单位——铂铱合金的国际千克原器为一公斤。

(C)时间单位——秒是铯133原子基态的二个超精细能级之间跃迁的辐射周期的9 192 631 770倍的持续时间。

(D)电流强度单位——安培是一个恒定的电流强度, 若保持在真空内相距1米的两无限长的圆截面较小的平行直导线内。这电流在这两导线之间每米长度上产生的力等于 2×10^{-7} 牛顿。

(E)热力学温度单位——开尔文是水三相点热力学温度的 $1/273.16$ 。

(F)发光强度单位——坎德拉是在101325牛顿每平方米压力下, 处于铂凝固温度的黑体的 $1/600000$ 平方米表面在垂直方向上的发光强度。

(G)物质的量单位——摩尔是一物系的物质的量、该物质中所包含的结构粒子数与0.012千克碳12的原子数目相等。

凡满足以上条件复现出的量值都是真值。

③标准器相对真值: 高一级标准器的误差与低一级标准器或普通仪器的误差相比, 为其 $1/5$ (或 $1/3 \sim 1/20$)时, 则可以认为前者是后者的相对真值。例如, 一个高稳定度晶

体振荡器输出的频率，相对于普通频率计的频率言是真值。铂电阻温度计复现的温度值相对于普通温度计指示的温度值言是真值，等等。

例1：测得某三角块的三角之和为 $180^{\circ} 00' 03''$ ，则该三角之和的误差为 $+3''$ 。

例2：测得A、B、C三个标准灯的光强比分别为 $A/B = \alpha$ ， $B/C = \beta$ ， $C/A = \gamma$ ，三个测量值之积的真值为1，故三个测量之积的误差为 $\alpha\beta\gamma - 1$ 。

例3：用二等标准活塞压力计测量某压力，得值 1000.2 公斤力/厘米²，该压力用更准确的方法测得为 1000.5 公斤力/厘米²，设后者可视为相对真值，则二等标准活塞压力计测量值的误差为 -0.3 公斤力/厘米²。

例4：今用一普通压力计测量某压力，得值 999 公斤力/厘米²，该压力用更准确的方法测得为 1001 公斤力/厘米²，则普通压力计测量值的误差为 -2 公斤力/厘米²。

从例3和例4粗略看到，在 1000 公斤力/厘米²的邻近点进行测量时，二等活塞压力计的误差小于普通压力计的误差（指绝对值），因此，我们说二等活塞压力计比普通压力计准确，所以，误差这个量值已成为评定测量过程或计算仪器仪表的准确性不可缺少的尺度。

公式(2.1)所表达的误差是和给出值同单位（量纲）的，它是反映给出值偏离真值大小的，故又称之为绝对误差。这个绝对误差是给出值减真值而得，有时又特称之为（绝对）真误差。

如果引进一个新的定义：

$$\text{修正值} = -\text{误差} = \text{真值} - \text{给出值} \quad (2.2)$$

则可得到

$$\text{真值} = \text{给出值} + \text{修正值}$$

说明含有误差的给出值加上修正值后可以消除误差的影响。在精密计量中通常都采用加修正值的办法来保证全国量值的准确一致。

例如，我们希望加工出一个准确值为1欧的标准电阻，由于种种原因，加工后电阻的实际值为1.001欧，而电阻的标称值是1欧，如果按标称值1欧来用，那么它的误差是-0.001欧，如果按照1.001欧来用，那么，就和客观的情况完全相合了。

一个计量标准器送上级计量机构检定，其重要的目的之一，就是获得一个准确的修正值，确保量值传递的准确一致。

在检定中还存在一些**隐修正**问题，例如，用一台标准电压测量装置A去检定一批电压表B，由于直接检定的操作过程很烦或其它原因，不宜直接检定，而选择一台电压表C作桥梁，由A检定C，再由C去检定或比对一批B。如果检定1mv刻度，可将A指示1mv，设C此时指示为1.005mv，以后检B时，仍将C指示在1.005mv时再去看B指示何值。将C调正到1.005mv，意味着将标准A的1mv复现出来了，这个过程并未加修正值，但却起到了对C的修正的作用。如果从A检C，到C检B，这段时间里，实验条件保持相同，C又是稳定的，那么C检定B时，就不引入误差，通常这些条件不能满足，除了标准A的误差外，C的不稳定性亦将引入误差。

值得注意：由于修正值的不准或“桥梁”仪器不稳，虽经修正后，仍然不是真值，而只是可能得到比直接给出值更准一些的给出值。错误的修正（符号或数值弄错）反而得到更坏的结果，因此，修正量值需要谨慎小心。

2. 相对误差

在引出定义之前先举例说明。例如：用一个频率计测量准确值为100千赫频率源，得值为101千赫，则误差为1千赫。又用波长表测量准确值为1兆赫的标准频率源，得值为1.001兆赫，则误差亦为1千赫。从误差的绝对量来说它们都一样，但是它们却是在不同的频率点上作测量的，它们的准确程度是不一样的，前者测量100千赫差了1千赫，后者是测量1兆赫差了1千赫。为了描述测量的准确程度而引出相对误差或误差率的定义如下：

$$\text{相对误差} = \text{误差} \div \text{真值} \quad (2.3)$$

误差较小时

$$\text{相对误差} \approx \text{误差} \div \text{给出值} \quad (2.4)$$

前述例子中频率计和波长表的测量相对误差分别是 $1/100=1\%$ 和 $1/1000=0.1\%$ 。

3. 分贝误差

在无线电、声学等计量中常用分贝误差来表示相对误差，因此，分贝误差实质上是相对误差的另一种表示方式，因其重要，这里稍加详述。

设两个电压的比值为

$$\alpha = U_2 / U_1 \quad (2.5)$$

它的另一表达方式为

$$A = 20 \log \alpha \text{ (db)} \quad (2.6)$$

这就是分贝 (db) 的定义式。如果比值 α 产生了一个误差 $\delta \alpha$ ，则对应 A 产生一个误差 δA ，故有

$$A + \delta A = 20 \log (\alpha + \delta \alpha) \text{ (db)} \quad (2.7)$$

(2.7) 与 (2.6) 之差即得

$$\delta A = 20 \log (1 + \delta \alpha / \alpha) \text{ (db)} \quad (2.8)$$

这个式子给出了比值的相对误差 $\delta \alpha / \alpha$ 与分贝误差 $\delta A \text{ (db)}$ 之间的关系。注意到

$$\log (1 + \delta) = 0.4343 \ln (1 + \delta)$$

$$\ln (1 + \delta) \approx \delta, \delta \ll 1 \text{ 时}$$

则由 (2.8) 有

$$\left. \begin{aligned} \delta A \text{ (db)} &\approx 8.69 (\delta \alpha / \alpha) \\ (\delta \alpha / \alpha) &\approx 0.11518 A \text{ (db)} \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

例1: 某一电压表测出125伏，标准表测出为127伏，求分贝误差。

解:

$$\text{误差} = 125 - 127 = -2$$

$$\text{相对误差} = -2 / 127 = -1.6\%$$

$$\text{分贝误差} \approx 8.69 \times (-1.6\%) = -0.14 \text{ db}$$

例2: 已知某量误差为0.34db，求相对误差。

解:

$$\text{相对误差} \approx 0.1151 \times 0.34 = 3.9\%$$

需注意: 由于功率比的分贝定义为 $A = 10 \lg \alpha$, 这里 $\alpha = P_1 / P_2$, 则相应(2.8)和(2.9)中的系数有所不同, 这一点请读者注意。

4. 引用误差

引用误差是一种简化的和实用方便的相对误差, 常常在多档和连续刻度的仪器仪表中应用, 这类仪器仪表可测范围不是一个点而是一个量程, 各刻度点的示值和其对应的真值都不一样, 这时若按(2.3)或(2.4)计算相对误差时所用的分母也不一样, 故而计算很烦, 为了计算和划分准确度等级方便, 一律取该仪器仪表量程中的最大刻度值(满刻度值)作分母, 由此引出定义:

$$\text{引用误差} = \text{示值误差} \div \text{满刻度值} \quad (2.10)$$

例1: 测量上限(满刻度值)为2000千克力的工作测力计(拉力表), 在标定值(示值)为1500千克力时的实际作用力为1508千克力, 则此测力计在一点的引用误差为-0.4%。

例2: 检定2.5级、上限为100伏的电压表, 发现50伏刻度点的示值误差为2伏, 并且较其它各刻度点的误差为大, 所以该电压表的 最大引用误差 为2%。2.5级的含义是给出合格仪器仪表 最大引用误差 的界限为2.5%, 可见, 该电压表合格。

电工仪表的准确度等级分为0.1、0.2、0.5、1.0、1.5、2.5、和5.0七级, 标明仪表的引用误差不能超过的界限。一般说来, 如果仪表为S级, 则仅说明合格仪表最大引

用误差不会超过 $S\%$ ，而不能认为它在各刻度点上的示值误差都具有 $S\%$ 的准确度。设仪表的满刻度值为 x_n ，测量点为 x ，则该仪表在 x 点邻近处的示值误差应为：

$$\text{绝对误差} \leq x_n \times S\% \quad (2.11)$$

$$\text{相对误差} \leq x_n / x \times S\%$$

一般 $x \neq x_n$ ，故当 x 越近于 x_n 时，其测量准确度越高； x 越远离 x_n 时，其测量准确度越低，这就是为什么人们利用这类仪表测量时，尽可能在仪表满刻度值 $2/3$ 以上量程内测量的原因所在。在分析此类仪表对测量值的实际影响时，需要按 (2.11) 式作换算，而不能直接采用对应于它的准确度等级的值。在选择仪表作测量时，要注意到这一情况。

例3：某待测的电压约为100伏，现有0.5级0~300伏和1.0级0~100伏两个电压表，问用哪一个电压表测量较好？

解：用0.5级0~300伏测量100伏时的最大相对误差为

$$r_1 = x_n / x \times S\% = 300 / 100 \times 0.5\% = 1.5\%$$

而用1.0级0~100伏测量100伏时的最大相对误差为

$$r_2 = x_n / x \times S\% = 100 / 100 \times 1.0\% = 1.0\%$$

此例说明，如果量程选择恰当，用1.0级仪表进行测量也会比用0.5级仪表准确。因此，在选用仪表时，要纠正单纯追求准确度等级“越高越好”的倾向，而应根据被测量的大小，兼顾仪表的级别和测量上限合理地选择仪表。

又例如，在某台指针式调制度测量仪的说明书中标出，在0~100(%)量程(其它量程略写)中准确度为：当调制频率为30C/S~50KC/S、量程到95(%)时为满刻度