应用数学丛书

集合论

程极泰 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

集 合 论

程极泰 编著

国防工业出版社

内容简介

本书着重介绍公理集合论的基础，无穷集合的良序化理论，以及一般良序无穷集合上的超限归纳定理和超限递归定理。最后，并给出一些集合理论的应用。

本书可供理工科大学师生的参考，特别适用应用数学的教学和科研工作的参考。

应用数学丛书
集合论
程极泰 编著
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装
*
850×1168 1/32 印张 4 7/8 123千字
1985年4月第一版 1985年4月第一次印刷 印数：0,001— 9,750册
统一书号：15034·2766 定价：1.00元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

集合论在本世纪二十年代以后，逐渐从朴素的集合论发展为比较完善的公理集合论，公理集合论的特点是紧密了集合理论与数学逻辑的关系，从而，使用公理集合论的语言论述近代数学就愈来愈普遍，和近代数学的关系也愈来愈密切了。

有许多带有根本性的数学问题，例如连续统假设，六十年代对它的详尽论证，就大大地增加了集合论的内容，发现了公理化理论的相容性问题。集合论的目的，本来是用公理系统来研究无穷集合的内在特征，分清楚哪些公理相容，哪些公理无关，这自然是首要问题。今天，我们知道连续统假设这个公理是和通常的ZF集合公理体系无关的。哥德尔的完全性定理指出“一个公理化理论当且仅当它有一个模型时才是相容的”，这样，集合论的深入研究又必然要涉及数学逻辑的“模型理论”的研究。

因此，集合论的著作，大体可以分成两种类型，一种是研究点集拓扑学和一般数学研究所需要的内容，称为“集合论基础”，另一种则是包含一些近年来发展的集合论的细致研究内容，例如可构造性、强迫论法、大基数问题以及确定性问题。

集合论基础主要包括ZF集合理论的十条公理，按良序化集合将自然数的规律发展为超限归纳定理和超限递归定理，给出严格的序数集合和基数集合的定义，分析无穷集合涉及的选择公理的各种等价定理，集合理论的基本应用等。

集合论基础的著作，近几年才出现几本较好的书，这说明集合论基础已经成熟到了完全自成一个课目的时期。

目　录

第一章 引 言

数学研究的对象，是那些从实际存在的事物中高度抽象出来的一类客体，以这些客体为基础，分析它构成客体的各个组成部分，组成部分的本身也是一种客体，我们就把这些能够属于某客体的部分客体称为集合。所以，我们可以说，通常的数学系统都是用一些集合来描述的。

数学的某一门学科，除了要首先弄清楚集合的一般规律外，还要按学科本身的特有规律给集合以一些新的运算限制，形成该学科所要研究的一种数学模型。所以，通常的数学系统不仅是用集合来描述，而且也是要用集合来构造。在这样的前题下，我们才可以进行数学研究中的各种推理，阐明数学理论与数学方法的最深刻的内容。

由于集合理论是完全就集合本身的一般规律建立起来的理论系统，它在近代数学的各个分支中都是必不可少的工具。近年来，有关集合论的研究日渐深入，逐渐普遍使用到各个方面，所以，集合论是近代数学的基础之一。

集合论研究的基础是人们熟知的一些关于有限集合的性质，从这些显而易见的性质寻求探索无穷集合的途径，和研究无穷集合的具体方法，这就是研究集合论的目的。

就有限集合来说，集合的性质是十分显然的，所以，近年来欧美很多国家就把集合理论的一些简单性质和运算的基本概念放到中学讲授，使学生能尽早地接触近代数学的基础，被称为新数学的第一章，从而，就有所谓孩子们的集合论的提法。

但是，研究集合理论的主要目的是要解决有关无穷集合的问题，研究那些关于有限推理的方法是否能直接引用到有关无穷集合的命题，研究普通推理分析方法在怎样条件下才能使用于有关

无穷集合的问题。今日的集合论已经解决了很大一部分问题，但是，仍然有很多待澄清的问题，需要进一步深入研究。

现在，从研究集合理论的方法上来说，较多的是由朴素集合论逐渐向公理集合论发展；从描述的手段来说，较多的是由非形式观点趋向形式体系，更多地和数学逻辑发生了关系，使集合论占有了数学逻辑四大分支的一个分支。这四个分支是：（1）模型理论；（2）集合理论；（3）递归理论；（4）证明理论。

早在1873年，德国数学家坎托尔（Georg Cantor）就证明了所有实数的集合不能与所有整数的集合构成一一对应，开始了抽象集合理论的研究。接着，在1893年与1903年，德国数学家弗雷格（Gottlob Frege）出版了两本关于数学和哲学的书，指出如何把集合理论归结为数学逻辑的一种自明的演绎思想。最后，德国数学家策墨罗（Ernst Zermelo）于1908年发表了集合论的第一种公理系统，另一位数学家弗朗克（Abraham A. Fraenkel）在1922年又补充完善了策墨罗的公理系统。这种集合论公理系统简称为ZF公理系统，是我们今天论述集合论的基础。

但是，集合论的ZF公理系统刚刚在建立，还来不及研究它本身的协调性，所以在它建立的过程中引起了一些逻辑上的矛盾，由于这些矛盾的严重性，就引起了数学界以至哲学方面的争论。正如当时法国数学家庞加雷（Henri Poincaré）所怀疑的那样，他说："我们围住了一群羊，然而在羊棚里可能也圈进了狼"。

这时，具有代表性的数学界的三个论争学派就是：（1）英国数学家罗素（Bertrand Russell）和怀特海德（Alfred North Whitehead）为代表的逻辑主义学派。（2）荷兰数学家布劳沃（Luitzen E. J. Brouwer）为代表的直觉主义学派。（3）德国数学家希尔伯特（David Hilbert）为代表的形式主义学派。罗素和怀特海德的逻辑主义认为，数学来源于逻辑，并且是逻辑的延拓，所以，在他们的思想中，认为他们所使用的逻辑方法保证了数学的协调性。由于逻辑是无可置疑地协调的，通过逻辑处理，数学就成了从逻辑原理出发的一系列推理。逻辑本身有一些公理，由逻辑导出数学就不需要数学所特有的公理。事实上，逻辑主义的

形式体系并不代表数学的真实，它充其量只达到数学的外表，而不是核心。

布劳沃的直觉主义认为，数学思想是一个构造的过程，它建筑自己的世界，不依赖于经验的世界，也不需要模型，唯一的限制就是应以基本的数学直觉为基础。所以，数学观念应在语言、逻辑和经验之前，是直觉决定着观念的正确性和可接受性。数学思想不依赖于语言，而逻辑原理是构成使用语言的一种方法，所以逻辑是建立在数学上的。从而，直觉主义者不承认从公理出发推导出结论的数学工作，并且提出使用排中律值得怀疑的例子。

希尔伯特的形式主义认为，必须把逻辑和数学同时处理，在数学中，每一个特殊领域应借助于逻辑概念及数学概念和原理获得一种公理基础。他批判不准数学家使用排中律等于不准许天文学家使用望远镜。希尔伯特曾经指责布劳沃企图摆脱掉所有不合他们意的东西。

乍看起来，似乎希尔伯特的思想比较罗素和布劳沃的思想接近事实。然而，如果说只要能够证明一些简单的形式体系的协调性，便能说明形式主义是无可指责的话？那吗 1931 年奥地利数学家哥德尔（Kurt Gödel）就破灭了这一希望，他指出：人们不能借助于被容许用于希尔伯特元数学的那个狭窄的逻辑来证明包括普通逻辑和数论在内的体系的协调性。

关于集合论公理系统的协调性问题目前仍然是深入研究的一个重要方面。1940 年哥德尔证明：如果 ZF 体系在不用选择公理时是协调的，则当加上这个公理时也是协调的。从这一事实出发，现在有一些集合论的著作常把一些推理命题分成与选择公理有关（标以 AC 符号）和无关的两类。1963 年美国数学家柯亨（Paul J. Cohen）还证明了选择公理与连续统假设这两个公理是与 ZF 体系相互独立的，并且，包括选择公理在内的 ZF 体系也不能证明连续统假设这个公理。

总之，集合论的公理体系带来了数学上很大的论证严密性，如果仔细地把一些悖论排除，又能界定公理体系的各个协调关系，今天的数学包括 ZF 公理体系在内是丰富了的，而不是什么贫乏问题。这就是当今法国学派以布尔巴基（Nicolas Bourbaki）为集体笔名的一批数学家所提出的鼓舞人心的言词。

第二章 基本概念

§2.1 集合概念

当集合理论在1908年到1922年间开始系统建立时，由于ZF集合公理系统的协调性还有些不足之处，还有待于深入分析，集合理论遇到一些似是而非的悖论的非议，其中，最为著名的就是逻辑主义者罗素提出的悖论，这种悖论产生于一种特殊集合，这个集合含有一个仅仅用这个集合自身才能定义的元集，所以，为了避免这种悖论，罗素规定凡是含有一个集合内全部元素的，它本身不应该再是这个集合的一个元。直觉主义者认为“数学无需尊重逻辑规则”，所以在我们准备接受涉及悖论的数学概念和数学构造时，悖论是不重要的；形式主义者则想避免明显地使用所有这个词来避免悖论的出现。这些论述，事实上已经提供了一种避免悖论出现的集合理论的协调性方法，这就是我们在这一章，首先要阐明的：集合是一种好的类，还有一种顽固的类，它不能按集合的一般运算来处理，它们就是一种固有类。

悖论还是一个婉转的措辞，关于悖论，我们是能够判断这一类悖论是真是伪，应该怎样说才是对的。

罗素把他的悖论写成多种形式，其中之一就是所谓的“理发师的悖论”：

一个理发师在城里宣称，他要为所有自己不刮胡子的人刮胡子，而且不为那些自己刮胡子的人刮胡子。

那么，理发师自己该不该为自己刮胡子呢？如果他为自己刮了，按他自己的宣称，他就不该为自己刮的，但是，如他不为自己刮胡子，按他的宣称，又应该由理发师自己为自己刮胡子。

这里，很明显地是，理发师宣称的事情是把他自己排除在外的。

为了从数学上澄清罗素悖论，我们应该首先弄清的是集合概念。

集合理论研究的对象是非常广泛、非常一般的

客体

客体的一个组合，又常是一个客体，也就是若A，B，C都是客体，则由A，B，C构成的一个组合，表示为

$$D\equiv\{A, B, C\}$$

这时，称客体A，B，C是客体D的元，称A，B，C各与D构成一种从属关系，表为

$$A\in D,\quad B\in D,\quad C\in D$$

称A，B，C各个客体是属于客体D的。所以，就客体而论，有的可以再组合成新的客体，有的就未必一定要再与其它客体组合成更大的客体。

总之，我们把任何一个客体称为

类

对于它们，用某一种确定的二元关系$\in$来定义它们的一种构成元关系，从而，若A，B是类，则

$$A\in B$$

就有意义，它表示A是B的一元，A属于B，A在B中的。

客体是数学研究对象实际存在的东西的一般表述词汇，类则是第一步抽象出来的数学语言。一些类能构成一个组合，这是反映客观存在的一个事实，并不泛指任何两个类都可以组成一个新类，所以，二元关系$\in$也并不是任意可以加在两个类上的。

在确定所研究客体都是类这个前题下，以后，我们称

对于一切A

就是指

对于一切类A

从而，数学研究的对象是类，数学中所指的事物是一个类。

类的一个基本性质就是，类完全由它的元所决定；如果两个类明显地有相同的各元，它们就完全是同一个客体，就类而言，

我们不再探究产生这些元的实际背景。

在逻辑上有一个基本的约定：

$$p\text{ 当且仅当 }q$$

是指仅当 p 和 q 都真或都伪时成立的意思，将它缩写为

$$p \text{ iff } q$$

利用这个约定，我们首先给出关于类的第一个公理，

公理 I $A=B$ iff（对于所有 z，$z\in A$ iff $z\in B$）

这里，我们把"$=$"理解为两个客体或两个类相等的符号，从而"$A=B$"就表示 A，B 是同一个客体或者说是同一个类，它说明关于客体的两个名词"A"和"B"是可以在相代替的，特别是，如果这种代换是在一个定理中形成的，所得结果还是一个定理。由于各种类，例如 A 或 B，它们尽管是相等的，但是他们产生的由来可以不同，所以，经过类相等的互相代换，从定理的意义来说，就反映出一种外延性，因此公理 I 的实质意义，就说明我们在分析类的时候，不究它产生的由来以及它表示的客观物理内容，只要它所内含的元完全一样，我们就把它们看成是同一个类。

由于一个类 A 完全由它的元所决定，所以就能够从构成 A 的成元关系的任何一个必要且充分的条件所决定，这就是用任何一个性质 P 所决定，这个 P 是使

$$x\in A \text{ iff } x\text{ 有性质 }P$$

成立。再若把"x 有性质 P"这句话写成简单表示符号"Px"，则 P 是使

$$x\in A \text{ iff } Px$$

成立的一种性质。

例如，每一个正整数都是一个类，而"小于 10 的素数"这个说明就指出一种性质，所有只满足这个性质的正整数就构成一个类 A，它是使

$$x\in A \text{ iff } x\text{ 是小于 10 的素数}$$

成立的类，所以

$$A \equiv \{2, 3, 5, 7\}$$

这里的“小于 10 的素数”也是构成A类的一个充分而且必要的条件。但是，另一个性质

Q：多项式方程 $x^4-17x^3+101x^2-247x+210=0$ 的解也构成一个类B，它使

$$x \in B \text{ iff } x \text{是满足} Q \text{性质的}$$

成立，则

$$B \equiv \{2, 3, 5, 7\}$$

它是用P中的素数元代换为多项式方程的根。从P的意义外延到Q的意义，但是

$$A = B$$

有了关于类的外延性公理，我们可以用类来陈述罗素提出的著名例子——一种悖论：

设A是所有使$B \notin B$（即B不属于B）的类B所组成的类，B不属于B的元就是一个性质，可见A类是指

$$B \in A \text{ iff } B \notin B$$

成立的一个类。但是类A也是具有这个性质的，所以

$$A \in A$$

即得到一个矛盾，

$$A \notin A \text{ 同时 } A \in A$$

澄清这个事实，显然是和理发师悖论的原义一样，对于类是首先应加以区别的，也就是我们在陈述$B \notin B$的所有类的组成类A时是把A类排除在外的。

数学上严格的来说，我们应该把“类”分成两种：一种是可以顺利进行类运算的“OK”类；一种是限制运算的“固有类”。我们称“OK”类是一种集合，对集合可以给出一些运算的公理和命题，运算之后仍给出集合，而关于固有类，一般是并不都能运算的。

直观的说，集合就是那些能够形成元关系的类，所以给出

定义 1　类A是一个集合 iff 存在一个类B使$A \in B$。

所有的类都是在集合的基础上建立的，类的最大形式就是固有类。所以，我们只承认在能用一些基本类界定的集合，再给以某些性质组成的新类，也就是

公理Ⅱ 设P是任一性质，则有一个类A使

$$x \in A \text{ iff } Px \text{ 且 } x \text{ 是一个集合}$$

由此，我们把"集合"、"类"、"性质"三者协调的加以规定，并统一其表达形式，给出

定义 2 关于公理Ⅱ给出的类写成

$$\{x \mid Px\}$$

从而

$$y \in \{x \mid Px\} \text{ iff } Py \text{ 且 } y \text{ 是一个集合。}$$

如果Px是罗素性质$x \notin x$且$A = \{x \mid x \notin x\}$，则

$$A \in A \text{ iff } A \notin A \text{ 且 } A \text{ 是一个集合}$$

才是罗素声称的悖论本身的实际意义，而现在A不再是一个集合，所以就不会产生矛盾。

我们以后要讨论的集合理论，除了个别地方要引用固有类以外，都是针对集合来给出公理体系，产生有关集合运算的定义，以及随之而定的命题，演绎推导出有关集合理论的各个定理。

为了明瞭起见，我们把上述内容，列表分析如下：

公理Ⅰ

$A = B$ iff 对所有z，$z \in A$ iff $z \in B$

A, B, z都是类

固有类——非集合

OK 类——集合

类A是集合 iff 存在类B使$A \in B$

（定义 1）

客体

‖

类

公理Ⅱ

存在一个类A使对x有性质P

$x \in A$ iff Px 且 x 是一个集合

↓

$A \equiv \{x \mid Px\}$

$y \in \{x \mid Px\}$ iff Py 且 y 是一个集合

（定义 2）

§2.2 命题逻辑

从上面所述的集合概念，可知以集合 x 为变元，加以性质 P 的限制，就可以有一个类的存在，它是由那些满足性质 P 且只满足性质 P 的集合 x 为元的一种组合，表为

$$A \equiv \{x \mid Px\}$$

A 可以是一个固有类，也可以是一个 OK 类，也就是 A 本身又可以是一个集合。这就说明描述集合与类之间，集合与集合之间关系的主要依赖于所给定的性质 P。一般地说，性质 P 是用逻辑语言或者称为命题逻辑给出的。

逻辑语言或称命题逻辑是指的"语句逻辑的语言"，它是和普通使用的自然语言有些区别的。命题逻辑是用一些基本术语和公式构成的。

所以，命题逻辑是从一些基本的字母开始，第一步构成各种层次的关系把一些术语形成一些元公式，第二步将各元公式用一些命题联络符号和量符号组合成复杂公式。

命题联络符号共有五个：

名称	符号	意义
蕴涵	$\Rightarrow$	$P\Rightarrow Q$ 表示若 P 则 Q
否定	$\urcorner$ 或 $\sim$	$\urcorner P$ 或 $\sim P$ 表示不是 P
析取	$\vee$ 或 or	$P\vee Q$ 或者 P or Q 表示是 P 或是 Q 或 P，Q 皆是
合取	$\wedge$ 或 &	$P\wedge Q$ 或者 P & Q 表示 P，Q 都是
等价	$\Longleftrightarrow$ 或 $\equiv$	$P\Longleftrightarrow Q$ 表示 P iff Q

量符号有两个：

名称	符号	意义
普遍量符号	$\forall$	$\forall x$ 表示"所有的 x"
存在量符号	$\exists$	$\exists x$ 表示"存在有 x"

关于命题联络词，它们并不都是互相独立的逻辑形式符号，

因为，如果用F表示谬误，则从"蕴涵"$\Rightarrow$这个逻辑形式符号就可以导出其它的表达，也就是，如果我们把联络词看成是由零元运算F以及二元运算$\Rightarrow$构成的命题代数的逻辑推导，则从命题代数

$$T=\{F,\ \Rightarrow\}$$

出发，就可以得到

$$\sim P = P \Rightarrow F$$

$$P \vee Q = (\sim P) \Rightarrow Q$$

$$P \wedge Q = \sim(\sim P \vee \sim Q)$$

$$P \Longleftrightarrow Q = (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$$

这里加上一些括号是避免表达上的混乱，而且"="也是一种陈述的代号，它并不是命题代数本身中的一种运算。

设P是一些称为元公式或素公式为客体的一个集合，这些素公式可以是某种自然语言的句子或者是字母表的字元p，q，r，…，也就是说它们不是简单公式的命题组合，所以它们是元公式与冠以量词的公式。P的命题公式的集合构成包含P的一些元的表示式的最小集合，而且在联络词的组合下是闭的，也就是说，若A，B是命题公式，则$\neg A$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$与$(A \Rightarrow B)$也都是命题公式。

例如，设$P=\{p, q, r\}$，则p，q，$(p \vee q)$，$(q \vee p)$，$((p \vee q) \Rightarrow (q \vee p))$都是$P$的命题公式。

我们要指出，一个命题公式的正确或谬误，真或伪如何依赖于它的素组成部分的真或伪。更进一步，我们还要注意，有一类问题是无论命题公式素组成部分是否正确，是真是伪，命题公式总是正确的，例如

（1） $p \vee \neg p$

（2） $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$

这类命题公式称为命题的同义反复，因为它们的正确性仅依赖于句法。这种同义反复的处理使我们首先弄清楚逻辑规律的一种特殊类型。

一般的情况，设用T和F各表示正确和谬误，就可以列出真