应用数学丛书

偏微分方程的应用

〔日〕犬井鉄郎 宫島龙兴 木原太郎 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

偏微分方程的应用

犬井鉄郎
〔日〕宫島龙兴　著
木原太郎

楊永芳　譯

張质賢等校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。主要內容着眼于偏微分方程的应用，前四章介紹在处理本征值問題及边界值問題时所常用的种种方法和物理意义，后四章以扩散、散射、折射、电磁波以及等离子体等专題为中心，具体地介紹了偏微分方程在各方面的应用。可供大专院校理工科师生参考，也可供工程师、科学研究工作者参考。

原书分三册，第1章至第4章为第一册，第5章至第6章为第二册，第7章至第8章为第三册。現合并为一册出版。

偏微分方程式の応用 I II III
犬井鐵郎 宮島龍興 木原太郎
岩波书店 1958

現代应用数学丛书
偏微分方程的应用
楊永芳 譯 張质賢等 校

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷六厂印刷 新华书店上海发行所发行

开本 850×1156 1/32 印张 9 24/32 排版字数 229,000
1965年3月第1版 1965年3月第1次印刷
印数 1—8,000

統一书号 13119·601 定价(科六) 1.50 元

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册,分成A、B两組,各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并,整理成42种,不另分組編号,陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广,其內容都和現代科学技术密切有关,有一定参考价值。书中收集的資料都比較丰富,而叙述扼要,篇幅不多,有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然,这套书的某些观点不尽适合于我国的情况,但其方法可供参考。因此,翻譯出版这一套书,对我国科学技术工作者可能是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的,写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理,为了尽可能地減少这种影响,我們在某些譯本中,特請譯者或校閱者撰写序或后記,以介紹有关学科的最近发展状况,并对全书內容作一些評价,提出一些看法,結合我国情况补充一些資料文献,在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　　录

第 1 章　一般积分与边界条件[1]

§1 綫性二阶偏微分方程的积分曲面

1) 一維波动方程的一般解　物理学或工程应用的基本方程中最常出現的偏微分方程是綫性二阶的。其中以两个自变数的情形最为簡单，所以我們就从这里說起。

例如在弦振动的情形，若把表示弦的平衡位置的直綫取作 x 軸，且用坐标 x 表示弦上的点，因为对应坐标 x 的点 P 的横位移 u 不但和 x 有关，而且也随着时間 t 而变动，所以 $u=u(x, t)$. 其中自变数 x 是坐标变数，第二自变数 t 是时間变数，这时取表示 x, t 的直交坐标軸，并取因变数 $u(x, t)$ 为第三軸而得三維直角坐标系，于是横位移与位置及时間的关系就能用三維空間 x, t, u 內的曲面来表达。

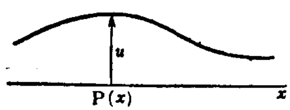

图　1.1

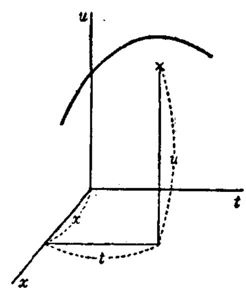

图　1.2

我們知道，因变数 $u(x, t)$ 以特定的形状依賴于 x, t，即一維波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1.1}$$

永远成立，就是說因变数 $u=u(x, t)$ 必須适合偏微分方程 (1.1)，习惯上，把适合微分方程的函数 u 称为解又称为积分，所以图 1.2 所表示的曲面就是偏微分方程 (1.1) 的**积分曲面**。而解偏微分方

[1] 第 1 章到第 4 章由犬井鐵郎执笔。

程这一事实，用几何或形象的說法，就是求积分曲面的問題。从今以后我們就考察求积分曲面的問題。若把(1.1)的 t 置換为

$$ct=y, \tag{1.2}$$

就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1.3}$$

設 F, G 是任意函数，則方程的解是

$$u(x, y)=F(x+y)+G(x-y), \tag{1.4}$$

因为作了偏微分之后立卽可以看出 F, G 都适合 (1.3)，(1.3) 旣然是綫性方程，所以两个解 F, G 的和当然也是它的解。由此可見，(1.3)的解是由 $x+y$ 的任意函数 F 以及 $x-y$ 的任意函数 G 的和所給出的(迭加原理)。二阶偏微分方程的包含两个任意函数的解通常叫做**一般解**。这样(1.4)就是(1.3)的一般解。

如果使用积分曲面这一名辞，积分曲面 (1.4) 是由任意函数 $F(x+y)$ 及 $G(x-y)$ 所表示的二曲面之和給出的。回到原来的变数，波动方程(1.1)的积分曲面是

$$u(x, t)=F(x+ct)+G(x-ct). \tag{1.5}$$

从物理意义上說，F 表示随时間以常速度 c 沿着 x 減退方向(卽 $-x$ 的方向) 运动的波形，G 則表示随时間以常速度 c 沿着 x 增加方向(卽 $+x$ 的方向)运动的波形❶。

例如令 $u(x, t)=G(x-ct)$ 并当 x, t 分别变为 $x+\Delta x$, $t+\Delta t$ 时，規定

$$G(x-ct)=G((x+\Delta x)-c(t+\Delta t))$$

就可以了解 G 的物理意义(波形的傳播)。

2) 一維波动方程的一般解与始値問題 由上可知，波动方程的积分曲面可以作为沿 $\pm x$ 方向傳播的任意二行波的曲面之和。因为它是波动方程

❶ 它們分别称为沿着 $+x$ 方向及 $-x$ 方向运动的行波。——譯者注

的积分曲面，所以也称为波动曲面。这样得来的波动曲面由于 $F(x+ct)$ 及 $G(x-ct)$ 的二函数 F, G 是随意的，因此就过于广泛了，以致不能够确定它的形状。

从物理的意义来考虑，如果在某一时刻知道了弦的各点的位置，以及各点以怎样的速度开始运动，那么可以想象后来的运动将被决定，也就能决定弦将产生什么样的波形。这种直观的想法是否眞的在数学上能証明呢？設初始时刻为 $t=0$，并把上述条件用式子来表达。即設所求的积分曲面是 $u(x, t)$，并設 $t=0$ 时的条件是

$$u(x, 0)=\varphi(x), \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)=\psi(x). \tag{1.6'}$$

求偏微分方程 (1.1)，适合上述条件的問題称为初始値問題或簡称**始値問題**。在(1.5)中令 $t=0$，把所得的式子代入 (1.6)，再把 (1.5) 就 t 作偏微分，然后令 $t=0$，最后代入(1.6′)即得

$$F(x)+G(x)=\varphi(x), \quad F'(x)-G'(x)=\psi(x)/c. \tag{1.7}$$

积分第二式得出 $F(x)-G(x)$，再結合前式就得到

$$\left.\begin{aligned} F(x)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi\right\}, \\ G(x)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\psi(\xi)d\xi\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

由(1.8)作出 $F(x+ct)$ 以及 $G(x-ct)$，然后代入(1.5)，就得到

$$u(x, t)=\frac{1}{2}\{\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi. \tag{1.9}$$

这是适合初始値条件(1.6)，(1.6′)的波动方程 (1.1) 的解，称为关于波动的 **Stokes 公式**。“初始値条件规定了 φ 及 ψ 的形状，所以(1.1)的积分曲面能由(1.9)唯一确定”。于是結果和我們的想象完全符合，即根据初始条件能确定积分曲面的形状。这个結論是合理的，就是說，根据物理的观点在各点給定了初始位移和速度后，就能唯一确定所求的解。

一般在物理以及工程中与其說求所給偏微分方程的一般解是重要的問題，毋宁說求满足根据物理的需要，而指定的附加条件的解具有更重大的意义。但是如果附加条件过多的話，所求的积分曲面可能不存在。如果条件过少的話，适合条件的解有任意多个，使得无法确定作为答案的积分曲面。

§2 关于綫性二阶偏微分方程的Cauchy問題 特征条件与特征曲綫

如果作为討論对象的偏微分方程不局限于波动方程，設方程的一般形状是

$$L[u] \equiv A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$=\Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2.1}$$

这里 $A(x, y)$, $B(x, y)$, $C(x, y)$ 是 x, y 的任意函数，在一定的附加条件下求方程的解的問題中，有一种問題，它的附加条件既以上述的初始值条件为特殊情况，又保証解的唯一性，这种問題称为 Cauchy 問題。

設 C_0 是 x, y, u 三維空間中任意的空間曲綫，Cauchy 曾經系統地研究了求通过 C_0 的(2.1)的积分曲面的問題，通称 C_0 为**初始曲綫**。当 C_0 已給时，考虑它投向 x, y 面上的正射影，并設所得的平面曲綫为 $\overline{C}_0$:

$$\varphi(x, y)=0, \tag{2.2}$$

这样沿着 $\overline{C}_0$ 积分曲面的高 u_0 也是已知的。通称 $\overline{C}_0$ 为**初始支柱**。普通不取 $\overline{C}_0$ 为(2.2)的形状，而取曲綫之长 σ 作为参数，并写成

$$x=x(\sigma), \quad y=y(\sigma), \tag{2.3}$$

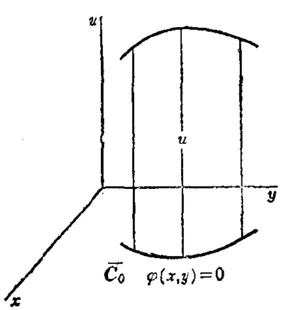

图 2.1

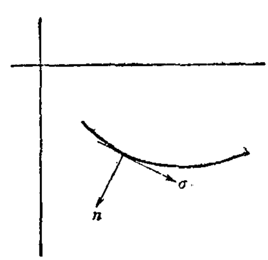

图 2.2

这样，为了规定 C_0 再給出 σ 的函数作为沿着 $\overline{C}_0$ 的曲面的高

$$u=u(\sigma). \tag{2.4}$$

除了条件(2.4)之外，并且还要规定沿着 $\overline{C}_0$ 关于法綫方向 n 的 u 的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial n}=N(\sigma). \tag{2.5}$$

因为沿着 $\overline{C}_0$ 从 (2.4) 已經給出 $u(\sigma)$，所以关于切綫方向 σ 的 u 的方向导数是确定的，卽

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma)=\dot{u}. \tag{2.6}$$

这样就能够从(2.5)，(2.6)得到 u 沿着 $\overline{C}_0$ 关于 x 及 y 的偏导数

$$p\equiv\frac{\partial u}{\partial x},\quad q\equiv\frac{\partial u}{\partial y}.$$

因此我們就能认为沿着 $\overline{C}_0$ 不但給定了(2.3)，(2.4)而且給定了

$$p=p(\sigma),\quad q=q(\sigma). \tag{2.7}$$

在这里沿 $\overline{C}_0$ 确定的 $p(\sigma)$，$q(\sigma)$ 和在(2.3)，(2.4)所确定的 $x(\sigma)$，$y(\sigma)$，$u(\sigma)$ 之間，成立着关系式

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}=p(\sigma)\frac{\partial x}{\partial \sigma}+q(\sigma)\frac{\partial y}{\partial \sigma}. \tag{2.8}$$

两个偏导数 p，q 沿着初始曲綫 C_0 能够从 (2.7) 确定这一事实，从几何意义来說；是通过 C_0 的所求的积分曲面沿着这条曲綫的切平面的方向是完全确定的。而且"在条件(2.8)成立的情况下在各点局部的切平面，当 σ 連續变动时，不发生交錯現象，而是圓滑地变动，卽在 C_0 的附近以带状包絡着曲面。"因此称(2.8)为**成带条件**。

为了决定在 $\overline{C}_0$ 附近沿此曲綫的积分曲面，只要沿 $\overline{C}_0$ 把 u 的所有的偏导数都唯一确定下来便成了。理由是：这时沿 C_0 可唯一确定形如

$$\begin{aligned}u(x,y)=u(x_0,y_0)&+\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)\right.\\&\left.+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right]+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2\right.\\&+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)\\&\left.+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right]+\cdots\end{aligned} \tag{2.9}$$

的关于 (x, y) 的二重 Taylor 級数，它在收斂圓内收斂，从而至少能够給出在 C_0 附近所求积分曲面的形状。根据偏微分方程論的結果，当給定初始条件时，如果沿 $\overline{C}_0$ 下列条件

$$A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2\neq 0 \tag{2.10}$$

成立的話，就能唯一确定 $\overline{C}_0$ 上任意点处的二阶偏导数 r, s, t. 进一步能証明"在同一条件下能够唯一确定任意的高阶偏导数"。这样当条件(2.10)沿着 $\overline{C}_0$ 到处成立时，可以断言"在 $\overline{C}_0$ 附近能够唯一确定积分曲面"。

相反，当

$$\Delta\equiv\dot{x}^2\{A(\dot{y}/\dot{x})^2-2B(\dot{y}/\dot{x})+C\}=0 \tag{2.11}$$

成立时，称这个关系为**特征关系**，在 x, y 平面的一点处使得 $\Delta=0$ 的方向称为**特征方向**。当初始支柱 $\overline{C}_0$ 的切綫方向与特征方向一致时，在此点用上面的方法就不能唯一确定 r, s, t 等偏导数。

当給定了沿初始支柱 $\overline{C}_0$ 的 $u(\sigma)$，以及 u 的法綫方向的导数 $N(\sigma)$时，求符合这些条件的偏微分方程 (2.1) 的积分曲面的問題称为 **Cauchy 問題**。

根据以上的討論，"如果对初始支柱 $\overline{C}_0$ 的任意点

$$\Delta\equiv A\dot{y}^2-2B\dot{x}\dot{y}+C\dot{x}^2\neq 0 \tag{2.12}$$

成立，則 Cauchy 問題就有唯一的解"。反之，如果特征关系

$$\Delta\equiv 0$$

成立，則 Cauchy 問題的解一般說不存在。

特征关系到处成立的曲綫称为**特征曲綫**。所以按 (2.11)，特征曲綫可作为微分方程

$$\Delta\equiv A dy^2-2B dx dy+C dx^2=0 \tag{2.13}$$

的解而求出。如果不采用参数表示，而将解写成形式

$$\varphi(x, y)=\text{常数}, \tag{2.14}$$

取此式的微分就能得到

$$dy/\varphi_x = -dx/\varphi_y. \tag{2.15}$$

因而可将(2.13)写成偏微分方程的形状:

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0. \tag{2.16}$$

(2.16)称为**特征偏微分方程**。

§3 二阶綫性偏微分方程的分类 双曲型,椭圓型,抛物型及其标准式

二阶綫性偏微分方程的一般形式是由(2.1)給出的,但是如果适当地选取自变数 x, y, 就能够化成更簡单的标准式。設新选的自变数是 ξ, η, 它們是由变換

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \tag{3.1}$$

給出的。象偏微分方程的一般理論那样,如果导入形如

$$Q(\varphi, \psi) = A\varphi_x\psi_x + B(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + C\varphi_y\psi_y \tag{3.2}$$

的式子,(2.1)的左端就能使用新变数写成

$$\begin{aligned} L[u] = {} & Q(\varphi, \varphi)u_{\xi\xi} + 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + Q(\psi, \psi)u_{\eta\eta} \\ & + L[\varphi]u_\xi + L[\psi]u_\eta. \end{aligned} \tag{3.3}$$

由此可知,如果所选的变換函数 φ, ψ 适合条件

$$Q(\varphi, \varphi) = 0, \qquad Q(\psi, \psi) = 0, \tag{3.4}$$

那末(3.3)就能写成

$$L[u] = 2Q(\varphi, \psi)u_{\xi\eta} + \cdots, \tag{3.5}$$

这里面的…仅包含 u 的关于新变数 ξ, η 的一阶以下的偏导数。至于(2.1)的右端,即使改用新变数,也不会含有高于一阶的偏导数。于是知道所給的方程(2.1)經过变換之后,变成了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \tag{3.6}$$

为了这样的变換能在实数范圍內施行,必須在实数范圍內寻求适合(3.4)的 φ 及 ψ, 也就是說特征偏微分方程(2.16)应該具有实値的解,这个

事实能够化成下面的条件，即在(2.16)中，令 $\lambda=\varphi_x/\varphi_y$，将它变成二次方程

$$A\lambda^2+2B\lambda+C=0, \quad \lambda=\varphi_x/\varphi_y. \tag{3.7}$$

(3.7)应具有两个实根，故此必须成立

$$B^2-AC>0. \tag{3.8}$$

如果构成所給偏微分方程 (2.1) 的系数的函数 A, B, C 恒适合条件 (3.8) 时，則称(2.1)是**双曲型**的。例如一維波动方程(1.1)就是一个范例。双曲型方程在实値变换的范圍能轉化为簡单的形状 (3.6)。一般称 (3.6) 为双曲型方程的**标准式**。

与(3.8)相反，如果成立

$$B^2-AC<0, \tag{3.9}$$

即 (3.7) 的两根为复値时，則称方程 (2.1) 为**橢圓型**的。表示二維的势 (potential) 的 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{3.10}$$

就是范例。

对于橢圓型，当它变换为标准式(3.6)时，出現了复値变换，这是很不方便的。因而从(3.1)的 ξ, η 再进一步选取由

$$\sigma=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad \tau=\frac{\xi-\eta}{2i} \tag{3.11}$$

所定义的新变数 σ, τ，結果(3.6)变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}=G\left(\sigma, \tau, u, \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \frac{\partial u}{\partial \tau}\right), \tag{3.12}$$

它是实値方程，称为橢圓型方程的标准式。

介于双曲型及橢圓型方程之間，若成立

$$B^2-AC=0, \tag{3.13}$$

則称方程为**抛物型**的。这时 ξ, η 之間不是相互无关的。如果令其中一个自变数保持不变 [$\varphi\equiv x$]，而选另一变数为(3.4)的解的 ψ，这么，結果就将原方程变成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=G\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{3.14}$$

(3.14)称为抛物型的标准式。

于 x 方向伸延的导体的一維热傳导方程，如果把時間变数写为 t，就成为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.15}$$

这是抛物型的范例。

§4 波动方程的解和初始值、边界值的关系

一維波动方程能簡単地求出一般解，同时也比較容易求它的适合附加条件的解，因此用来說明双曲型方程的重要性质就比較方便。本节对于这个例子所以要深入討論的原因，并非单純地为了波动方程自身，而是着眼于它对于双曲型方程的特征具有代表性的意义。

按照§3的方法，为了使波动方程变成标准式，选定新的自变数为 ξ, η,

$$\xi=x+y,\quad \eta=x-y. \tag{4.1}$$

从而得到了方程的新的形式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0, \tag{4.2}$$

由此可得一般解

$$u=F(\xi)+G(\eta). \tag{4.3}$$

还原为旧变数后，则得到原来的方程的一般解

$$u=F(x+y)+G(x-y)=F(x+ct)+G(x-ct). \tag{4.4}$$

从物理上說，它相当于沿着 x 軸的正負方向傳播的两个波动曲面的迭加。于是在时刻 t, x 处的波动 $u(x, t)$ 是两个成为基础的波动曲面 F, G 的重迭，但是对于波动曲面 F, G, 根据§1中的結果，可以从初始条件 (1.6), (1.6′) 出发，用(1.7)得到它們的函数形状。从几何方面考虑的話，就是作为下列两个曲面

$$\left.\begin{aligned} F(x+ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x+ct)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi\right\},\\ G(x-ct)&=\frac{1}{2}\left\{\varphi(x-ct)-\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x-ct}\psi(\xi)d\xi\right\}\end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

的迭加而得到全体的波动❶。这里从表面来看因为 x_0 是任意的，所以还有不定性，但这种不定性由于迭加的結果而消失，終于成为 Stokes 波动公式 (1.9)。

---

❶ 再者，因为沿特征曲綫，$x\pm ct$ 为常数而 F, G 不变，所以这些波动曲面表示：在特征曲綫上以具有一定之高的直綫为母綫而圍成的曲面。在 $t=t$ 所截的波动曲面的截口 O′A′B′C′ 可了解为起始在 $t=0$ 的 OABC 的各点沿特征曲綫移动后形成的图象。

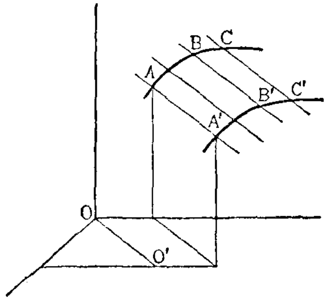

图　4.1

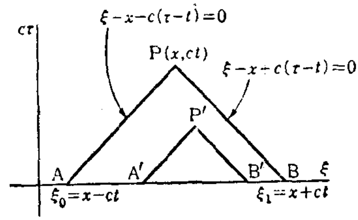

图　4.2

今取以 ξ, $c\tau$ 为两軸的直交坐标，討論一下位置为 $\xi=x$，时刻为 $\tau=t$ 之点 $P(x, ct)$ 的 u 的值(图 4.2)。

通过P作二条直綫 PA, PB，分别与两軸之交角为 45°，且与 ξ 軸($\tau=0$)的交点为 A, B. 則 PA, PB 是特征曲綫。因此在它們上面 $\xi-c\tau$, $\xi+c\tau$ 的值不变，而点A的 ξ 坐标为 $\xi=x-ct$，点B的 ξ 坐标为 $\xi=x+ct$，根据 Stokes 波动公式可知，$u(x, t)$ 的值仅依賴于 u 在初始支柱 $\tau=0$ 的 A 点与 B 点处的初始値 $\varphi(x-ct)$ 与 $\varphi(x+ct)$，以及 $\partial u/\partial t$ 的初始值 $\psi(\xi)$ 在 AB 的区間的积分 $\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(\xi)d\xi$. 也就是說波动方程的解“$u(x, t)$ 的值仅依賴于通过 P 点的二条特征曲綫与初始支柱所截的部分 AB 上的初始值”。“故此称 AB 为 P 的**依存区域**”。相反地，$t=0$ 上的区間 AB 內給定的始值的影响，将沿着通过两个端点的二条特征綫而扩于 $t>0$ 的区域。因此对于 $t>0$ 形成了(图 4.3 的)愈扩愈广的斜綫区域。普通“称斜綫区域 CABD 为初始区域 AB 的**影响区域**”。

图 4.2 的 $\triangle APB$ 內任意一点 P′ 的波动仅依賴于子区間 A′B′ 上的初始值，A′B′ 既不越出 AB 范圍之外，那么“APB 內不論何处的值全能由 AB 上的初始值决定。因此称 $\triangle APB$ 为 AB 的**决定区域**”。对于 $\triangle APB$ 以外的点 P″，仅从 AB 上的初始值是不能唯一确定的(图 4.4)。这是因为 P″ 的 u 值

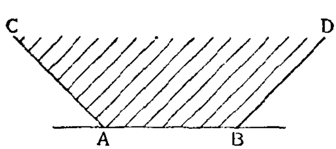

图　4.3

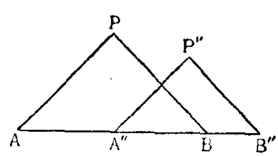

图　4.4