图论及其应用

卢开澄 著

清华大学出版社

图论及其应用

卢开澄

清华大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在清华大学讲授多年的教材的基础上写成的。共分十一章：引论、基本概念、树、最佳路径问题、平面图、电路网络、图与代数方程组、匹配理论、运输网络与开关网络、图的算法、色数问题。比较系统地介绍了图论研究的许多主要方面。

本书的特点是理论密切联系实际、着重于算法的研究、并有丰富的实例。除了数学基本理论外，还特别介绍了电网络、系统工程运筹学、计算机软件、集成电路的计算机辅助设计、编码理论、开关理论、逻辑电路、线性系统、以及经济规划、社会学等方面的应用。可供上述各专业的师生及科技工作者作为参考书或教材。

图 论 及 其 应 用

卢 开 澄 著

★

清华大学出版社出版

北京 海淀 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售

★

开本：787×1092 1/16 印张 15 3/8 字数 350 千字

1981 年 6 月第一版 1981 年 6 月第一次印刷

印数：1～20000

统一书号：15235・6 定价：1.90 元

前　言

在电子计算机蓬勃发展的促使下，组合数学新军突起．图论作为组合数学的主要成员，近 20 年来活跃非常；其原因在于它在许多领域有广泛的应用，并卓有成效．今天，图论已是运筹学、电路网络、计算机科学所不可缺少的数学工具．不仅如此，它在开关理论、编码理论、计算机辅助设计、甚至于社会学、化学等领域都取得可喜的成就．它的应用范围还在不断地扩大．所以开展图论的研究，推广它的应用，让更多的同志掌握它，也是四化的需要．这就是作者写这本书的出发点．

作者在清华大学计算机工程与科学系讲授该课多年．而计算机科学则是研究算法的学科，故讨论算法无疑是本书的中心思想．在介绍图论研究的若干重要方面的同时，作者力图做到理论密切联系实际，给出问题的实际背景和有效的解决方法．作者认为这是图论的精彩的部分，而且也是饶有趣味的．但是由于牵涉的面广，故不同专业的读者可以各取所需．比如并不一定要求从事经济规划的读者非要掌握电路网络不可；同样理由，对逻辑电路有兴趣的读者，读一读开关网络部份，而舍去运输网络也是可以的．虽然图论在电路网络上所取得的成果，和它在系统工程上的成果一样地引人入胜，但毕竟是相对独立的两个侧面．当然从算法的角度看来，都是图论这棵树上的两个硕果．

本书之所以能和读者见面，与各方面的支持和帮助分不开的．本校应用数学系、电力系、计算机系的同志们给我的支持甚多．栾汝书、肖达川、张鸣华、马振华、李文汉、胡冠章等同志分别审阅了有关的部份，并提出宝贵的意见．陈祖舜、代一奇、迟成文、钟攸明等同志给了许多帮助．在此谨向以上诸位同志表示最诚挚的谢意．

本书可作为大学的教材，具有矩阵论基础的读者，也不难自学看懂本书很大一部份．Binet-Cauchy 公式、Kuratowsky 定理、Mason 公式等，不是完全必要时，证明可以省略．限于作者的水平，缺点与错误在所难免，望读者多多指正．

著　者

1980 年 11 月于清华大学

目　　录

第一章　引　　论

这一章将介绍几个实际问题，有的给出了问题的解答，有的还不能，只是把问题提出来了．希望通过它可以给图论的研究内容画一个轮廓．这样，对以后的学习有些帮助．自然，这些不能概括图论问题的全体，而仅仅是其中非常小的一部份．

§1　Könisberg 桥问题（或 Euler 回路问题）

这个问题是图论中最古老的问题之一．

Könisberg 是东普鲁士的一座城，第二次世界大战后划归苏联所有，也就是现在的加里宁格勒．Pregel 河流经这个城市．如图 1—1 所示：A、B 是 Pregel 河的两岸，C、D 是河中的两个孤岛．C、D 两岛与两岸，以及彼此之间由七座桥相连．有人提出过这样一个问题：从一个地方出发，通过每座桥一次，而且仅仅通过一次，最后回到原来地方，问这样的路径是否存在？

这问题的提出虽是出自游戏，但它的数学模型有着实际意义．由于 Euler 解决了这问题，故也就称为 Euler 回路问题．

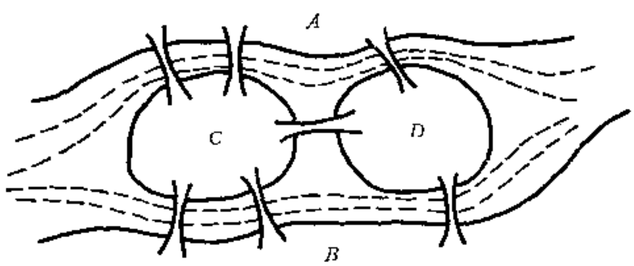


图 1—1

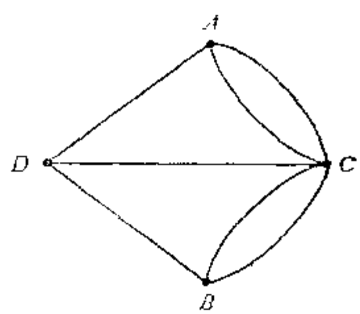


图 1—2

Euler 把这问题转化为图 1—2 所示的问题：用 A、B、C、D 四点分别表示两岸及两个孤岛；而桥则用两点间的联线表示它．问从 A、B、C、D 中任何一点出发，通过每条边一次，最后回到该点，这样的路径是否存在？于是问题变得简洁明瞭多了．

这个问题的回答是否定的．直观上不难发现，为了要回到原来的地方，要求与每一个顶点相关联的边数均应为偶数．保证从一条边进入，从另一条边出去，一进一出才行．详细的讨论见第四章．

§2 路径问题

如图 1—3 所示，v_1、v_2、$\cdots v_7$ 是七座城市，有方向的边 $\overrightarrow{v_i v_j}$ 表示从 v_i 城到 v_j 城的单向车道．问从 v_1 到 v_7 有无道路相通？

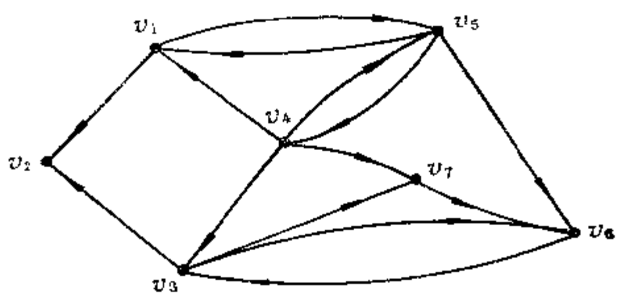


图 1—3

这个例子很简单，观察上图就不难给出解答．图论研究的是给出一种算法来．

为此引进矩阵

$$A=(a_{ij})_{7\times 7},$$

其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1，若从\ v_i\ 点到\ v_j\ 点有边\ (v_i,\ v_j)\ 相连；\\0，若从\ v_i\ 点到\ v_j\ 点无边相连．\end{cases}$$

这样有

$$A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\\v_7\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\\1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccccc}v_1&v_2&v_3&v_4&v_5&v_6&v_7\end{array}\end{array},$$

而且得

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1&0\\1&2&0&1&1&3&1\\1&1&2&0&2&0&1\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}=(a_{ij}^{(2)}),$$

其中

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{7}a_{ik}a_{kj}\ .$$

同样有

$$A^3=A^2A=AA^2=(a_{ij}^{(3)})=\begin{pmatrix}1&1&2&0&2&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&1\\2&1&4&1&2&2&1\\2&3&0&2&1&5&2\\0&0&1&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\end{pmatrix},$$

其中

$$a_{ij}^{(3)}=\sum_{k=1}^{7}a_{ik}^{(2)}a_{kj}\ .$$

一般有

$$A^k=(a_{ij}^{(k)})_{7\times7}\ ,$$

其中

$$a_{ij}^{(k)}=\sum_{h=1}^{7}a_{ih}^{(k-1)}a_{hj}\ .$$

现在来看看 $a_{ij}^{(k)}$ 的值说明什么意思？以 $a_{ij}^{(2)}$ 为例：

$$a_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{7}a_{ik}a_{kj}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+\cdots+a_{i7}a_{7j},$$

$a_{il}\cdot a_{lj}\neq0$，当而且仅当 $a_{il}=a_{lj}=1$，即从 v_i 到 v_l，从 v_l 到 v_j 都有直接道路相通，故 $a_{ij}^{(2)}$ 的值表示从 v_i 出发经过某一个中间站 v_l 然后到 v_j 点的路径数目．或形象地说 $a_{ij}^{(2)}$是从 v_i 出发两步到达 v_j 的路径数目．例如 $a_{42}^{(2)}=2$，即从 v_4 出发，两步到达 v_2 的路径有两条；从图 1—3 可见有 $v_4\to v_1\to v_2$，$v_4\to v_3\to v_2$．

明白了以上的道理，要求从 v_1 点出发经 1、2…步所到达的点，只需求 $k=1,2\cdots$ 矩阵 A^k 的第一行元素，A^k 的第一行行向量用 $A_1^{(k)}$表示．

如下图中元素的下标记录了所经过的路径，如 1_{15}，即从 $v_1\to v_5$ 的道路一条，其它类似可知．

$$A_1^{(1)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1_{15}\ 0\ 0)$$

$$A_1^{(2)} = (0\ 1\ 0\ 0\ 1_{15}\ 0\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1_{54} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 0\ 0\ 1_{154}\ 0\ 1\ 0)$$

$$A_1^{(3)} = (1\ 0\ 0\ 1_{154}\ 0\ 1\ 0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1_{47} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 0\ 1_{1547})$$

同理可知 $a_{ij}^{(k)}$ 的值表示从 v_i 出发，k 步到达 v_j 的路径数目．$a_{ij}^{(k)}=0$ 表示不存在这样的路径．

又知 $a_{17}^{(3)}=1$，即指有一条道路从 v_1 点出发走三步到达 v_7．若要追问这一条路径是什么？它沿途经过哪些顶点？只要回溯 $a_{17}^{(3)}$ 这个数是怎么形成的．

$A_1^{(1)}$ 表矩阵 A 中第一行元素组成的行向量，矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 可写为 $a_{ij}^{(1)}$．

$$A_1^{(1)} = (0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0)\,.$$

从上图可见 $A_1^{(3)}$ 中的 $a_{17}^{(3)}$ 由 $A_1^{(2)}$ 中的 $a_{14}^{(2)}$ 与 $a_{47}^{(1)}$ 相乘而得的，即从 v_1 出发两步到达 v_4，再走一步到 v_7．$a_{14}^{(2)}$ 是由 $A_1^{(1)}$ 中 $a_{15}^{(1)}$ 与 $a_{54}^{(1)}$ 相乘而得的．即从 v_1 出发第一步到 v_5，第二步才到 v_4．故由 $a_{15}^{(1)}\to a_{14}^{(2)}\to a_{17}^{(3)}$ 可知，这条路径是 $v_1\to v_5\to v_4\to v_7$．

假如要问从 v_7 到 v_1 是否有路相通？如上法所示，求 A^4，A^5，A^k，观察 $a_{71}^{(k)}$ 什么时候出现非零元素，即 k 为何值时使得，$a_{71}^{(k)}\neq 0$，而且 k 的值不能超过6，即 $k<7$．七个顶点，若从其中一点出发（设为 v_1），走了六步还到不了 v_7，则再走下去也到不

了．这个道理留给大家思考．

对于这问题要证明 v_7 没有道路走到 v_1，还可以采用如下证法．若把点的次序重新排列为 v_7、v_6、v_3、v_2、v_5、v_4、v_1．可得

$$A=\begin{array}{c} v_7\\ v_6\\ v_3\\ v_2\\ v_5\\ v_4\\ v_1\\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc:ccc} 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ \hdashline 0&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 0&0&0&1&1&0&0 \end{array}\right)\\ \begin{array}{ccccccc} v_7&v_6&v_3&v_2&v_5&v_4&v_1\end{array}\end{array}=\begin{pmatrix} A_{11} & \mathbf{0}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

其中有

$$A_{11}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad A_{21}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A_{22}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\qquad A_{12}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$A^2=\begin{pmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&\mathbf{0}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^2&\mathbf{0}\\A_{21}A_{11}+A_{22}A_{21}&A_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}^{(2)}&\mathbf{0}\\A_{21}^{(2)}&A_{22}^{(2)}\end{pmatrix}.$$

而且不难证明，对于任何整数 k 恒有

$$A^k=\begin{pmatrix}A_{11}^{(k)}&\mathbf{0}\\A_{21}^{(k)}&A_{22}^{(k)}\end{pmatrix},\qquad k=1,\ 2,\ \cdots.$$

这就证明，$a_{17}^{(k)}=0$，即从 v_7 出发不论走多少步都到不了 v_1．这个例子只是讨论从一点到另一点有没有道路相通？有几条道路相通？若是存在几条道路相通，再进一步便是求其中从一点到另一点最短距离的路径问题，是一个很有实际意义的运筹学问题．后面将讨论到它．

§ 3 应 用 举 例

若我方两名军事人员和敌方两名军事人员同到某一现场视察，途中要经过一条河．现只有一只小船，每次最多只能乘两个人．为了安全起见，当敌我双方人员同时在场时应避免出现我方人员少于敌方人员的情况，问渡河的方案应如何？

设用 (m, n, l) 表示河的左岸有我方人员 m 人，敌方人员 n 人的状态．(m, n, r) 表示我方人员 m 人，敌方人员 n 人在河的右岸的状态．显然可见，若左岸为 (m, n, l) 状态，则右岸得出现 $(2-m, 2-n, r)$ 状态．

全部可能出现的状态有：

$$
\begin{array}{ll}
v_1=(2,\ 2,\ l), & v_7=(2,\ 2,\ r),\\
v_2=(2,\ 1,\ l), & v_8=(2,\ 1,\ r),\\
v_3=(1,\ 1,\ l), & v_9=(1,\ 1,\ r),\\
v_4=(2,\ 0,\ l), & v_{10}=(2,\ 0,\ r),\\
v_5=(0,\ 2,\ l), & v_{11}=(0,\ 2,\ r),\\
v_6=(0,\ 1,\ l), & v_{12}=(0,\ 1,\ r).
\end{array}
$$

请注意：这里不出现 $(1, 0, l)$，$(1, 0, r)$ 状态，从表面上看也属于我方人员多于敌人的情况，然而它的另一面却分别是 $(1, 2, r)$，$(1, 2, l)$，这是不允许的，故排除了．

渡船的全过程可以看作是状态的转移．而问题变为求一条开始从 v_1 点出发，最后到达 v_7 的道路．

状态之间的关系用图1—4表示．比如从 $v_1(2, 2, l)$ 可以迁移到 $v_{12}(0, 1, r)$，只要从左岸运一敌方人员到右岸即可．状态之间的关系是可逆的、对称的．也就是说 v_1 可以转化到 v_{12}，v_{12} 也可以转化到 v_1．$(2, 2, l)$ 可以转化为 $(0, 1, r)$，$(2, 2, r)$ 也可以转化为 $(0, 1, l)$．

互相转化的两种状态用一无向线段相联之．

问题归结为从图 1—4 找一条从 v_1 到 v_7 的路径．

如 §2 例子那样写下矩阵

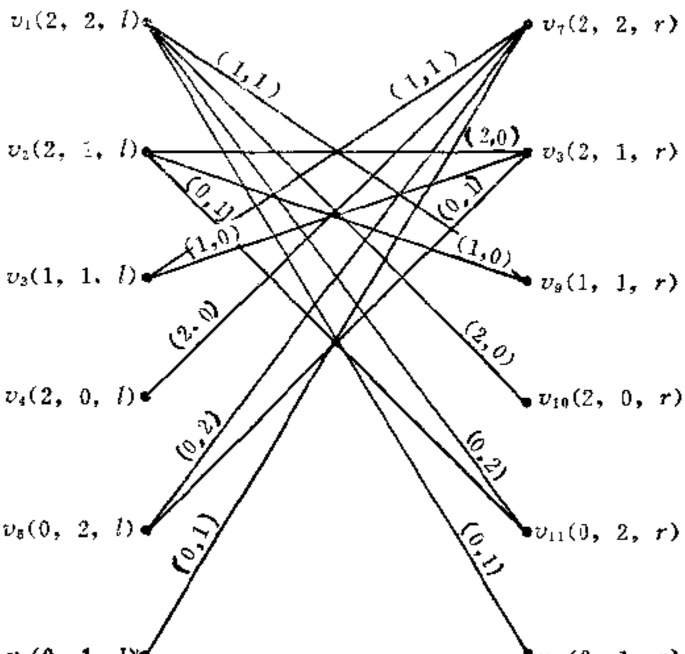


图 1—4

$$A=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \bar{A}\\ \bar{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}_{12\times 12}.$$

因为东西岸状态的对称性，故矩阵 A 是对称矩阵，点的排列次序是按下标的自然次序，从v_1、v_2 依次到 v_{12}，其中

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

而且， $A_{11}=A_{22}=\mathbf{0}$，这道理是显然的.

$$A^2=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \bar{A}\\ \bar{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \bar{A}\\ \bar{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{A}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \bar{A}^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}\bar{A}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \bar{A}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \bar{A}\\ \bar{A} & \mathbf{0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \bar{A}^3\\ \bar{A}^3 & \mathbf{0}\end{pmatrix}\cdots\cdots$$

请大家说明上面规律的实际意义.

问题归结为求 $\bar{A}$、$\bar{A}^3$、$\bar{A}^5$、…，并注意什么时候出现 $\bar{a}_{11}^{(k)}\neq 0$.

令 $\bar{A}_1^{(k)}$ 表由矩阵 $\bar{A}^k$ 中第一行元素组成的行向量．

详细运算见第 8 页，结果分析可得从 v_1 到 v_7 的四条路径如下：

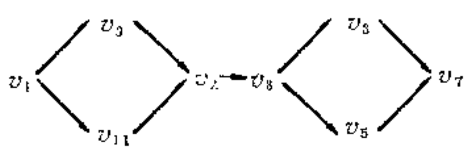
(a) $v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$,

(b) $v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$,

(c) $v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$,

(d) $v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$.

或表以



上面的讨论方法还可以简化．比如用一个顶点表示（2，2）状态，并不区分它究竟是在河的东岸还是河的西岸，这是可能的．因为河的东岸和西岸是交替出现的．于是上面的讨论可以归结为第 9 页所示的状态迁移图.

$$A_1^{(1)} = (0\ \ 0\ \ \overset{v_9}{1}\ \ 1\ \ \overset{v_{11}}{1}\ \ 1)$$

$$A_1^{(2)} = (0\ \ 0\ \ \overset{v_9}{1}\ \ 1\ \ \overset{v_{11}}{1}\ \ 1)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (4\ \ \overset{v_2}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$$

$$A_1^{(3)} = (4\ \ \overset{v_2}{2}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0\ \ \overset{v_8}{2}\ \ 6\ \ 4\ \ 6\ \ 4)$$

$$A_1^{(4)} = (0\ \ \overset{v_8}{2}\ \ 6\ \ 4\ \ 6\ \ 4)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (20\ \ 14\ \ \overset{v_3}{2}\ \ 0\ \ \overset{v_5}{2}\ \ 0)$$

$$A_1^{(5)} = (20\ \ 14\ \ \overset{v_3}{2}\ \ 0\ \ \overset{v_5}{2}\ \ 0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\overset{v_7}{4}\ \ 18\ \ 34\ \ 20\ \ 34\ \ 20)$$

$$v_1=(2,\ 2),\qquad v_2=(2,\ 1),\qquad v_3=(1,\ 1),$$
$$v_4=(0,\ 2),\qquad v_5=(2,\ 0),\qquad v_6=(0,\ 1).$$

特别是要指出的是 v_2 点有一从 v_2 点到 v_2 点的圆环，它表示从（2，1）状态回到（2，1）状态，不过已从河的一岸的（2，1）状态迁移到河的另一岸的（2，1）状态．这样的圆环我们叫做自身回路．图 1—5 是无向图，实际上每条边都是双向的．

同样的道理，从 $v_1(2,\ 2)$ 点出发走一步到 $v_6(0,\ 1)$，便是从河岸（2，2）状态转移到对岸的（0，1）状态．于是问题导致求从 v_1 点出发，经过奇数步返回 v_1 点的路径．

再者从 v_1 到 v_4，v_4 只有一种可能返回 v_1，这样 $v_1\to v_4\to v_1$，回到了原来的状态，故 v_4 可以省略不考虑．v_6 也是一样．所以问题又大大地简化了，导致求图 1—6 中从 v_1 点出发，经奇数步重返 v_1 的路径．

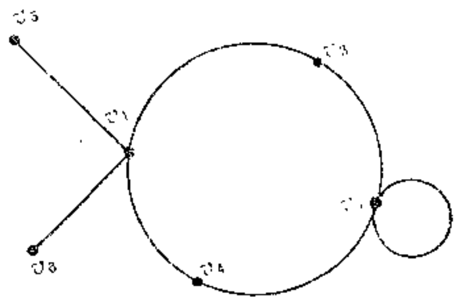


图 1—5

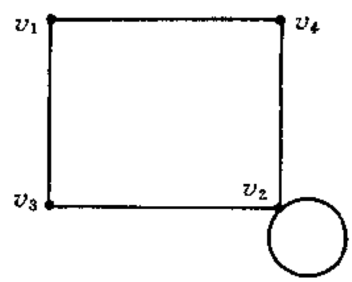


图 1—6

从图上可以很快给出问题的解答．它应该是：

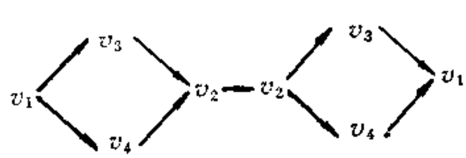
(a) $v_1\to v_4\to v_2\to v_2\to v_4\to v_1$,

(b) $v_1\to v_4\to v_2\to v_2\to v_3\to v_1$,

(c) $v_1\to v_3\to v_2\to v_2\to v_4\to v_1$,

(d) $v_1\to v_3\to v_2\to v_2\to v_3\to v_1$

或写为



通过计算可得出相同的结果．

令

$$A=\begin{array}{c}v_1\\v_2\\v_3\\v_5\\ \\\end{array}\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc}0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&0&0\\1&1&0&0\end{array}\right)\\ \begin{array}{cccc}v_1&v_2&v_3&v_5\end{array}\end{array},$$