Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

（一）

费定晖　周学圣　编演

郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

一九八三年·济南

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(一)
费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审
*
山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷
*
787×1092 毫米 32 开本　16.25 印张　331 千字
1980 年 2 月第 1 版　1983 年 6 月第 3 次印刷
印数：131,001—186,300
书号 13195·17　定价 1.75 元

出版说明

吉米多维奇（Б.П.ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自五十年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要

轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目　录

第一章　分析引论

§1. 实　　数

1°数学归纳法　为了证明某定理对任意的自然数n为真，只须证明下面两点就够了：（1）这定理对$n=1$为真，（2）设这定理对任何的一个自然数n为真，则它对其次的一自然数$n+1$也为真．

2°分割　假设分有理数为A和B两类，使其满足于下列条件：（1）两类均非空集，（2）每一个有理数必属于一类，且仅属于一类，（3）属于A类（下类）的任一数小于属于B类（上类）的任何数，这样的一个分类法称为分割。（a）若或是下类A有最大的数，或是上类B有最小的数，则分割A/B确定一个有理数。（б）若A类无最大数，而B类亦无最小数，则分割A/B确定一个无理数。有理数和无理数统称为实数*。

3°绝对值　假若x为实数，则用下列条件所确定的非负数$|x|$，称为x的绝对值：

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{若}x\geqslant 0,\\ -x, & \text{若}x<0.\end{cases}$$

对于任何的实数x和y，有以下的不等式成立：

$$|x|-|y|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|.$$

4°上确界和下确界　设$X=\{x\}$为实数的有界集合．若：

* 以后若没有相反的附带说明，数这个字我们将理解为实数．

（1）每一个$x\in X$*满足不等式

$$x\geqslant m;$$

（2）对于任何的$\varepsilon>0$，存在有$x'\in X$，使

$$x'<m+\varepsilon,$$

则数 $m=inf\{x\}$ 称为集合X的下确界。

同样，若:

（1）每一个 $x\in X$满足不等式

$$x\leqslant M,$$

（2）对于任何的$\varepsilon>0$，存在有$x''\in X$，使

$$x''>M-\varepsilon,$$

则数 $M=sup\{x\}$ 称为集合X的上确界。

若集合X下方无界，则通常说

$$inf\{x\}=-\infty;$$

若集合X上方无界，则认为

$$sup\{x\}=+\infty.$$

5°**绝对误差和相对误差** 设a（$a\neq 0$）是被测的量的准确数值，而 x 是这个量的近似值，则

$$\Delta=|x-a|$$

称为绝对误差，而

$$\delta=\frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差。

假若x的绝对误差不超过它的第n个有效数字的单位的一半，则说x有n位准确的数字。

---

* 符号$x\in X$表示x属于集合X。

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数n皆成立：

1. $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设对于$n=k$（自然数）时，等式成立，即

$$1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+k+1$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2},$$

即对于$n=k+1$时等式也成立。

于是，由数学归纳法知，对于任何自然数n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]$$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6},$$

即对于$n=k+1$，时等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3．$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+\cdots+k)^2,$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=(1+2+\cdots+k)^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\right\}^2$$

$$=[1+2+\cdots+(k+1)]^2,$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

4．$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

证 当$n=1$时，等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$1+2+2^2+\cdots+2^{k-1}=2^k-1,$$

则对于$n=k+1$时，有

$$1+2^2+2^2+\cdots+2^{k-1}+2^k$$
$$=(2^k-1)+2^k=2^{k+1}-1,$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1.$$

5. 设$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$及$a^{[0]}=1$. 求证

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]},$$

其中C_n^m是由n个元素中选取m个的组合数，由此推出牛顿的二项式公式。

证 当$n=1$时，由于

$$[a+b]^{[1]}=a+b$$

及 $$\sum_{m=0}^{1}C_1^m a^{[1-m]}b^{[m]}=a+b,$$

所以等式成立。

设$n=k$时，等式成立，即

$$(a+b)^{[k]}=\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}, \tag{1}$$

则对于$n=k+1$时，有

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b)^{[k]}\cdot(a+b-kh). \tag{2}$$

将(1)式代入（2）式得

$$(a+b)^{[k+1]}=(a+b-kh)\cdot\sum_{m=0}^{k}C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}$$

$$
\begin{aligned}
&=(a+b-kh)\{C_k^0a^{[k]}b^{[0]}+C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}+\cdots\\
&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\}\\
&=\{(a-kh)+b\}C_k^0a^{[k]}b^{[0]}\\
&\quad+\{[a-(k-1)h]+(b-h)\}C_k^1a^{[k-1]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+\{a+(b-kh)\}C_k^ka^{[0]}b^{[k]}\\
&=C_k^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_k^0a^{[k]}b^{[1]}+C_k^1a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+C_k^1a^{[k-1]}b^{[2]}+\cdots+C_k^ka^{[1]}b^{[k]}\\
&\quad+C_k^ka^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+(C_k^0+C_k^1)a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+(C_k^{k-1}+C_k^k)a^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=C_{k+1}^0a^{[k+1]}b^{[0]}+C_{k+1}^1a^{[k]}b^{[1]}\\
&\quad+\cdots+C_{k+1}^ka^{[1]}b^{[k]}+C_{k+1}^{k+1}a^{[0]}b^{[k+1]}\\
&=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^ma^{[k+1-m]}b^{[m]},
\end{aligned}
$$

故由$(a+b)^{[k]}=\sum\limits_{m=0}^{k}C_k^ma^{[k-m]}b^{[m]}$可推得下式成立：

$$(a+b)^{[k+1]}=\sum_{m=0}^{k+1}C_{k+1}^ma^{[k+1-m]}b^{[m]},$$

即对于$n=k+1$时，等式也成立。

于是，对于任何自然数n，有

$$(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n}C_n^ma^{[n-m]}b^{[m]}. \qquad (3)$$

在式子

$$a^{[n]}=a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中，令$h=0$，即得

$$a^{[n]}=a^n. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}C_n^m a^{n-m}b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

式中$x_1,x_2,\cdots,x_n$是符号相同且大于-1的数。

证 当$n=1$时，此式取等号。

设$n=k$时，不等式成立，即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

则对于$n=k+1$时，由于$x_i(i=1,2,\cdots,n)$大于-1，所以$1+x_i>0$。因而有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant(1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1})\\&=(1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\\&\quad+(x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

由于$x_ix_j\geqslant 0$，所以

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1})\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1},\end{aligned}$$

即对于$n=k+1$时，不等式也成立，

于是，对于任何自然数n，有

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\\&\quad\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.\end{aligned}$$

7. 证明若$x>-1$，则不等式

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx\quad(n>1)$$

为真，且仅当$x=0$时，等号成立。

证 只要在6题的贝努里不等式中，设

$$x_i=x \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即得证

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \ ,$$

从6题的证明过程中看出，仅当 $x=0$ 时，上式才取等号.

8．证明不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当} n>1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}>2=2!$，故不等式成立.

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$k!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$(k+1)!<\left(\frac{k+1}{2}\right)^k(k+1)=2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}>2\ (k=1,2,\cdots),$$

从而有

$$(k+1)!<\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1}$$

即对于 $n=k+1$时，不等式也成立.

于是，对于任何自然数n，有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9． 证明不等式

$$2!\cdot 4!\cdots(2n)! > [(n+1)!]^n \quad 当 n>1.$$

证 当 $n=2$ 时，因为 $2!\cdot 4!=48$. 及 $[(2+1)!]^2=36$，所以，$2!\cdot 4!>[(2+1)!]^2$，故不等式成立。

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$2!\cdot 4!\cdots(2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}2!\cdot 4!\cdots(2k+2)! &> [(k+1)!]^k(2k+2)!\\ &=[(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2)\\ &>[(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1}=[(k+2)!]^{k+1},\end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立．于是，据归纳法原理，本题证毕。

10．证明不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n=1$ 时，因为 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式显然成立。

设 $n=k$ 时，不等式成立，即

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n=k+1$ 而言，由于

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2+8k+3<4k^2+8k+4,$$

因而是成立的. 于是,最后得

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k+1}{2k+2}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n=k+1$ 时，不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设c为正整数，而不为整数的平方，且 A/B 为确定实数 $\sqrt{c}$的分割，其中 B 类包含所有合于 $b^2>c$ 的正有理数 b，而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A类中无最大数，而在B 类中也无最小数.

证 设$a\in A$. 若 $a\leqslant 0$，则显然存在 $a'>a$ ($a'>0$)且 $a'\in A$. 故可设 $a>0$，于是 $a^2\leqslant c$. 但不可能有 $a^2=c$. 因若$a^2=c$，设$a=\frac{p}{q}$, p与q为互质的正整数,则$\frac{p^2}{q^2}=c$. 由于 c 是正整数，而p^2与q^2也是互质的，故必$q=1$，从而$c=p^2$,此与假定矛盾,故必$a^2<c$. 下面我们证明，存在正整数n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^2<c,$$

于是 $a+\frac{1}{n}$也属于 A.

上述不等式相当于:

$$a^2+\frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c, \quad \frac{2a}{n}+\frac{1}{n^2}<c-a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a+1}{n}<c-a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了。

为此，只要取

$$n>\frac{2a+1}{c-a^2},$$

而这是恒为可能的.因此，不论 a 为 A 类内的怎样的数，在 A 类内总能找到大于它的数，故 A 类中无最大数。

同法可证 B 类中也无最小数。

实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt{c}$。

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成：A 类包含所有的有理数 a，而 $a^3<2$；B 类包含所有其余的有理数.证明在 A 类中无最大数，而在 B 类中也无最小数。

证 设 $a\in A$.即 $a^3<2$。下证必可取正整数 n，使

$$\left(a+\frac{1}{n}\right)^3<2.$$

事实上，上式相当于 $\frac{3a^2}{n}+\frac{3a}{n^2}+\frac{1}{n^3}<2-a^3$.若 $a\leqslant 0$，取 $n=1$ 即可.若 $a>0$，注意到 $n\geqslant 1$，即知若取 n 充分大，使 $n>\frac{3a^2+3a+1}{2-a^3}$，则上列各式均成立。从而 $a+\frac{1}{n}\in A$。故 A 中无最大数。

下设 $b\in B$，则 $b^3\geqslant 2$。下证不可能有 $b^3=2$。事实

上，若 $b^3=2$，设 $b=\frac{p}{q}$，p 与 q 为互质的正整数，则 $\frac{p^3}{q^3}=2$，$p^3=2q^3$，从而 p^3 为偶数，因此 p 必为偶数：$p=2r$，r为正整数.由于q与p是互质的，故 q 必为奇数，从而 q^3 也为奇数。但 $q^3=4r^3$，故 q^3 又必是偶数，因此矛盾．由此可知必有 $b^3>2$。仿前面之证，可取正整数n，使 $\left(b-\frac{1}{n}\right)^3>2$，从而 $b-\frac{1}{n}\in B$。由此可知 B 类中无最小数.实质上，此处分割 A/B 确定了一个无理数$\sqrt[3]{2}$。

13．作出适当的分割，然后证明等式：

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$；

(б) $\sqrt{2}\sqrt{3}=\sqrt{6}$。

证 (a) 作确定$\sqrt{2}$的分割A/B：一切有理数$a\leqslant 0$以及满足 $a^2<2$的正有理数 a 都归于A 类，一切满足 $b^2>2$ 的正有理数 b 归入B 类．又作确定$\sqrt{8}$的分割A'/B'：一切有理数 $a'\leqslant 0$ 以及满足$a'^2<8$ 的正有理数 a'归入A'类，一切满足 $b'^2>8$ 的正有理数 b'归入 B' 类．我们知道，根据实数加法的定义，满足不等式．

$a+a'<c<b+b'$（对任何$a\in A, b\in B, a'\in A', b'\in B'$）

的唯一实数 c 就是$\sqrt{2}+\sqrt{8}$。因此，如果我们能证明恒有 $(a+a')^2<18$（当 $a+a'>0$时），$(b+b')^2>18$，则有 $a+a'<\sqrt{18}<b+b'$。于是得知$\sqrt{18}=c=\sqrt{2}+\sqrt{8}$。

若 $a+a'>0$，则 a 与 a' 中至少有一个为正，从而