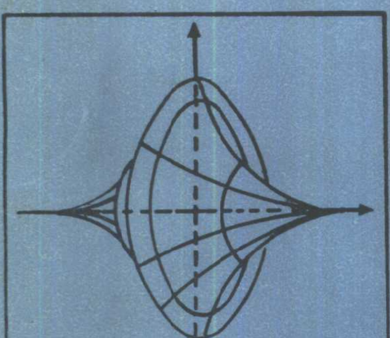
微积分学讲解

[日] 堑江诚夫·桑原 焕·笠原晧司



四川人民出版社

微积分学讲解

[日]塹江誠夫　桑垣　煥　笠原晧司　著

毛正中　谭维明　译

四川人民出版社

一九八三年　成都

微积分学讲解　　　　毛正中等译

四川人民出版社出版　　　　重庆印制一厂印刷
四川省新华书店重庆发行所发行

开本850×1168毫米 1/32 印张17.25 插页2 字数534千
1984年2月第一版　　　　1984年2月第一次印刷
印数：1--11,400册

书号：7118·667　　　定价：2.55 元

译者的话

一定的思维训练对数学比对其它任何科学都更具有基本的意义．因而为学生们提供适当的训练材料，是绝对必要的．在这种训练活动中，怎样掌握一般的思维规律？更具体地说，解答某类问题，是否有某种方法或技巧可循？这些是教师和学生共同关心的问题．我们翻译这本书，是想在微积分学的范围内，为解决这些问题提供一本有价值的参考读物．

本书内容包括一元微积分（前四章）和多元微积分及其应用（后四章）．每章分为若干节，每节都由三方面的材料组成：比较详细的基本理论（定义、公式、定理）的提要；典型例题的讲解（这是核心部分）；练习及提示与答案．

本书的特点在于例题类型较全，对微积分学中常见的各种基本类型，几乎都涉及到了．在编排上注意了循序渐进，由浅入深，特别是例题的讲解，极富启发性，非常有助于初学者较快地掌握微积分学中的基本解题方法和技巧．书末还附有例题索引，以便查阅．每例后面，编排了恰当的练习题．认真地完成这些练习题，可望逐步地把方法、技巧的一般原则变为自己的一种直觉的习惯．

考虑到有的读者的准备知识等因素，我们在个别地方加了注释，以“——译者”标明．原书中有少数笔误及印刷错误，凡发现了的，均作了改正，但未一一注明．

本书可供中学数学教师、大学理工科低年级学生、电大、业余大学学生以及自学高等数学的读者参考．前四章的许多材料也可供高中学生参考．

四川大学数学系李荣涑副教授仔细地审阅了全部译稿，并提出了许多宝贵意见，在此，我们表示衷心感谢．

我们热忱地欢迎广大读者提出意见，以便再版时作进一步的修改．

一九八二年五月

序

我们对现行大学低年级用的微积分学（数学分析）教科书中的问题及练习题作了广泛的调查，搜集了重要的及出现频率高的题目，以学生易于接受为宗旨，加以整理解说，遂成此书

本书前半部分（第一章至第四章）的内容为一元微积分，后半部分（第五章至第八章）为多元微积分及其应用．每章分为若干节，在各节开头，以定理、推论、注意、公式（或基本例子）的形式，介绍了该节的要点，然后分为若干小条目，分别编排例题并配置与之有关的练习题．

数学是一切科学技术的基础，而数学分析则是数学的基干．如果本书对于数学分析的学习有所帮助，使它的理解和应用变得较为容易一些的话，就令编者大喜过望了．

编者　1979．8．

目　　录

第一章　极限和连续

1.1　数列的收敛性

定义1　已给数列$\{a_n\}_{n=1,2,\cdots}$，对任给的$\varepsilon>0$，如果存在序号n_0，只要$n\geqslant n_0$，就有$|a_n-a|<\varepsilon$，则称$\{a_n\}$**收敛**于a，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，或$a_n\to a\ (n\to\infty)$。

当数列不收敛时，称为**发散的**。特别地，对无论怎样大的数$G>0$，如果存在序号n_0，只要$n\geqslant n_0$，就有$a_n>G$，则称$\{a_n\}$发散到（正的）无穷大，记为$\lim a_n=+\infty$或$a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$。

定理 1　若数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均收敛，则$\{a_n+b_n\}$、$\{a_n\cdot b_n\}$也收敛，且

(i)　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，

(ii)　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，

柯西 (Augustin Louis Cauchy, 1789—1857)

法国数学家，毕业于法国革命后设立的最高学府巴黎综合工科大学，在数学方面有大量的研究成果，其中最为人称道的业绩，是把微积分学严密化以及创立复变函数论。

若还有$b_n \neq 0\ (n=1,2,\cdots)$、$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$，则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也收敛且

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$。

定理 2 若$\{a_n\}$、$\{b_n\}$收敛于同一值a，且数列$\{c_n\}$合于

$$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \quad (n=1,2,\cdots).$$

则$\{c_n\}$也收敛于a。

定理 3 （阿基米德） 对任意的实数a、b，均可适当地选择自然数n，使$na>b$。

推论 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}=0$。

定理 4 有界的单调数列必收敛。

定理 5 （波尔察诺—维尔斯特拉斯） 任何有界数列，都包含收敛的部分序列。

定义 2 若数列满足如下条件，则称**柯西序列**：对任意的$\varepsilon>0$，存在序号n_0，只要p、$q \geqslant n_0$，就有$|a_p - a_q| < \varepsilon$。

定理 6 （柯西） 柯西序列必收敛；反之，收敛数列必为柯西序列。

例 1-1 （有界数列）

设$a<b$. 证明：在区间(a, b)内必存在有理数.

解 由阿基米德定理，存在自然数n，合于$\dfrac{1}{b-a}<n$. 对这个n，考查na. 取na的整数部分为m，则$m \leqslant na < m+1$. 设$r=\dfrac{m+1}{n}$，即$nr=m+1$，故$na<nr$. 另一方面又有$nr \leqslant na+1<nb$，从而，$a<r<b$.

方法 把区间(a,b)扩大为(na, nb)，使区间(na,nb)的长大于1. 于是，就至少有一个自然数落在(na, nb)内. 然后，再缩小到原来的区间即可。

练习 1-1

1. 证明：任一无理数都可作为有理数列的极限.
2. 用极限方法说明$3=2.999\cdots$.

【提示及答案】

1. 设所给无理数为 a，则在开区间 $\left(a-\frac{1}{n},\ a+\frac{1}{n}\right)$（$n$ 为自然数）中必有有理数，记为 a_n，于是 $|a-a_n|<\frac{1}{n}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

2. 设 $a_0=2$，$a_1=2.9$，$a_2=2.99$，…，于是，$|3-a_n|\leqslant\frac{1}{10^n}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

例 1-2 （ε论证法）

（i） 试求n_0，使合于：只要 $n\geqslant n_0$，就有$\frac{n}{n^2+1}<0.01$；

（ii） 如用0.001取代0.01，n_0 应取为多少？

（iii） 对任意的$\varepsilon>0$，用ε表示出合于如下条件的n_0：只要$n\geqslant n_0$，就必有$\frac{n}{n^2+1}<\varepsilon$；

（iv） 验证：当ε变小时，n_0 相应增大；

（v） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$的值.

柯西序列

解 （i） 由$\frac{n}{n^2+1}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}\leqslant 0.01$，有 $n\geqslant\frac{1}{0.01}=100$. 故取 $n_0=100$ 即可.

（ii） 同理，取 $n_0=1000$即可.

（iii） 同理，取$n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$即可.

（iv） 由(iii)即刻可知.

（v） 对无论多么小的$\varepsilon>0$，若取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则对$n\geqslant n_0$的一切 n，$\left|\frac{n}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$.

练习 1-2

1. （i） 试求 n_0，使得只要 $n\geqslant n_0$，就必有$\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right|<0.01$；

$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}$

（ii） 若用0.0001取代0.01，n_0应为多少？

（iii） 对任给的$\varepsilon>0$，用ε表示出合于如下条件的n_0：只要$n\geqslant n_0$，就必

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{0.02}$ $=\frac{2\sqrt{n}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2$ $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<0.01$

有$\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$;

(iv) 验证：当ε变小时，n_0 相应增大；

(v) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

2. 就前题的几个问题，考查数列$\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1,2,\dots}$，并用 ε 论证法证明$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$.

3. 用ε论证法证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=(a+b)$.

【提示及答案】

1. (i) $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$,

$$\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right|\leqslant\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right).$$

要$\frac{1}{4}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right)<0.01$，只要$\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1.04$，$n>\frac{1}{1.04^2-1}$. 于是，取$n_0=\left[\frac{1}{1.04^2-1}\right]+1=13$便可.

(ii) 与(i)类似，只要$\sqrt{1+\frac{1}{n}}<1.0004$，即取$n_0=\left[\frac{1}{1.0004^2-1}\right]+1=1250$ 便可.

(iii) 同理，取$n_0=\left[\frac{1}{8\varepsilon+16\varepsilon^2}\right]+1$便可.

(iv) 由(iii)即可明白.

(v) 对任意的$\varepsilon>0$，若取 $n_0=\left[\frac{1}{8\varepsilon+16\varepsilon^2}\right]+1$，则只要 $n\geqslant n_0$，就必有$\left|\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{2}$.

2. (i)要$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.01$，只要$\frac{1}{n}<e^{0.01}-1$，而 $e^{0.01}>1+0.01$,

故取$n_0=\frac{1}{0.01}=100$便可.

(ii)同理，要$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.0001$，取$n_0=10000$即可.

(iii)对任意的$\varepsilon>0$，要$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\varepsilon$，只要$\frac{1}{n}<e^{\varepsilon}-1$，从而取　$n_0=\left[\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right]+1$即可.

(iv)由(iii)可知$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$.

3．对任意的$\varepsilon>0$，考虑$\frac{\varepsilon}{2}$，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，确定了一个序号$n_1$，只要$n\geqslant n_1$，就有$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 同样，由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$确定出一个序号$n_2$，只要$n\geqslant n_2$，就有$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$. 取$n_0=\max(n_1\ n_2)$，故只要$n\geqslant n_0$，就同时有$n\geqslant n_1$，$n\geqslant n_2$，于是

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(a+b)|&\leqslant|a_n-a|+|b_n-b|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$.

例 1-3 (极限)

证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=l$，并说明在$l=\pm\infty$时，结论亦成立.

解　当l为有限时，总可用a_n-l来取代a_n，故可设$l=0$而不失一般性. 这样，对任给的$\varepsilon>0$，必有序号n_0，使

$$|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad(n\geqslant n_0),$$

从而$|a_{n_0+1}+\cdots+a_n|<(n-n_0)\frac{\varepsilon}{2}$ $(n\geqslant n_0)$. 另一方面，当$n\to\infty$时，$\frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n}$收敛于0，故有序号$n_1\geqslant n_0$，使

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (n\geqslant n_1),$$

于是，当 $n\geqslant n_1$ 时，$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，即

$$\lim\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=0.$$

当 $l=+\infty$ 时，对任给的 $G>0$，有序号 n_0，合于：只要 $n\geqslant n_0$，就有 $a_n>2G$．从而 $a_{n_0+1}+\cdots+a_n>(n-n_0)\cdot 2G$．同时，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n}\to 0,$$

故有序号 $n_1\geqslant 4n_0$，使 $\left|\frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n}\right|<\frac{1}{2}G(n\geqslant n_1)$．从而，若 $n\geqslant n_1$，则

$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}>-\frac{1}{2}G+\left(1-\frac{n_0}{n}\right)\cdot 2G\geqslant-\frac{1}{2}G+\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot 2G=G$，即

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$．同理可证，当 $l=-\infty$ 时，结论成立．

注意 此题是，若不用 ε 论证法便不能很好地作出证明的一个好例子，为此，稍微仔细地写出了证明过程，读者务必要深入地研究这个证明方法．

练习 1-3

1．设 $a_n>0$．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=l$．

2．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{l}{2}$．

3．设 $a_n>0$．证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$．

4．设 $0<b_1<b_2<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$．证明：若 $\lim\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l$．

【提示及答案】

1．取对数即归结为例题的情形．

2. 可用a_n-l取代a_n，故不妨设$l=0$. 而若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. 且因

$$-\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|a_k|<\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)a_k<\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)|a_k|,$$

故可假定 $a_n>0$.

若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，设$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$. 从而

$$\frac{b_1/1+b_2/2+\cdots+b_n/n}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

另一方面，$na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots b_n$，故

$$0<\frac{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{b_1+\cdots+b_n}{n^2}$$

$$<\frac{b_1/1+b_2/2+\cdots+b_n/n}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

分清
变与不变 于是，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{na_1+(n-1)a_2+\cdots+a_n\}=0$.

3. 设$b_n=a_{n+1}/a_n$，则$a_n=a_1\cdot b_1b_2\cdots b_{n-1}$，故由1，

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1}\cdot\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}\to 1\cdot l\quad(n\to\infty).$$

4. 添加两项$a_0=b_0=0$. 若令$\alpha_n=a_n-a_{n-1}$，$\beta_n=b_n-b_{n-1}$，$(n=1,2,\cdots)$，则$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k$，$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k$. 这样，问题就变为证明："若$\frac{\alpha_n}{\beta_n}\to l$，简化 则$\frac{a_n}{b_n}\to l$". 而且可用$\alpha_n-l\beta_n$取代$\alpha_n$，故不妨设$l=0$. 于是对任意的$\varepsilon>0$，存在序号$n_0$，只要$n\geqslant n_0$，就有$|\alpha_n|\leqslant\varepsilon\beta_n$. 将其从第$n_0+1$到第$n$项加起来，便得

$$|a_n-a_{n_0}|<\varepsilon(b_n-b_{n_0})\quad(n\geqslant n_0).$$

另一方面，因$|a_{n_0}|/b_n\to 0(n\to\infty)$故存在序号$n_1\geqslant n_0$，只要$n\geqslant n_1$，就有$|a_{n_0}|/b_n<\varepsilon$. 从而，当$n\geqslant n_1$时，$\left|\frac{a_n}{b_n}\right|<\left|\frac{a_n-a_{n_0}}{b_n}\right|+\left|\frac{a_{n_0}}{b_n}\right|<\varepsilon\left(1-\frac{b_{n_0}}{b_n}\right)+\varepsilon<2\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$.

例 1-4 （极限值）

求下列各极限值：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n^k}$ $(a>0,\ k>0)$

解 (i)在练习1-3.1中令$a_n=\dfrac{n}{n-1}(n=2,\ 3\cdots)$. 答：1.

(ii)若$a>1$，极限值为$+\infty$，若$a\leqslant1$，极限值为0. 当$a\leqslant1$，显然。当$a>1$时，令$a=1+h(h>0)$，则 $a^n=(1+h)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}c_n^ih^i>c_n^{k+1}h^{k+1}$，

从而

$$\frac{a^n}{n^k}>\frac{n}{(k+1)!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot h^{k+1}\to\infty\quad(n\to\infty).$$

注意 这是两个很基本的例子，其解法及结果均应记住.

练习 1-4

求下列极限值：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}n^kx^n(x>0)$ (iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a}{n}\to0$ (vi) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$

(viii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}$ (k是自然数)

(ix) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$

【提示及答案】

(i) 将分子有理化，得$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. 答：0.

(ii) 应用$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$. 答：1. n $\ln e=1$

$n^2\ln(1+$

$n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to e$

$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\to1$ $n\ln(1+$

(iii) $x<1$ 时，若记 $x=\frac{1}{1+h}\ (h>0)$，

则 $x^n=\frac{1}{(1+h)^n}<\frac{1}{c\cdot n^{k+1}}$.

答：$x\geqslant 1$时，为$+\infty$；$x<1$时，为0.

(iv) 若令 $a_n=\frac{n^n}{n!}$，则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to e$.再利用练习1-3，3 .

答：e.

(v) 设 $n_0>|a|$，则

$$\frac{|a|^n}{n!}=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{n_0}\cdots\frac{|a|}{n}\leqslant\frac{|a|^{n_0}}{n_0!}\Big(\underset{<1\ >0}{\frac{|a|}{n_0}}\Big)^{n-n_0}\to 0\ (n\to\infty).$$

答：0.

(vi) 令 $a_n=n$，然后利用练习1-3，1. 答：$+\infty$.

(vii) 若令 $(\sqrt[n]{x}-1)^{-1}=c_n$，则

$n=\frac{\ln x}{\ln\left(1+\frac{1}{c_n}\right)}$，因$|c_n|\to\infty$，从而，$\frac{n}{c_n}\to\ln x$. 答：$\ln x$.

(viii) 由 $\int_{n-1}^{n}x^k dx<n^k<\int_{n}^{n+1}x^k dx$，得

$$\int_0^n x^k dx<\sum_{j=1}^{n}j^k<\int_1^{n+1}x^k dx.\qquad \frac{\int_1^{n+1}x^k dx}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}$$

用n^{k+1}除不等式三边.① 答：$\frac{1}{k+1}$. ?

① 鉴于此法用了定积分，下面介绍另一解法，用练习1-3.4的结果（即施笃兹定理）. 令

$$a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k,\ b_n=n^{k+1}，则$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}.\ 而$$

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots，故$$

$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=\underline{(k+1)n^k}+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots，从而\ =\frac{1}{k+1}$$

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}$$

$a_1=1$

(ix) $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$ 答：1.

例 1-5

考查下列级数的收敛性并求极限：

(i) $a_1=1$, $a_{n+1}=1/(1+a_n)$

(ii) $a_1>0$, $a_{n+1}=pa_n+q$ $(|p|<1)$

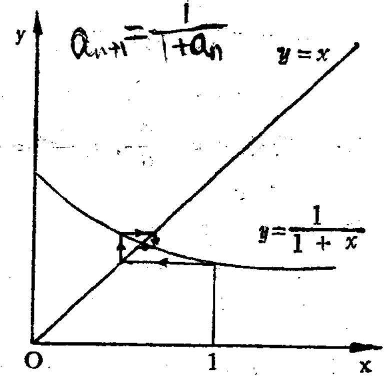


图 1-1

解 (i)显然，对一切n，$a_n>0$．若能证明

(a) $\{a_{2n}\}_{n=1,2,\cdots}$ 单增，$\{a_{2n-1}\}_{n=1,2,\cdots}$ 单减；

(b) $a_2\leqslant a_n\leqslant a_1(n=1,2,\cdots)$；

(c) $a_{n+1}-a_n\to 0(n\to\infty)$，就可知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在（参看图1-1）．而若存在性得证，则其极限值合于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}a_{n-1}},$$

由此即得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

于是，只须证(a)、(b)、(c)三条成立．

用归纳法证明(a)．因

$$a_3-a_1=\frac{-a_2}{1+a_2}<0,\quad a_4-a_2=\frac{a_1-a_3}{(1+a_3)(1+a_1)}>0,$$

故$n=1$时$a_{2n+1}-a_{2n-1}<0$，$a_{2n+2}-a_{2n}>0$成立．设n时成立，在$n+1$时，

（接上页①）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(k+1)n^k+\frac{k(k+1)}{2}n^{k-1}+\cdots}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{(k+1)+\frac{k(k+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{k+1}.$$ ——译者