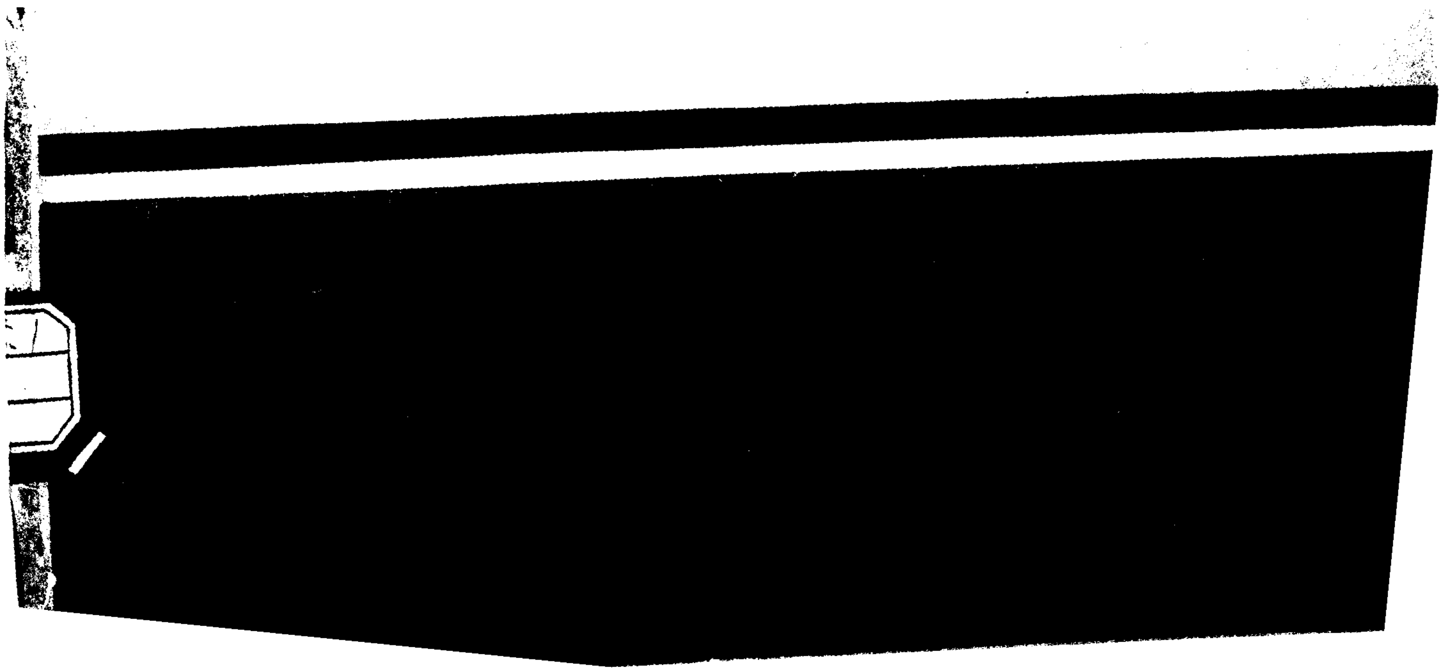

前　言

常微分方程是数学的一个很重要的分支．其所以如此，大体上有两方面的原因．首先，它与生产实践和科学技术的联系极为密切．在变量进入数学之后，要用变量来描述与刻划某个过程中各个变量之间的关系，几乎都离不开微分方程．因此，微分方程从它诞生起就日益成为人们探求各种自然规律的有力工具，从而是数学解决实际问题的主要渠道之一；其次常微分方程几乎涉及到数学所有的学科，它一方面运用各个数学学科的理论与方法来解决自己的问题，同时又为其它的数学学科提出了很多新的课题．这些，我们以后会逐步看到的．

本书作为高等师范院校本科生及中学教师函授生的教材，我们在编写时，有以下几点想法．

1．反映高师特点，联系中学数学教学实际．

虽然在普通中学数学课中没有常微分方程的内容，但是，常微分方程与中学数学教学内容有着极其密切的联系．中学数学内容是数学最基础的知识，中学教师必须回答：这些知识为什么要讲？与以后的数学理论有什么关系？有什么用？在以后是如何用的？今后发展如何？有些什么基本的数学方法等等．而常微分方程，正如前面所说，它既与实际问题联系密切，又是各数学学科综合应用性强的学科，因此，对于上面提出的许多问题，能够做出很多有意思的回答．一方面可以使中学教师“居高临下”，另一方面又可以扩大知识面，充实加强对于中学数学内容的理解．我们尽可能在有关的部分自觉地进行这方面的联系．另外，我们还介绍了一部分历史材料，这对于中学教师也是很有益的．当然，这仅仅是一种探索性的尝试，有待进一步总结经验，继续改进．

2．“弹性”大一点．

各高师院校师资与学生情况很不同，本科与函授的差异也颇大，因此，我们在选材上“弹性”较大，有浅有深．既有主要的传统的内容，又对现代理论作了扼要的介绍；既有基本的解法，又编入了理论性较强的某些部份．这样，大家可以根据自己的情况进行取舍．较难的部份都打上了 * 号．对于有条件的院校及基础较好的学生，可以提出较高的要求，为以后学习与研究打下较好的基础．

3．选配了充足的习题以期较好地培养学生分析问题解决问题的能力．

在每一节每一章都选配了相当多的习题，有计算题、证明题及应用题．使学生通过做习题得到很好的训练．特别是选了一批适合学生独立钻研的证明题，对于培养学生的论证能力很有益处．

4．力求文字通畅，便于自学．

本书是在1966年前的几版铅印稿及1977年的油印稿的基础上修订而成，虽然我们做了一定的努力，但是问题及错误肯定是会有的，请使用本教材的教师及同学提出宝贵的意见．

目　　录

第一章　初等积分法

§1.1　微分方程与解…………（1）
§1.2　变量可分离方程…………（9）
§1.3　齐次方程…………（15）
§1.4　一阶线性方程…………（21）
§1.5　全微分方程及积分因子…………（27）
§1.6　方向场·欧拉折线…………（35）
§1.7　初值问题解的存在与唯一性定理·奇解·包络…………（39）
§1.8　一阶隐式微分方程…………（46）
§1.9　一阶微分方程的应用举例…………（54）
§1.10　几种可降阶的高阶方程…………（63）
§1.11　微分方程组的初等积分法…………（68）
*§1.12　微分方程组在计算人造地球卫星轨道上的应用…………（75）

第二章　变分法大意

§2.1　欧拉方程…………（86）
§2.2　欧拉方程的积分法…………（89）
*§2.3　等周问题…………（95）

第三章　基本定理

§3.1　解的存在性与唯一性定理…………（101）
§3.2　解的延展…………（110）
§3.3　解对初值的连续相依性…………（114）
*§3.4　解对初值的可微性…………（117）
§3.5　关于微分方程组的基本定理…………（120）
§3.6　关于高阶微分方程式的基本定理…………（121）

第四章　线性微分方程

§4.1　线性方程的一般性质…………（124）
§4.2　n 阶线性齐次微分方程…………（128）

§4.3 n阶线性非齐次方程……(139)
§4.4 n阶常系数线性齐次方程解法……(143)
§4.5 n阶常系数线性非齐次方程解法……(152)
§4.6 二阶常系数方程与振动现象……(160)
§4.7 幂级数解法……(166)
*§4.8 二阶线性方程解的振动性质……(169)

第五章 线性微分方程组

§5.1 线性微分方程组的一般概念……(176)
§5.2 线性齐次方程组的一般理论……(179)
§5.3 线性非齐次方程组……(186)
§5.4 常系数线性微分方程组……(188)
§5.5 应用举例……(202)

第六章 定性理论和稳定性理论简介

§6.1 奇点附近的轨线分布……(211)
*§6.2 极限环……(224)
§6.3 李雅普诺夫稳定性……(232)

习题答案……(239)

第一章　初等积分法

§1.1　微分方程与解

1°. 读者在开始本课程时，第一个理所当然的问题，自然是：什么是微分方程？为了说明这个问题，先复习一下关于方程的一些基本概念.

所谓**方程**，在数学中是指那些含有未知量的等式，它表达了未知量所必须满足的某种条件. 方程的类型是繁多的，其分类的主要依据就是对未知量所施加的数学运算.

例如，在方程

$$x^3-2x+1=0;$$

$$\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+x}=1;$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{x-1}{x}=2$$

中，对未知数 x 所施加的是代数运算，因此它们都是**代数方程**.

在方程

$$\sin x+\cos x=1;$$

$$\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2};$$

$$e^x=x^2+2x-1$$

中，对未知量 x 所施加的是超越函数的运算，因此上列方程是**超越方程**.

微分方程与上述方程不同，它的未知量是**未知函数**，而施加于未知函数的运算则是**导数**或**微分**运算. 本课程是研究**常微分方程**的，方程中的未知函数都是**一元函数**，导数也就自然是对仅有的自变量的导数. 下列方程都是常微分方程或常微分方程组.

$y'=xy$（x 为自变量，y 为未知函数）；

$(t^2+x)dt+xdx=0$（t，x 何者为自变量任意）；

$y''+2y'-3y=e^x$（x 为自变量，y 为未知函数）；

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\[2mm]\dfrac{dz}{dx}=y+x\end{cases}$$（x 为自变量，y 与 z 为未知函数）.

除了常微分方程以外，还有**偏微分方程**，偏微分方程中的未知函数是**多元函数**，施加于未知函数的运算是偏导数. 例如

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=x+y$（$x$，$y$ 为变量，z 为未知函数）；

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$（x，y，z 为自变量，u 为未知函数）.

本书只讨论常微分方程，偏微分方程留待其它课程去研究.

把以上的叙述概括一下，我们可以较确切地说：**常微分方程就是表达了自变量、未知函数以及未知函数的某些导数（或微分）之间的关系的方程式.**

常微分方程有着深刻而生动的实际背景，它在生产实践与科学技术中产生，而又成为现代科学技术中分析问题与解决问题的一个强有力的工具．下面介绍几个例子.

例1. 自然变化率问题.

我们知道，数学中有一个很重要的数

$$e \doteq 2.71828\cdots\cdots,$$

（字母 e 取自大数学家欧拉—Euler 的姓的第一个字母）它是自然对数的底．在全国统编中学新教材的微积分部分，已经对它做了介绍．这个数之所以为人们所重视，一个主要原因是它与自然界的一个重要现象有关．这个现象就是：很多量（记为 $x(t)$）在随时间 t 的变化过程中（增加或减少），它们对时间 t 的瞬时变化率（即 $x(t)$ 对时间 t 的导数 dx/dt），与该量在该瞬时存有的数量成正比（这个规律有人称为**自然变化律**）.

例如细菌和牲畜的增殖，森林木材储量的增长都服从这个规律.

又如裂变物质（如鐳、鈾等），它们时刻都在裂变成其它的物质（如铅），从而质量逐渐减少．根据测定，它们的裂变速度（即单位时间裂变的质量）与该物质的瞬时存有质量成正比.

再如在某介质中的物体的冷却过程，服从**牛顿（Newton）冷却定律**，它指出：物体的温度的下降速度与该物体的温度和介质的温度之差成正比.

我们来把自然变化律用数学形式表达出来.

设所考虑的变量为 x，时间为 t 于是，有关系

$$\frac{dx}{dt}=kx, \tag{1.1}$$

（当 x 增加时，$k>0$；当 x 减少时，$k<0$）．这是一个关于未知函数 x 的常微分方程.

为了求出未知函数 $x=x(t)$，可以把（1.1）变形为

$$\frac{dx}{x}=kdt,$$

然后两端积分，得到

$$\ln|x|=kt+c_0 \quad (c_0 \text{ 为一常数}).$$

或者

$$x(t)=ce^{kt} \quad (c=\pm e^{c_0}).$$

如果已知在时刻 $t=t_0$ 时，变量 $x=x_0$，应有 $x(t_0)=x_0$．将这个**初始条件**代入上式，应有

$$x_0=ce^{kt_0},\quad c=x_0e^{-kt_0}.$$

从而求得

$$x(t)=x_0e^{k(t-t_0)}.$$

即符合自然变化律的变量，都按以 e 为底的指数函数进行变化.

例2. 抛物线的光学性质.

在中学平面解析几何中已经指出，汽车前灯和探照灯的反射镜面都取为旋转抛物面，就是将抛物线绕对称轴旋转一周所形成的曲面. 将光源安置在抛物线的焦点处，光线经镜面反射就成为平行光线了. 这个问题在平面解析几何中已经作了证明，但是，今天我们要提出两个问题：首先，人们是如何发现抛物线有这个性质的？其次，具有前述性质的曲线是否只有抛物线？这些问题的解决都依赖于常微分方程.

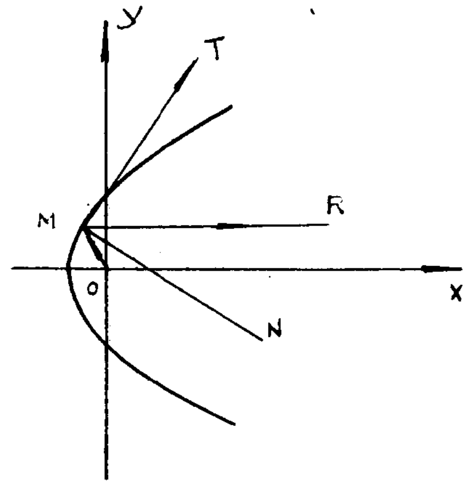

图 1.1

由于对称性，只考虑在过旋转轴的一个平面上的轮廓线 l. 如图 1.1，以旋转轴为 Ox 轴，光源放在原点 $O(0,0)$. 设 l 之方程为 $y=y(x)$. 由 O 点发出之光线经镜面反射后平行于 Ox 轴.

设 $M(x,y)$ 为 l 上任一点. 光线 $\overrightarrow{OM}$ 经反射后为 $\overrightarrow{MR}$. $\overline{MT}$ 为 l 在 M 点的切线. $\overline{MN}$ 为 l 在 M 点的法线，根据光线的反射定律，有

$$\angle OMN=\angle NMR,$$

从而

$$\operatorname{tg}\angle OMN=\operatorname{tg}\angle NMR,$$

因为 $\overline{MT}$ 的斜率为 y'，$\overline{MN}$ 的斜率为 $-\frac{1}{y'}$. 所以由夹角正切公式，有

$$\operatorname{tg}\angle OMN=\frac{-\frac{1}{y'}-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{xy'}},$$

$$\operatorname{tg}\angle NMR=\frac{1}{y'},$$

从而

$$\frac{1}{y'}=-\frac{x+yy'}{xy'-y},$$

即到得微分方程

$$yy'^2+2xy'-y=0. \tag{1.2}$$

于是，求曲线 l 的问题就变成要从上面的微分方程中求未知函数 y 的问题了. 这个问题留待后面去解决，但是可以予先指出，只有抛物线才具有所要求的性质.

例3. 受空气阻力的自由落体.

设质量为m的物体，在时间 $t=0$ 时自由下落，在空气中受到的阻力与物体的下落速度成正比，求物体下落距离与时间的关系、

如图 1.2 建立坐标系．设 x 为物体下落的距离．于是物体下落的速度为

$$v=\frac{dx}{dt},$$

加速度为

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

根据牛顿第二定律 $F=ma$，可以列出方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-k\frac{dx}{dt}+mg, \tag{1.3}$$

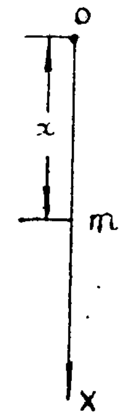

图 1.2

其中 k 为一正比例常数，右端第一项的负号表示阻力与$\frac{dx}{dt}$方向相反．

于是，问题又归结为求满足上述方程的未知函数 $x(t)$ 的问题．

从以上三个例子中我们看到，由实际问题中提出来的微分方程是各式各样的，但是，我们以后会看到，可以把微分方程按照某些属性加以分类，再根据各种类型的特点去进行研究．微分方程分类的依据也是很多的，但是，一个很基本的依据就是在微分方程中所出现的**未知函数的导数的最高阶数**．我们把它称为**微分方程的阶**．例如，方程(1.1)及（1.2）的阶都是 1，因此称它们是**一阶方程**．而（1.3）中未知函数的最高阶数为 2，所以它的阶就是 2，它就是**二阶方程**．以后我们还会看到更高阶的方程．

微分方程的**阶**有点类似代数方程的**次**．而且，以后会看到，有些类型的微分方程的阶数与某些次数等于其阶数的代数方程，有着极为密切的联系，请读者加以注意．

一阶常微分方程的一般形式可以表为

$$F(x,y,y')=0, \tag{1.4}$$

或

$$y'=f(x,y), \tag{1.5}$$

或

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0. \tag{1.6}$$

（1.4）称为**一阶隐方程**．（1.5）称为**一阶显方程**．（1.6）称为**微分形式的一阶方程**．

方程（1.2）是一阶隐方程，（1.1）是一阶显方程．

方程

$$x\,dx+y\,dy=0$$

及

$$(t^2+x)\,dt+x\,dx=0$$

都是微分形式的一阶方程．

n 阶显式方程的一般形式记为

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\qquad(1.7)$$

n阶隐式方程的一般形式记为

$$F(x,y,y',\cdots\cdots,y^{(n)})=0.\qquad(1.8)$$

2°. 代数方程与超越方程的主要问题之一就是求方程的**根**. 所谓方程

$$f(x)=0$$

的根x_0是指这样的数，在方程中令 $x=x_0$时，等式

$$f(x_0)=0$$

成立.

与此相类似，微分方程的主要问题之一是求方程的**解**. 一般地说，微分方程的解就是满足方程的函数。可定义如下。

定义1.1. 设函数 $y=y(x)$在〔a,b〕上有定义，且存在n阶导数，如果把$y=y(x)$代入方程

$$F(x,y,y'\cdots\cdots,y^{(n)})=0,\qquad(1.8)$$

得到在区间〔a,b〕上的恒等式

$$F(x,y(x),y'(x),\cdots\cdots,y^{(n)}(x))\equiv0,$$

则称 $y=y(x)$ 为方程（1.8）在〔a,b〕上的一个解.

这个定义是就（1.8）在闭区间〔a,b〕上叙述的，对于其它形式的方程或区间，也可以相应地叙述，在此不去重复了。

易于验证函数

$$y=x^2+c\ (c\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y'=2x$$

的解。

函数

$$y=e^x+c_1x+c_2x\ (c_1,c_2\text{ 为任意常数})$$

为微分方程

$$y''=e^x$$

的解.

例4. 验证函数 $y=\frac{c}{2}x^2-\frac{1}{2c}$（$c$ 为任意常数）为方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

的解。

解. 将所给函数代入方程左端得

$$y'=cx.$$

代入右端得

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)+\sqrt{1+\left(\frac{c}{2}x-\frac{1}{2cx}\right)^2}$$

$$=\frac{c^2x^2-1}{2cx}+\frac{c^2x^2+1}{2|cx|}.$$

当 $cx>0$ 时，两端恒等．当 $cx<0$ 时，两端不恒等．所以，当 $c>0$ 时，所设函数为方程在 $(0,+\infty)$ 上的解；而当 $c<0$ 时，所设函数为方程在 $(-\infty,0)$ 上的解．

例5． 验证函数

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x\ (c_1,\ c_2\text{为任意常数})$$

为方程

$$y''+y=0$$

在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上的解．

解． 事实上，在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有

$$y''=-(c_1\cos x+c_2\sin x),$$

所以在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有

$$y''+y\equiv 0,$$

从而所设函数为方程的解．

为了便于研究方程的解的性质，我们常常考虑解的图象，并且称之为微分方程的**积分曲线**．以后，为了叙述简便，我们对解和积分曲线这两个名词在很多情形都不加以区别．

在很多实际问题中，我们必须求微分方程满足初始条件的解．

例如在例 1 中，设时刻 $t=t_0$ 时，变量 $x=x_0$，函数

$$x(t)=x_0e^{k(t-t_0)}$$

就是方程

$$\frac{dx}{dt}=kx$$

的满足初始条件

$$y(t_0)=x_0$$

的解．

一阶方程 (1.4)、(1.5)及 (1.6) 的初始条件为

$$y(x_0)=y_0.$$

求微分方程的满足初始条件的解的问题称为**初值问题**．方程 (1.5) 的初值问题常记为

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0.\end{cases}\tag{1.9}$$

初值问题也常称为**柯希 (Cauchy) 问题**．初值问题(1.9) 的几何意义是在 xoy 平面上求经过点 $(x_0,\ y_0)$ 的积分曲线．

例6． 求解初值问题

$$\begin{cases} y' = 2x \\ y(1) = 4. \end{cases}$$

解．前面已知函数 $y=x^2+c$（c 为任意常数）的解．为了这函数能满足初始条件 $y(1)=4$，只须将它代入 $y=x^2+c$，即有 $c=3$，于是，$y=x^2+3$ 为所求初值问题的解．

高阶方程也有初值问题．如例3中，因为物体为自由下落，故当时间 $t=0$ 时，速度 $v=\frac{dx}{dt}=0$．同时，时间 $t=0$ 时，物体的位移 $x=0$，因此，物体下落的距离应当满足初始条件

$$x(0)=0, \ \dot{x}(0)=0.$$

（$\dot{x}$ 代表 x 对时间的导数）．

n 阶方程（1.7）及（1.8）的初始条件为

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y'_0, \ \cdots\cdots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}.$$

从前面的讨论中，还可以看到一个重要的事实，就是**微分方程存在含有任意常数的解**．而且，我们也看到，**解中任意常数的个数可以多到与方程的阶数相等**．当这些常数变化时，可以得到方程的无限多个解．于是，我们有如下的定义．

定义1.2. 如果 $y=\varphi(x, c)$ 为一阶方程的解，其中 c 为任意常数，且对于区域 G 中任一点 (x_0, y_0)，该方程满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解都包含在 $y=\varphi(x,c)$ 之中，则称 $y=\varphi(x,c)$ 为该方程在区域 G 上的**通解**．

由上述定义可知，G 上的通解包含了其积分曲线在 G 内的全部的解．

于是，可证 $y=x^2+c$ 为方程 $y'=2x$ 在 xoy 平面上的通解，$y=ce^x$ 也为方程 $y'=y$ 在 xoy 平面上的通解．

n 阶方程的通解的一般形状为

$$y=\varphi(x, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n).$$

我们就不像一阶方程那样去定义了．

例如 $y=c_1\sin x+c_2\cos x$ 为方程

$$y''+y=0$$

的通解．

如果已求得微分方程的通解，要求指定的初始条件的**特解**，可以由初始条件去确定通解中的任意常数．

对于一阶方程而言，设已知通解为 $y=\varphi(x,c)$．要求满足初始条件

$$y(x_0)=y_0$$

的**特解**．为了确定 $y=\varphi(x,c)$ 的 c，将 $y(x_0)=y_0$ 代入，得到方程

$$y_0=\varphi(x_0, c).$$

一个方程一般可以确定出 c 来，设为 c_0，代入通解，即得满足初始条件的解 $y=\varphi(x, c_0)$．

但对于 n 阶方程，因为它的通解中有 n 个任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，所以，为了确定它们，就必须有 n 个初始条件：

$$y(x_0)=y_0, \ y'(x_0)=y'_0, \ \cdots, \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

代入通解 $y=\varphi(x,c_1,c_2\cdots\cdots,c_n)$ 后，得到 n 个方程式

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n) \\ y'_0=\varphi'(x_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,\ c_1,\ c_2,\ \cdots\cdots,\ c_n)\ . \end{cases}$$

一般说来，可以解出 c_1^0，c_2^0，…，c_n^0，代回通解，即得所求初值问题的特解

$$y=\varphi(x,c_1^0,c_2^0,\cdots,c_n^0).$$

例7. 求方程

$$y''+y=0$$

的满足 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 的解.

解. 方程通解为

$$y=c_1\sin x+c_2\cos x.$$

求导数后得

$$y'=c_1\cos x-c_2\sin x.$$

将初始条件代入，得到方程组

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}c_1+\frac{\sqrt{2}}{2}c_2=1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}c_1-\frac{\sqrt{2}}{2}c_2=-1 \end{cases}$$

解出得

$$c_1=0\ ,\qquad c_2=\sqrt{2}.$$

故所求特解为

$$y=\sqrt{2}\cos x.$$

这一节主要是介绍常微分方程的一些最基本的概念，本章其余的几节将要讨论某些具体类型的常微分方程的**初等解法**. 初等解法也称为**初等积分法**. 其所以称为初等积分法，是因为这些解法最后都把求解的问题化成求积分的问题. 其实，常微分方程求解问题就是求原函数或不定积分的推广. 不定积分是已知未知函数的导数去求原函数，常微分方程则是已知未知函数的导数所满足的方程去求未知函数. 因而，求解常微分方程化成求积分就是很自然的了. 初等解法就是将常微分方程的求解问题化成积分问题，并将方程的通解用初等函数或它的积分表达出来. 凡是能做到这一点的常微分方程，称为**可积的方程**. 下面几节就是介绍某些可求积方程的解法.

习　　题 1.1

1. 指出下列微分方程的阶数：

1）$\frac{dy}{dx}=y^2+x^3$　　　　2）$\frac{d^2y}{dx^2}=x+\sin x$

3）$y^3\frac{d^2y}{dx^2}+1=0$　　　　4）$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=4$

5）$\frac{d^4y}{dx^4}-2\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$

2. 验证给出的函数是否为相应微分方程的解

1）$5\frac{dy}{dx}=3x^2+5x$；　　$y=\frac{x^3}{5}+\frac{x^2}{2}+c$

2）$\frac{dy}{dx}=P(x)y$；　　$y=ce^{\int P(x)dx}$

3）$(x+y)dx+xdy=0$；　　$y=\frac{c^2-x^2}{2x}$

4）$y''=x^2+y^2$；　　$y=\frac{1}{x}$

3. 写出下列曲线族所满足的微分方程

1）$y=e^{cx}$　　2）$y=(x-c)^3$

3）$y=\sin(x+c)$　　4）$x=ay^2+by+c$

4. 写出圆心在x轴上半径为r的圆族的微分方程.

§1.2　变量可分离方程

从本节到§1.5，我们将介绍几种常见的可积的显式一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.5}$$

这些内容虽然简单，但都是常微分方程求解的基本方法，而且在实际中它们还有广泛的应用。

首先，我们来讲最简单的一种类型，就是**变量可分离方程**

$$\frac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y). \tag{1.10}$$

也就是方程（1.5）的右端函数可以分解成两个分别只含x或y的因子.

这种方程与代数中的可分解因式的方程有些类似，代数方程只要可以分解为一次或二次因子，就立即可以用公式求根了. 相类似的，只要（1.5）可以写成（1.10），求解就好办了，因为（1.10）可以变形为

$$\frac{dy}{\varphi(y)}=f(x)dx.$$

这个方程两端都是只含一个变量的微分式，可以进行积分

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c.$$

于是就得到未知函数y与自变量x的关系了. 这就是变量可分离方程求解的基本方法. 但是，由于（1.10）是我们所接触到的第一类具体的方程，我们还要对它的解法较详细地予以说明.

首先，我们总是假定在$f(x)$与$\varphi(y)$连续的区域内来进行讨论.

其次，我们指出：**假如常数y_0使得$\varphi(y_0)=0$，则函数$y=y_0$为(1.10)的常数解**. 事实上，以$y=y_0$代入（1.10），两端都恒等于0，从而使方程变成恒等式，因此，$y=y_0$是（1.10）的解.

下面来探讨在$\varphi(y)\neq 0$的情形下，方程（1.10）的求解方法.

先进行分析，设$y(x)$为（1.10）在$[a,b]$上的一个解，根据解的定义，在$[a,b]$上应有恒等式

$$\frac{dy(y)}{dx}\equiv f(x)\varphi(y(x)).$$

因为$\varphi(y)\neq 0$，于是有

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)dx.$$

两端积分，得到

$$\int\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int f(x)dx+c,$$

其中c为某一常数. 于是可知$y=y(x)$满足方程

$$\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+c. \tag{1.11}$$

或者说，**$y=y(x)$是由方程（1.11）所确定的一个隐函数.**

再来证明：如果（1.11）存在隐函数$y=y(x)$，则$y=y(x)$必为微分方程(1.10)的解.

事实上，因为$y=y(x)$为（1.11）所确定的隐函数，所以存在常数c，使得

$$\int\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int f(x)dx+c$$

将两端微分，即得

$$\frac{dy(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)dx.$$

因已设$\varphi(y)\neq 0$，故

$$\frac{dy(x)}{dx}\equiv f(x)\varphi(y(x)),$$

即$y=y(x)$为（1.10）的解.

把上述讨论总结起来，就是：方程（1.10）的解完全由隐函数方程（1.11）所确定. 或者说（1.11）**是微分方程（1.10）的解的隐式表达式.**

在常微分方程中，通常把解的隐式表达式称为微分方程的**积分**（请不要与积分学中的积分相混. 但是，人们最初的确是由积分法求得解的隐式表达式的），所以，(1.11)是（1.10）的积分. 又因（1.11）中含有任意常数c，故由它所确定的隐函数也含有任意常数c，即$y=y(x,c)$. 因为（1.11）包含了在$\varphi(y)\neq 0$的区域内的所有的解，故$y=y(x,c)$包含了$\varphi(y)\neq 0$的区域内的所有的解，从而它是（1.10）的通解. 于是，

(1.11) 是方程 (1.10) 的通解的隐式表达式，我们把方程的通解的隐式表达式称为方程的**通积分**. 所以，(1.11) 是 (1.10) 的通积分.

到此，方程 (1.10) 求解问题已完全解决，即首先解 $\varphi(y)=0$，求得常数解 $y=y_0$，再由 (1.11) 求得 $\varphi(y)\neq 0$ 时的通积分.

例1. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.$$

解. 首先，$y=0$ 是方程的解.

当 $y\neq 0$ 时，方程化为

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

两端积分，即得通积分

$$\ln|y|=\ln|x|+c_1,$$

或

$$\ln|y|=\ln|cx|\ (c\neq 0).$$

解出 y，得到 $y\neq 0$ 时的通解

$$y=cx\ (c\neq 0).$$

但是，$c=0$ 时，$y=cx$ 即为 $y=0$，仍为方程的解，故

$$y=cx$$

为方程在整个 xoy 平面上的通解.

例2. 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

解. 首先看到 $y=\pm 1$ 为方程的解.

当 $y\neq\pm 1$ 时，方程的通积分为

$$\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+c_1,$$

即

$$\arcsin y=\arcsin x+c_1.$$

解出 y，得到通解

$$\begin{aligned}y&=\sin(\arcsin x+c_1)\\&=x\cos c_1+\sin c_1\cdot\cos(\arcsin x)\\&=x\sqrt{1-c^2}+c\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

例3. 求方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$$

的满足初始条件 $y(0)=1$ 及 $y(0)=0$ 的解.

解. 易知 $y=\pm 1$ 为方程的解. 解 $y=1$ 显然满足初始条件 $y(0)=1$，故它是所求

的第一个解.

当 $y \neq \pm 1$ 时，方程通积分为

$$\int \frac{2dy}{y^2-1} = x + c_1,$$

即

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + c_1,$$

因此

$$\frac{y-1}{y+1} = ce^x.$$

解出通解为

$$y = \frac{1+ce^x}{1-ce^x}.$$

为求满足初始条件 $y(0)=0$ 的解，以 $y(0)=0$ 代入上解，应有

$$0 = \frac{1+c}{1-c},$$

可解得 $c=-1$. 代入通解，即得满足 $y(0)=0$ 的解

$$y = \frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

在通解公式中，当 c 为负数时，通解所对应的积分曲线位于带形区域 $-1<y<1$ 之中；而当 c 为正数时，它确定了两条积分曲线，其中一条定义于 $-\infty<x<-\ln c$ 上，它位于半平面 $y>1$ 上；另一条定义于 $-\ln c<x<+\infty$，它位于半平面 $y<-1$ 上. 图 1.3 描绘了所给方程的积分曲线的分布状况.

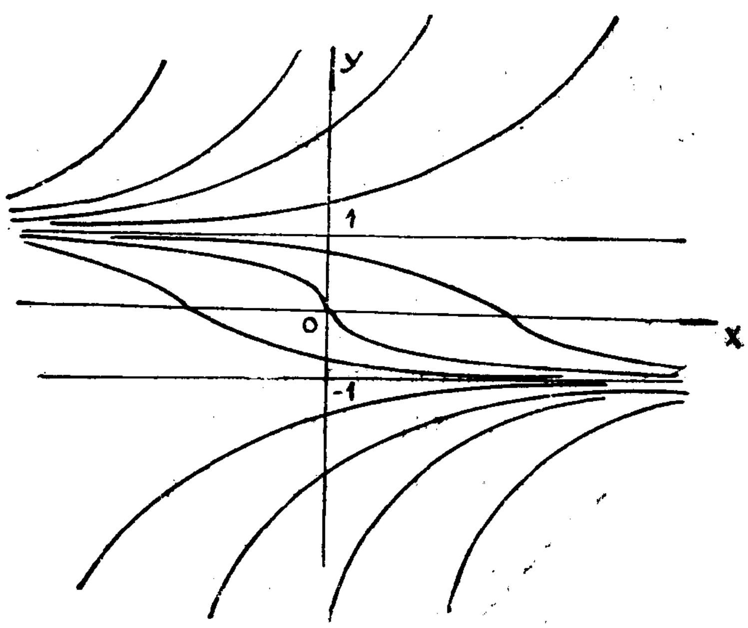

图 1.3

变量分离方程经常以微分的形式出现；即

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0. \tag{1.12}$$

这时，x 和 y 的地位是"平等的"，即 x 与 y 都有可能选为自变量或函数.

首先看到，如果 $N(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 为方程的解. 同样，如果，$P(x_0)=0$，则 $x=x_0$ 也是方程的解. 在求解中不要丢失这些解.

当 $N(y)P(x)\neq 0$ 时，用它除（1.12）两端，方程变成

$$\frac{M(x)}{P(x)}dx+\frac{Q(y)}{N(y)}dy=0.$$

这时，变量已分离了，两端积分，即得通积分

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=c. \tag{1.13}$$

例4. 求解方程

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

解. 首先，易于看出 $y=\pm 1$，$x=\pm 1$ 为方程的解.

两端同除以 $(x^2-1)(y^2-1)$，得到

$$\frac{x\,dx}{x^2-1}+\frac{y\,dy}{y^2-1}=0.$$

积分即得方程的通积分

$$\ln|x^2-1|+\ln|y^2-1|=\ln|c|\quad(c\neq 0).$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=c\quad(c\neq 0).$$

我们注意到，当 $c=0$ 时，这个通积分包括了前面提到的特解 $y=\pm 1$ 和 $x=\pm 1$.

在这里，我们特别指出，在分离变量方程化简的过程中，要注意**丢解**与**增解**的问题. 这个问题与代数方程求根要注意丢根与增根是相似的. 当以某函数 $\mu(x,y)$ 乘方程时，要防止增解；而以 $\mu(x,y)$ 除方程时，要防止丢解；假如 $\mu(x,y)\neq 0$，则用它乘或除方程时，不会有增解或丢解出现. 这个事实说明，在高等数学与初等数学之间，有许多思想是一脉相承的，掌握了这些思想，就可以举一反三，触类旁通.

我们还指出，当求得一个方程的通积分后，通常就认为求解过程已经完成. 一般来说，并不勉强从其中求出解的显式表达式来，因为这一步并不容易做到.

为了求解初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x)\varphi(y),\\ y(x_0)=y_0.\end{cases} \tag{1.14}$$

在通积分（1.13）中采用定积分是比较方便的. 即把（1.13）改为

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx+c.$$

以 $x=x_0$，$y=y_0$ 代入，应有 $c=0$. 于是初值问题（1.14）的解由方程的积分

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx$$

所确定的隐函数给出.