

普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审定

结构力学(下册)

X

包世华 辛克贵 燕柳斌 包世华 主 编 编

武汉工业大学出版社



WUTP

普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会 审定

结 构 力 学 (下 册)

包世华 主 编

包世华 辛克贵 燕柳斌 编



武汉工业大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

结构力学(下册)/包世华主编. —武汉:武汉工业大学出版社,2001.1
ISBN 7-5629-1667-5

I. 结… II. 包… III. 结构力学-高等学校-教材 IV. TU311

内容提要

本书是根据教育部颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中规定的土木工程专业的培养目标和国家教委审定的《结构力学课程教学基本要求》(多学时)新编的《结构力学》教材。

全书共 17 章,分上、下两册出版。上册共 10 章,内容包括:绪论,结构的几何组成分析,静定梁,静定刚架,三铰拱和悬索,静定桁架和组合结构,静定结构总论,影响线,虚功原理和结构的位移计算,力法。下册共 7 章,内容包括:位移法,渐近法和超静定结构的影响线,矩阵位移法(附平面刚架的程序框图设计和源程序),超静定结构总论,结构的动力计算,结构的稳定计算,结构的极限荷载。每章均有本章提要、本章小结、思考题和习题,书后附有习题答案。

本书选材适当,内容精练,说理透彻,符合认识规律,注重联系实际,并反映了本学科的新内容。

本书可作为土木工程专业,即“大土木”的房建、路桥、水利等各类专门化方向的教材,也可作为成人教育、自学考试教材,及供有关工程技术人员参考。

出版者:武汉工业大学出版社(武汉市武昌珞狮路 122 号 邮编:430070)

印刷者:武汉工业大学出版社印刷厂

发行者:各地新华书店

开 本:880×1230 1/16

印 张:17.75

字 数:588 千字

版 次:2001 年 1 月第 1 版

印 次:2001 年 1 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-5629-1667-5/TU·172

印 数:1—10 000 册

定 价:25.00 元

(本书如有印装质量问题,请向承印厂调换)

普通高等学校土木工程专业新编系列教材

编 审 委 员 会

顾 问:成文山 滕智明 罗福午 魏明钟 李少甫
甘绍熺 施楚贤 白绍良 彭少民 范令惠
主 任:江见鲸 吕西林 高鸣涵
副主任:朱宏亮 辛克贵 袁海庆 吴培明 李世蓉
苏三庆 刘立新 赵明华 孙成林

委 员:(按姓氏笔画顺序排列)

于书翰	丰定国	毛鹤琴	甘绍熺	白绍良
白晓红	包世华	田道全	成文山	江见鲸
吕西林	刘立新	刘长滨	刘永坚	刘伟庆
朱宏亮	朱彦鹏	孙家齐	孙成林	过静君
李少甫	李世蓉	李必瑜	吴培明	吴炎海
辛克贵	苏三庆	何铭新	汤康民	陈志源
罗福午	周 云	赵明华	赵均海	尚守平
施楚贤	柳炳康	姚甫昌	胡敏良	俞 晓
桂国庆	顾敏煜	徐茂波	袁海庆	高鸣涵
蒋沧如	谢用九	彭少民	覃仁辉	蔡德明
燕柳斌	魏明钟			

总责任编辑:刘永坚 田道全

秘 书 长:蔡德明

出版说明

1998年7月,教育部颁布了新的普通高等学校本科专业目录,1999年全国高等学校都已按新的专业目录招生。新的土木工程专业专业面大大拓宽,相应的专业业务培养目标、业务培养要求、主干学科、主要课程、主要实践性教学环节等都有了不同程度的变化。原有的教材已经不能适应新专业的培养目标和教学要求,组织一套新的土木工程专业系列教材成为众多院校的翘首之盼。武汉工业大学出版社在中国土木工程学会教育工作委员会的指导和帮助下,经过大量的调研,组织国内29所大学的土木工程学科的教授共同编写了这套系列教材。

本套教材的主、参编人员及编委会顾问遵照1998年1月建设部全国土木建筑工程专业教学指导委员会昆明会议和1998年5月上海的全国土木工程专业系主任会议的精神,经过充分研讨,决定首批编写出版29种主干课程的教材,以尽快满足全国众多院校的教学需要,以后再根据专业方向的需要逐步增补。中国土木工程学会教育工作委员会组织专家审查了本套教材的编写大纲,决定将其作为“中国土木工程学会教育工作委员会审定教材”出版。作为一套全新的系列教材,本套教材的“新”体现在以下几点:

体系新——本套教材从“大土木”的专业要求出发,从整体上考虑专业的课程设置和各部门课程的内容安排,按照教学改革方向要求的学时统一协调与整合,组成一套完整的、各门课程有机联系的系列。整套教材的编写除正文外,大多增加了本章提要、本章重点、例题详解、思考题、习题等,以使教材既适合教学需要,又便于学生自学。

内容新——本套教材中各门课程教材的主、参编人员特别注意了教材内容的更新和吸收各校教学改革的阶段性成果,以适应21世纪土木工程人才的培育要求。

规范新——本套教材中凡涉及土木工程规范的全部采用国家颁布的最新规范。

本套教材是新专业目录颁布实施后的第一套土木工程专业系列教材,是面向新世纪、适应新专业的一套全新的教材。能为新世纪土木工程专业的教材建设贡献微薄之力,自是我们应尽的责任和义务,我们感到十分欣慰。然而,正因其为第一套教材,尽管我们的编审者、编辑出版者夙兴夜寐、尽心竭力,不敢稍有懈怠,它仍然还会存在缺点和不足。嚶其鸣矣,求其友声,我们诚恳地希望选用本套教材的广大师生在使用过程中给我们多提意见和建议,以便我们不断修改、完善全套教材,共同为教育事业的发展作出贡献。

武汉工业大学出版社

2000.2

前 言

本书是为普通高等学校土木工程专业新编系列教材新编的《结构力学》教材。编写依据是教育部颁布实施的《普通高等学校本科专业目录》中所规定的土木工程专业的业务培养目标和国家教委审定的《结构力学课程教学基本要求》(多学时),并参照了建设部全国土木建筑工程专业教学指导委员会制定的《结构力学》课程教学大纲。适用对象为普通高等学校土木工程专业(即“大土木”)各类专门化方向的本科学生,也可供参加高等学校自学考试的学生和有关工程技术人员阅读参考。

结构力学是土木工程各类专门化方向的一门重要的专业(技术)基础课,在基础课与专业课之间起着承上启下的作用,是“大土木”的一门重要的主干课程。本书在编写时,力求取材适当,既要为打好基础精选内容,又要反映本学科的新发展;力求说理透彻、脉络清晰,符合认识规律,既方便教师教,也方便学生自学;力求理论联系实际。

与本教科书相应的“结构力学”的课程学时分配(参考)如下:

章 次	学时数	其 中		备 注
		理论教学时数	实践性教学时数	
1	2	2		1. 总学时数:110
2	4	3	1	2. 考试类别:考试
3	3	2	1	3. 实践性教学指习题课、课堂讨论及上机实践;应保
4	4	3	1	证学生有充分的上机实践时数
5	2	2		4. 道桥类专门化方向影响线学时数可适当增加
6	5	3	2	
7	2	2		
8	8	6	2	
9	8	6	2	
10	10	8	2	
11	6	5	1	
12	6	4	2	
13	14	8	6	
14	2	2		
15	14	12	2	
16	12	10	2	
17	6	6		
合 计	108	84	24	

本书内容略多于以上学时分配。各校可根据自己的教学计划时数有选择地应用,不同专门化方向可以选用不同的内容。书中加“*”号部分为选学、提高的内容。

本书由包世华制定编写大纲。撰稿分工如下:包世华,第1、7(部分)、8、9、12、15、16、17章;辛克贵,第10、11、13、14章;燕柳斌,第2、3、4、5、6、7(部分)章。全书由包世华修改定稿。

本书由教育部高等工科力学课程指导委员会主任、结构力学课程指导组组长、中国工程院院士、清华大学龙驭球教授和清华大学张铜生教授审阅,龙驭球为主审。他们对编写大纲及书稿提出了许多宝贵意见,在此,对他们表示感谢。

由于时间仓促,本书难免存在不足之处,欢迎读者批评指正。

编 者
2000年11月

目 录

11 位移法	(1)
本章提要	(1)
11.1 位移法的基本概念	(1)
11.2 等截面直杆的形常数和载常数	(2)
11.2.1 等截面直杆的形常数	(2)
11.2.2 等截面直杆的载常数	(4)
11.3 位移法的基本未知量和基本体系	(7)
11.3.1 位移法的基本未知量	(7)
11.3.2 位移法的基本体系	(8)
11.4 位移法方程	(9)
11.4.1 位移法方程的建立	(9)
11.4.2 位移法方程的典型形式	(10)
11.5 位移法计算连续梁和无侧移刚架	(12)
11.6 位移法计算有侧移刚架和排架	(16)
11.7 位移法计算对称结构	(23)
* 11.8 支座位移和温度变化时的计算	(25)
11.8.1 支座位移时的计算	(25)
11.8.2 温度变化时的计算	(26)
11.9 用直接平衡法建立位移法方程	(29)
11.9.1 等截面直杆的转角位移方程	(29)
11.9.2 用直接平衡法计算超静定结构	(30)
本章小结	(31)
思考题	(32)
习题	(33)
12 渐近法和超静定结构的影响线	(38)
本章提要	(38)
12.1 渐近法概述	(38)
12.2 力矩分配法的概念	(38)
12.2.1 正负号规定	(38)
12.2.2 结点力偶的分配和传递	(38)
12.3 单结点的力矩分配——基本运算	(42)
12.4 多结点的力矩分配——渐近运算	(45)
12.5 无剪力分配法	(53)
12.5.1 无剪力分配法的应用条件	(53)
12.5.2 剪力静定杆件的固端弯矩	(54)
12.5.3 零剪力杆件的转动刚度和传递系数	(54)
12.6 超静定力的影响线	(58)
12.6.1 用静力法绘制超静定梁影响线的原理	(58)
12.6.2 用机动法绘制连续梁的影响线	(60)
12.7 连续梁的最不利荷载分布及内力包络图	(62)
12.7.1 连续梁的最不利荷载分布	(62)
12.7.2 内力包络图	(63)

本章小结	(65)
思考题	(65)
习题	(66)
13 矩阵位移法	(69)
本章提要	(69)
13.1 概述	(69)
13.1.1 矩阵位移法的基本思路	(69)
13.1.2 结构的离散化与杆端位移、杆端力的正负号规定	(69)
13.2 单元分析(一)——局部坐标系中的单元刚度矩阵	(70)
13.2.1 一般杆单元的刚度矩阵	(71)
13.2.2 单元刚度矩阵的性质	(72)
13.2.3 特殊单元	(72)
13.3 单元分析(二)——整体坐标系中的单元刚度矩阵	(74)
13.3.1 单元坐标转换矩阵	(74)
13.3.2 整体坐标系中的单元刚度矩阵	(75)
13.4 连续梁的整体刚度矩阵	(76)
13.4.1 单元集成法的基本概念	(78)
13.4.2 单元定位向量	(80)
13.4.3 单元集成法的实施	(81)
13.4.4 整体刚度矩阵的性质	(82)
13.5 刚架的整体刚度矩阵	(83)
13.5.1 单元定位向量与单元集成	(83)
13.5.2 铰结点的处理	(85)
13.6 等效结点荷载	(86)
13.7 计算步骤和算例	(89)
13.8 忽略轴向变形的矩形刚架的整体分析	(93)
* 13.9 桁架及组合结构的整体分析	(96)
13.9.1 桁架	(96)
13.9.2 组合结构	(100)
* 13.10 平面刚架程序的框图设计和源程序	(103)
13.10.1 平面刚架程序的框图设计	(103)
13.10.2 平面刚架源程序和算例	(113)
本章小结	(123)
思考题	(123)
习题	(124)
14 超静定结构总论	(126)
本章提要	(126)
14.1 超静定结构基本解法的分类和比较	(126)
14.2 力矩分配法与位移法联合解有侧移刚架	(127)
14.3 超静定结构的近似法	(129)
14.3.1 竖向荷载下的分层计算法	(129)
14.3.2 水平荷载下的反弯点法	(130)
14.4 超静定结构的特性	(133)
14.4.1 多余约束的存在及其影响	(133)
14.4.2 各杆刚度改变对内力分布的影响	(134)

14.4.3	温度和沉降等变形因素的影响	(135)
14.5	关于计算简图的补充讨论	(136)
14.5.1	结构体系的简化	(136)
14.5.2	杆件的简化	(138)
14.5.3	结点的简化	(139)
14.5.4	支座的简化	(139)
	本章小结	(139)
	思考题	(140)
	习题	(140)
15	结构的动力计算	(143)
	本章提要	(143)
15.1	动力计算概述	(143)
15.1.1	动力计算的特点	(143)
15.1.2	动力荷载的分类	(143)
15.1.3	动力计算的自由度	(144)
15.2	单自由度体系的自由振动	(146)
15.2.1	单自由度体系自由振动微分方程的建立	(146)
15.2.2	自由振动微分方程的解答	(147)
15.2.3	结构的自振周期和自振频率	(148)
15.2.4	阻尼对自由振动的影响	(151)
15.3	单自由度体系的受迫振动	(154)
15.3.1	单自由度体系受迫振动微分方程的建立	(154)
15.3.2	简谐荷载作用下结构的动力反应	(154)
15.3.3	一般荷载作用下结构的动力反应	(157)
15.3.4	阻尼对受简谐荷载受迫振动的影响	(159)
15.3.5	有阻尼时的杜哈梅积分	(161)
15.4	两个自由度体系的自由振动	(162)
15.4.1	两个自由度体系自由振动微分方程的建立	(162)
15.4.2	频率方程和自振频率	(163)
15.4.3	主振型及主振型正交性	(166)
15.4.4	两个自由度体系自由振动方程的一般解	(169)
15.5	两个自由度体系在简谐荷载下的受迫振动	(169)
15.5.1	柔度法	(169)
15.5.2	刚度法	(173)
* 15.6	一般多自由度体系的自由振动	(174)
15.6.1	柔度法	(174)
15.6.2	刚度法	(177)
15.6.3	主振型的正交性	(180)
* 15.7	多自由度体系在任意动荷载作用下的受迫振动——振型分解法	(182)
15.7.1	正则坐标与主振型矩阵	(182)
15.7.2	振型分解法	(184)
* 15.8	无限自由度体系的自由振动	(186)
15.9	计算频率的近似法	(188)
15.9.1	能量法求第一频率——瑞利(Rayleigh)法	(189)
15.9.2	集中质量法	(191)

* 15.10 矩阵位移法求刚架的自振频率	(192)
本章小结	(196)
思考题	(197)
习题	(198)
16 结构的稳定计算	(202)
本章提要	(202)
16.1 两类稳定问题概述	(202)
16.1.1 分支点失稳	(202)
16.1.2 极值点失稳	(204)
16.2 稳定问题的分析方法——静力法和能量法	(204)
16.2.1 静力法	(205)
16.2.2 能量法	(207)
16.3 弹性压杆的稳定——静力法	(209)
16.3.1 等截面压杆	(209)
16.3.2 变截面压杆	(212)
16.4 弹性压杆的稳定——能量法	(214)
16.4.1 按单参数体系计算	(214)
16.4.2 按多参数体系计算	(217)
* 16.5 剪力对临界荷载的影响	(221)
16.6 组合压杆的稳定	(222)
16.6.1 缀条式组合压杆	(222)
16.6.2 缀板式组合压杆	(224)
* 16.7 圆环和圆拱的稳定	(225)
16.7.1 圆环和圆拱受均匀静水压力时的稳定	(226)
16.7.2 拱的临界荷载系数和计算长度	(229)
* 16.8 窄条梁的稳定	(231)
* 16.9 刚架的稳定——矩阵位移法	(233)
16.9.1 压杆单元的刚度方程	(234)
16.9.2 刚架的稳定计算	(236)
本章小结	(239)
思考题	(239)
习题	(240)
17 结构的极限荷载	(244)
本章提要	(244)
17.1 极限荷载概述	(244)
17.2 极限弯矩、塑性铰和极限状态	(245)
17.2.1 理想弹塑性材料的矩形截面梁	(245)
17.2.2 有一个对称轴的任意截面梁	(246)
17.2.3 静定梁的极限荷载	(246)
17.3 超静定梁的极限荷载	(247)
17.3.1 超静定梁的破坏过程和极限荷载的特点	(247)
17.3.2 连续梁的极限荷载	(249)
17.4 比例加载时判定极限荷载的一般定理和基本方法	(250)
17.4.1 比例加载时极限荷载的几个定理	(250)
17.4.2 计算极限荷载的机构法和试算法	(252)

17.5 刚架的极限荷载	(254)
17.5.1 机构法	(254)
17.5.2 试算法	(255)
* 17.6 矩阵位移法求刚架的极限荷载	(256)
17.6.1 增量变刚度法的基本思路	(256)
17.6.2 单元刚度矩阵的修正	(259)
17.6.3 增量变刚度法求刚架极限荷载的计算步骤	(260)
本章小结	(264)
思考题	(264)
习题	(265)
附录 习题答案	(267)
参考文献	(271)

11 位移法

本章提要

本章讨论用位移法计算超静定结构。首先介绍位移法的基本概念和基本原理,讨论了如何确定位移法的基本未知量,如何选取位移法的基本体系和建立位移法的基本方程。作为应用,分别讨论了用位移法计算连续梁、刚架和排架等超静定结构。讨论用位移法计算超静定结构在支座移动和温度变化时的内力计算。最后介绍了用直接平衡法建立位移法方程。

11.1 位移法的基本概念

力法和位移法是计算超静定结构的两种基本方法。力法发展较早,19世纪末已经应用于分析各种超静定结构。而位移法稍晚,是在20世纪初为了计算复杂刚架而建立起来的。

力法是以多余约束力为基本未知量,通过变形条件建立力法方程,求出未知量后,即可通过平衡条件计算出结构的全部内力。

位移法是以结构的结点位移作为基本未知量,通过平衡条件建立位移法方程,求出位移后,即可利用位移和内力之间的关系,求出杆件和结构的内力。

现以图 11.1(a)所示结构为例说明位移法的基本思路。

图 11.1(a)所示刚架,在给定荷载作用下,杆件 AC 和 CB 将发生变形,在忽略杆件轴向变形条件下,结点 C 只发生角位移 θ_c 。当用位移法计算时,我们将结点角位移 θ_c 作为基本未知量(由刚结点的变形连续条件可知,结构在结点 C 的角位移,也就是杆件 CB 和 CA 的杆端角位移)。如果能设法把位移 θ_c 求出,则 CB 和 CA 各杆的变形就可求出,从而可求出各杆的内力。

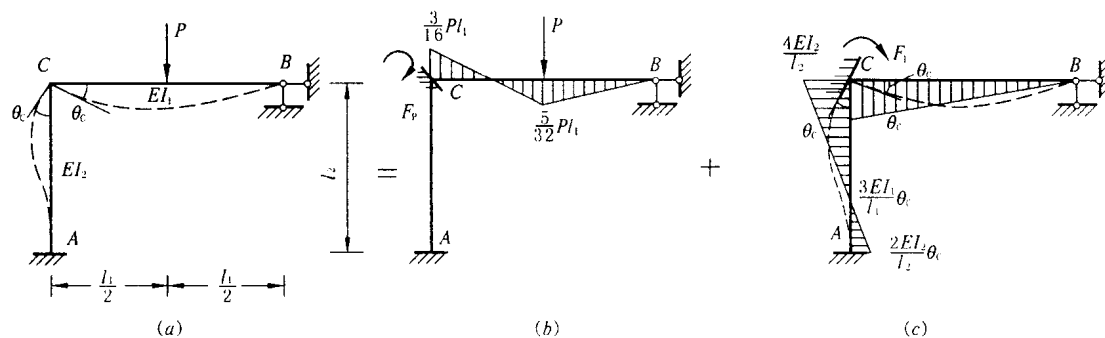


图 11.1 位移法解题思路示意图

(a)原结构;(b)荷载作用;(c)结点位移作用

现讨论如何求基本未知量 θ_c 的问题,计算分为两步:

第一步,增加约束,将结点位移锁住。此时结构实际上变为两根超静定杆。在荷载作用下,这两根杆的弯矩可用力法求出,如图 11.1(b)所示。这时,在结点 C 处施加了一个外部约束力矩 $F_p = -\frac{3Pl_1}{16}$ 。

第二步,施加力偶,使结点 C 产生角位移 θ_c ,两根超静定杆在 C 端有转角 θ_c 时弯矩图也可由力法求出,如图 11.1(c)所示。这时,在结点 C 处施加了外部力矩 $F_1 = \frac{3EI_1}{l_1}\theta_c + \frac{4EI_2}{l_2}\theta_c$ 。

这里将实际结构的受力和变形[图 11.1(a)]分解成了两部分:一部分是荷载单独作用下的结果,如图

11.1(b)所示。此时只有荷载作用,而无结点C的角位移;另一部分是结点位移单独作用下的结果,如图11.1(c)所示。此时只有结点C的角位移,而无荷载作用。反过来,将图11.1(b)和(c)所示两种状态叠加起来,即成为实际结构。而实际结构在结点C处是没有外加约束力矩的,因此由图11.1(b)和(c)叠加后的结果,在结点C处也不应有外加力矩,即

$$\begin{aligned} F_1 + F_P &= 0 \\ \left(\frac{3EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2}\right)\theta_C - \frac{3Pl_1}{16} &= 0 \end{aligned} \quad (a)$$

从而求出

$$\theta_C = \frac{\frac{3Pl_1}{16}}{\frac{3EI_1}{l_1} + \frac{4EI_2}{l_2}}$$

将 θ_C 代回图11.1(c),将所得的结果再叠加上图11.1(b)的结果,即得到图11.1(a)所示原结构的解。

从以上分析过程,可得位移法要点如下:

(1)位移法的基本未知量是结点位移[图11.1(a)中结点C的角位移 θ_C]。

(2)位移法的基本方程是平衡方程[结点C的力矩平衡方程(a)]。

(3)建立基本方程的方法是:先将结点位移锁住,求各超静定杆在荷载作用下的结果;再求各超静定杆在结点位移作用下的结果。最后叠加以上两步结果,使外加约束中的约束力等于零,即得位移法的基本方程。

(4)求解位移法方程,得到基本未知量,从而求出各杆内力。

这就是位移法的基本思路和解题过程。

11.2 等截面直杆的形常数和载常数

由上节讨论知道,位移法的基础是杆件分析。为此,需先研究杆件(单跨超静定杆)杆端力和杆端位移、荷载之间的关系。

11.2.1 等截面直杆的形常数

图11.2所示为一等截面直杆AB的隔离体,杆件材料和截面惯性矩 EI 为常数,杆端A和B的角位移分别为 θ_A 和 θ_B ,杆端A和B在垂直于杆轴AB方向的相对线位移为 Δ ,弦转角 $\varphi = \frac{\Delta}{l}$,杆端A和B的弯矩和剪力分别为 M_{AB} 、 M_{BA} 、 Q_{AB} 、 Q_{BA} 。

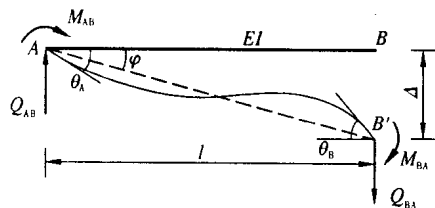


图11.2 杆端位移和杆端力

在位移法中,采用以下正负号规则:

杆端角位移 θ_A 、 θ_B 以顺时针转向为正;杆两端相对线位移 Δ (或 φ),以使杆件产生顺时针转动时为正。

杆端弯矩 M_{AB} 、 M_{BA} 以顺时针转向为正;杆端剪力 Q_{AB} 、 Q_{BA} 以使作用截面产生顺时针转动时为正。

采用位移法分析等截面直杆时,关键是要用杆端位移表示杆端力。当杆端位移是单位值(即等于1)时,所得的杆端力称为等截面直杆的刚度系数。因刚度系数只与杆件材料性质、尺寸及截面几何形状有关,也称为形常数。

(1)当A端作为固定端,有角位移 $\theta_A = 1$ 时的形常数。

①B端为固定端[图11.3(a)]

当A端位移为 θ_A 时,可由力法计算得到

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= 2i_{AB}\theta_A \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{6i_{AB}}{l}\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

其中 $i_{AB} = \frac{EI}{l}$ 称为杆 AB 的线刚度。当 $\theta_A = 1$ 时, 杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为 $4i_{AB}$, B 端弯矩的形常数为 $2i_{AB}$, A 端和 B 端剪力的形常数为 $-\frac{6i_{AB}}{l}$ 。

② B 端为铰支端[图 11.3(b)]

当 A 端位移为 θ_A 时, 同理可由力法求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 3i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= 0 \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = -\frac{3i_{AB}}{l}\theta_A \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

可知当 $\theta_A = 1$ 时, 杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为 $3i_{AB}$, A 端和 B 端剪力的形常数则为 $-\frac{3i_{AB}}{l}$ 。

③ B 端为滑动支座[图 11.3(c)]

当 A 端位移为 θ_A 时, 可求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i_{AB}\theta_A \\ M_{BA} &= -i_{AB}\theta_A \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

可知当 $\theta_A = 1$ 时, 杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为 i_{AB} , B 端弯矩的形常数为 $-i_{AB}$, A 端和 B 端剪力的形常数则为零。

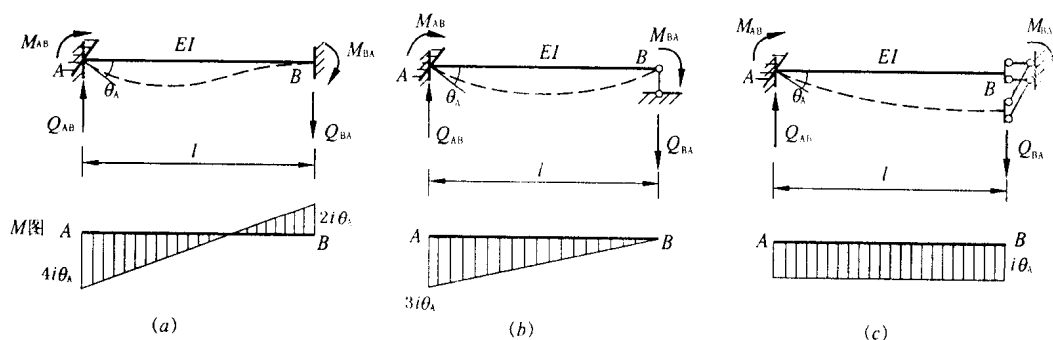


图 11.3 A 端位移为 θ_A 时的杆端弯矩

(a) B 端固定; (b) B 端铰支; (c) B 端滑动支座

(2) 当 A 端作为固定端, 而 AB 两端有相对杆端线位移 $\Delta = 1$ 时的形常数。

① B 端为固定端[图 11.4(a)]

当 B 端有线位移 Δ 时, 同样可由力法求得

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= M_{BA} = -\frac{6i_{AB}}{l}\Delta \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = \frac{12i_{AB}}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

当 $\Delta = 1$ 时, 得到杆 AB 的 A 端和 B 端弯矩的形常数为 $-\frac{6i_{AB}}{l}$, 剪力的形常数则为 $\frac{12i_{AB}}{l^2}$ 。

② B 端为铰支座[图 11.4(b)]

当 B 端有线位移 Δ 时, 可得到

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= -\frac{3i_{AB}}{l}\Delta \\ M_{BA} &= 0 \\ Q_{AB} &= Q_{BA} = \frac{3i_{AB}}{l^2}\Delta \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

当 $\Delta = 1$ 时, 得到杆 AB 的 A 端弯矩的形常数为 $-\frac{3i_{AB}}{l}$, A 端和 B 端剪力的形常数则为 $\frac{3i_{AB}}{l^2}$ 。

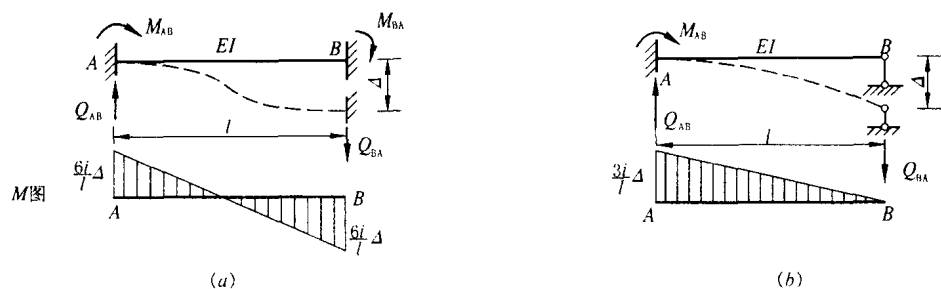


图 11.4 有杆端相对线位移 Δ 时的杆端弯矩

(a) B 端固定; (b) B 端铰支

各种情形的形常数见表 11.1。形常数用 $\bar{M}_{AB}$ 、 $\bar{M}_{BA}$ 、 $\bar{Q}_{AB}$ 、 $\bar{Q}_{BA}$ 表示。

等截面直杆的形常数

表 11.1

编 号	简 图	弯 矩		剪 力	
		$\bar{M}_{AB}$	$\bar{M}_{BA}$	$\bar{Q}_{AB}$	$\bar{Q}_{BA}$
两 端 固 定	1 	$4i$	$2i$	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$
	2 	$-\frac{6i}{l}$	$-\frac{6i}{l}$	$\frac{12i}{l^2}$	$\frac{12i}{l^2}$
一 端 固 定 一 端 铰 支	3 	$3i$	0	$-\frac{3i}{l}$	$-\frac{3i}{l}$
	4 	$-\frac{3i}{l}$	0	$\frac{3i}{l^2}$	$\frac{3i}{l^2}$
一 端 固 定 一 端 滑 动	5 	i	$-i$	0	0

11.2.2 等截面直杆的载常数

在等截面直杆中,当杆两端固定(或一端固定、一端铰支,或一端固定、一端滑动,均称为固端),只受荷载作用时,所得的杆端力,通常称为固端力(包括固端弯矩和固端剪力)。因固端力与杆件所受荷载的形式有关,

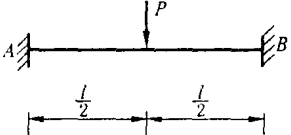
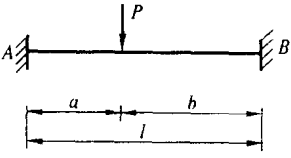
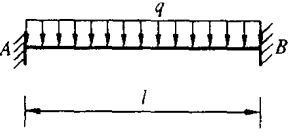
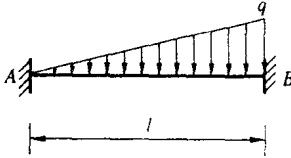
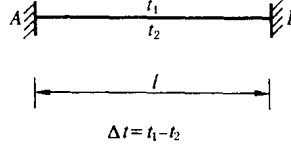
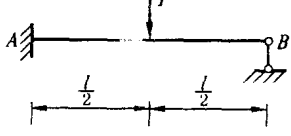
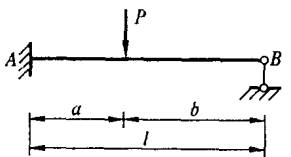
也称为载常数。同样,可利用力法求得各种荷载作用下的杆件固端力。

常用的载常数见表 11.2。载常数用 M_{AB}^F 、 M_{BA}^F 、 Q_{AB}^F 、 Q_{BA}^F 表示。

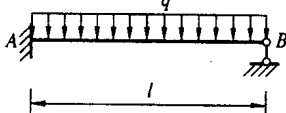
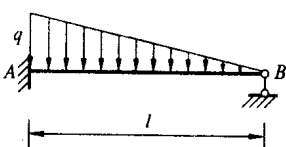
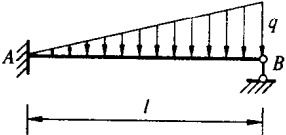
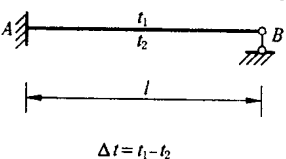
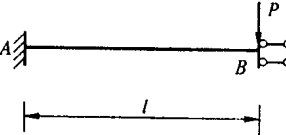
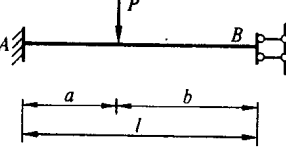
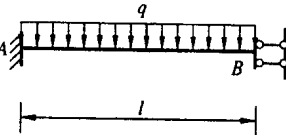
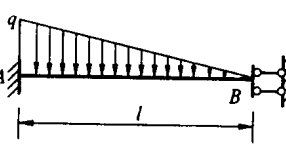
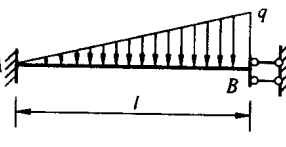
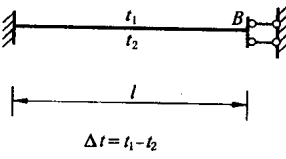
表 11.1 和表 11.2 中的杆端弯矩(包括固端弯矩)、杆端剪力(包括固端剪力)一律以顺时针转向为正。

等截面直杆的载常数

表 11.2

编 号	简 图	弯 矩		剪 力	
		M_{AB}^F	M_{BA}^F	Q_{AB}^F	Q_{BA}^F
两 端 固 定	1 	$-\frac{Pl}{8}$	$+\frac{Pl}{8}$	$+\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	2 	$-\frac{Pab^2}{l^2}$	$+\frac{Pa^2b}{l^2}$	$\frac{Pb^2}{l^2}(1+\frac{2a}{l})$	$-\frac{Pa^2}{l^2}(1+\frac{2b}{l})$
	3 	$-\frac{1}{12}ql^2$	$+\frac{1}{12}ql^2$	$+\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql}{2}$
	4 	$-\frac{1}{30}ql^2$	$+\frac{1}{20}ql^2$	$+\frac{3}{20}ql$	$-\frac{7}{20}ql$
	5 	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0
一 端 固 定 一 端 铰 支	6 	$-\frac{3}{16}Pl$	0	$+\frac{11}{16}P$	$-\frac{5}{16}P$
	7 	$-\frac{Pb(l^2-b^2)}{2l^2}$	0	$+\frac{Pb(3l^2-b^2)}{2l^3}$	$-\frac{Pa^2(3l-a)}{2l^3}$

续表 11.2

编 号	简 图	弯 矩		剪 力	
		M_{AB}^F	M_{BA}^F	Q_{AB}^F	Q_{BA}^F
一端固定 一端铰支	8 	$-\frac{1}{8}ql^2$	0	$+\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$
	9 	$-\frac{1}{15}ql^2$	0	$+\frac{2}{5}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
	10 	$-\frac{7}{120}ql^2$	0	$+\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
	11  $\Delta t = t_1 - t_2$	$\frac{3EI\alpha\Delta t}{2h}$	0	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$	$-\frac{3EI\alpha\Delta t}{2hl}$
一端固定 一端滑动	12 	$-\frac{1}{2}Pl$	$-\frac{1}{2}Pl$	+P	$B_{\text{左}} + P$ $B_{\text{右}} 0$
	13 	$-\frac{Pa}{2l}(2l-a)$	$-\frac{Pa^2}{2l}$	+P	0
	14 	$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	+ql	0
	15 	$-\frac{1}{8}ql^2$	$-\frac{1}{24}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	0
	16 	$-\frac{5}{24}ql^2$	$-\frac{1}{8}ql^2$	$+\frac{1}{2}ql$	0
	17  $\Delta t = t_1 - t_2$	$\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	$-\frac{EI\alpha\Delta t}{h}$	0	0