# 目　录

## 第一章　概　论



## 第二章　随机变量和随机过程



## 第三章　随机场的离散分析模型

## 第四章　蒙特卡罗模拟和蒙特卡罗有限元法



## 第五章　摄动随机有限元法



## 第六章　纽曼级数展式与纽曼随机有限元法



## 第七章　随机有限元法的误差估计

# 第一章　概　　论

本章概要叙述有限元法和随机有限元法的特点和分析过程，还简述了随机有限元法的发展概况和应用前景。

## §1.1　有限元法和随机有限元法

实际问题往往是十分复杂的，人们难以一下就弄清复杂的环境和结构的性态，因此经常设法寻求解决问题的近似方法。在众多的近似方法中，十分具有吸引力的一个方法是有限元法（Finite Element Method），它是使各种工程问题获得近似解的一种数值分析技术。有限元法最初是用于复杂的航空结构的应力分析。随着计算机的发展和普及，又由于方法的灵活性和通用性，有限元法已广泛应用于各类科学技术问题的理论研究和实际计算之中。

### 1.　离散与集合

离散与集合是有限元法的精髓。有限元法把求解区域看作由许多小的互相连接的子区域或单元构成，即它是用一组离散单元的集合体来代替求解区域。由于单元的剖分是任意的，并且可按各种不同的方式组合在一起，所以能灵活地用来表示十分复杂的几何形状。

随着数字电子计算机的出现和发展，求解离散的问题一

般都比较容易实现，即便单元或自由度的数目非常之大。有限元法是用数学表述连续体问题的一种一般性的离散化方法。广义而言，这种离散化指的是：把连续体分成有限个部分，其性态由有限个参数来表征，而后求解作为其单元集合体的整个系统，它所遵循的条件与原问题完全相同。这样的近似，可以是传统的数学近似或是工程上的直接近似。于是，在有限元分析中，这个离散的概念包含了两方面内容，其一是结构的剖分，用有限个单元来替代原结构，每个单元的特性可通过别的计算或实验结果完全确定；其二是单元的组集，即对每个单元所确定的特性关系进行求和。这是一个很有规律且十分简捷的过程，因为某个单元的刚度系数一经算出，就可直接放到计算机中指定的适当“位置”处。需要注意的是，如果采用不同类型的单元，在组集求和时必须满足矩阵求和的规则，只有阶数相同的矩阵才能相加，因此要相加的各个子矩阵，必须由力或位移分量数目相应的项组成。有限元法十分适宜处理非线性问题，因为在许多非线性领域中，推导单元特性的原理及组集的方法都是与线性问题相同的。

## 2. 有限元法的分析过程

有限元法的特点之一是通用性强，分析过程规范，适宜于利用计算机。概括而言，此分析过程的计算步骤如下：

(1) 结构的离散化

结构的离散化是把要分析的结构分成有限个单元体，并在单元体的指定位置设置节点，把相邻单元在节点处连接起来组成单元的集合体，以代替原来的结构。为了有效地逼近实际的连续体，需要根据计算精度的要求和使用计算机的容

量大小，合理地选择单元的形状，确定单元的数目和较优的网格划分方案。

(2) 选择位移插值函数

为了能用节点位移来表示单元内任意一点的位移、应变和应力，可假定单元内任意一点的位移是坐标的某种简单函数，称为位移插值函数。即

$$\underset{\sim}{f} = \underline{N}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1.1.1}$$

式中，$\underset{\sim}{f}$ 为单元内任意一点的位移列矩阵，$\underset{\sim}{\delta}_e$ 为单元的节点位移列矩阵，$\underline{N}$ 为形状函数矩阵。

(3) 单元分析

利用弹性力学的几何方程，导出用节点位移表示的单元应变 $\underset{\sim}{\varepsilon}$，即

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underline{B}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1.1.2}$$

式中，$\underline{B}$ 是几何矩阵。

利用物理方程，导出用节点位移表示的单元应力 $\underset{\sim}{\sigma}$，即

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underline{D}\,\underline{B}\,\underset{\sim}{\delta}_e = \underline{S}\,\underset{\sim}{\delta}_e \tag{1.1.3}$$

式中，$\underline{S}$ 是单元应力矩阵，$\underline{D}$ 是弹性矩阵。

利用最小势能原理或虚功原理建立作用于单元上的节点力和节点位移之间的关系式，即单元的有限元方程

$$\underline{K}_e\,\underset{\sim}{\delta}_e = \underset{\sim}{F}_e \tag{1.1.4}$$

$$\underline{K}_e = \int_V \underline{B}^T\,\underline{D}\,\underline{B}\,dV$$

式中，$\underline{K}_e$ 为单元刚度矩阵，$\underset{\sim}{F}_e$ 为等效节点荷载列阵。

(4) 计算等效节点荷载$\underset{\sim}{F}$。

连续体经过离散化以后，假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元。但是实际的连续体，力是从单元的公共边界传递到另一个单元的。因此，作用在单元上的集中力、体积力以及作用在边界单元上的表面力，都必须通过等效原则移置到节点上去，即形成等效节点荷载列阵$\underset{\sim}{F}$。

(5) 整体分析

集合所有单元的有限元方程，建立整个结构的平衡方程，即有限元基本方程

$$\underline{K}\,\underset{\sim}{\delta}=\underset{\sim}{F} \tag{1.1.6}$$

式中，$\underline{K}$为结构的总体刚度矩阵，$\underset{\sim}{\delta}$为结构的节点位移列阵，$\underset{\sim}{F}$为结构的等效节点荷载列阵。

(6) 引入位移边界条件

应用位移边界条件，对(1.1.6)式进行修正，消除总刚度矩阵$\underline{K}$的奇异性，使有限元基本方程可以进行求解。

(7) 求解结构平衡方程

结构的平衡方程，即有限元基本方程是以总刚度矩阵$\underline{K}$为系数矩阵的线性代数方程组。解这个方程组可以求得未知的节点位移。

(8) 计算单元应力

按(1.1.3)和(1.1.2)式分别由节点位移计算求得单元的应力和应变。

对于上述有限元分析过程，可用图1.1的计算流程框图表示。

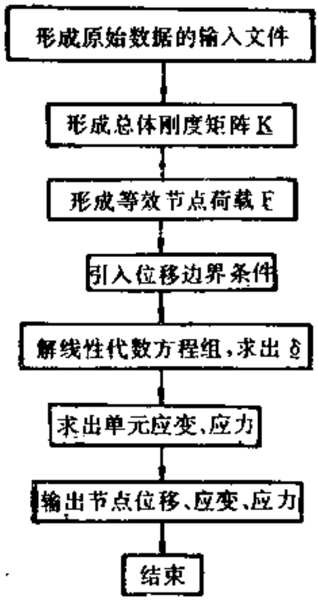


图 1.1　有限元计算流程图

### 3. 随机有限元法

随机有限元法 (Stochastic Finite Element Method) 或称为概率有限元法 (Probabilistic FEM) 是在传统有限元方法的基础之上发展起来的随机的数值分析方法，它是随机分析理论与有限元方法相结合的产物。

在各类工程结构中，存在着很多不确定因素的影响，诸如结构的物理性质、几何参数等结构本身的属性和结构所承受的某些荷载（例如风荷载、波浪荷载以及地震荷载等）。由于人们认识的局限性和它们本身的不确定性，这些因素被

描述为空间或时间的随机场函数或随机过程。由于这些随机性因素的影响是不可忽略的，致使结构的行为不再是确定的，而具有了偶然性，表现为随机的场函数和时间函数。于是结构行为的分析就有了新的内容。经过结构分析之后，人们在了解对应于作随机变化的结构属性（物理性质、几何参数等）和结构荷载每一给定值的结构的行为（位移、应变和应力）的同时，还必须知道结构的行为函数的概率分布。问题变得复杂了。以弹性力学问题为例，当结构的弹性系数有随机扰动时，结构的位移、应变和应力的“增量”是这个扰动量的随机的、非线性函数。要确定这个函数关系是比较困难的。数学上，这个问题可以模型化为求解一类椭圆边值问题，这时的偏微分算子作随机扰动。对于确定的非线性结构问题摄动方法是常用的、有效的分析方法。对于随机问题，目前，它同样起着重要的作用。

一般地，结构系统的随机分析可分为两类：一类是统计方法，就是通过样本试验收集原始的数据资料，运用概率和统计理论进行分析和整理，然后作出科学的推断。这种方法需要进行大量的样本试验和数据处理工作且计算的工作量很大。目前，由于电子计算机的出现和大量使用，使得模拟法成为最常用的统计逼近法，例如，蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟就是一类典型的统计方法。另一类方法是非统计方法，这种方法从本质上来说是利用分析的工具找出结构系统（确定的或随机的）输出的随机信号信息与输入随机信号信息之间的关系。这种方法不需要进行大量的样本试验和数据分析，而是采用随机分析与求解系统控制方程相结合的方法得到输出信号的各阶随机统计量的数字特征，如各阶原点矩

（或中心矩）。这类方法的优点是对输入的随机信号的了解并不很充分的条件下，例如只知道信号的某几阶数字特征，运用解析的或数值的分析工具（微分方程理论、变分理论、有限元理论、边界元理论等），可以得到一定精确程度的解。根据以上的分类，随机有限元法同样地也有统计逼近和非统计逼近两种类型。目前所说的随机有限元法包括有摄动随机有限元法、纽曼（Neumann）随机有限元法和蒙特卡罗（Mante Carlo）有限元法（统计有限元法），其中摄动随机有限元法用得最多。

摄动随机有限元法（P.S.FEM），顾名思义是指结合了摄动方法与有限元法的一种随机有限元法。此法在假定随机变量的小参数扰动的前提下，将有限元基本方程中的刚度矩阵按这些随机变量泰勒展开，从而得到关于这些随机变量的非线性方程。利用小参数的摄动法，将这个随机的非线性方程转化为一组线性的确定的递归方程组。求解这个递归方程组便可得到位移解的各阶摄动系数。在假定已知这些随机变量的均值和相关系数的前提下，便可得位移和应力解的均值和方差。

目前，随机有限元法已经得到了相当的发展，并且对随机问题的处理已显示出其非凡的能力和广阔的应用前景。

## §1.2 随机有限元法的发展概况

不同于一般的有限元理论，随机有限元法面临的最大困难来自于对随机算子和随机矩阵的求逆运算，为此人们做了大量的工作。对于随机刚度矩阵的小参数扰动问题，人们

首先考虑的是小参数摄动技术。70年代初，Collins和Thompsan (1969)，Shinozuka和Astill (1972) 分别独立地运用摄动技术研究了随机系统的特征值问题；Hart和Collins (1970) 研究了随机的有限元模型；Handa (1975) 最先利用随机有限元法对结构进行静力分析。而后Nakagiri和Hisada (1981) 对基于摄动技术的随机有限元法作了比较系统的研究。他们不仅将随机有限元法用于静力分析，而且还用于具有不确定阻尼的结构系统的振动分析。然而，这时的随机有限元法要求给定随机变量的分布函数或谱密度函数。这个条件是比较苛刻的，因此在实际应用时会遇到困难。随后Vanmarcke等人 (1983) 提出了随机场的局部平均理论并将它引入随机有限元法。局部平均理论是用随机场函数在每一个离散单元上的局部平均的随机变量来代表该单元的统计量的近似理论。由于随机场函数经过局部平均而形成的随机向量的各分量具有对原随机场函数的相关性不敏感的特点，因之基于局部平均理论的随机有限元法只要求给定原随机场的均值、方差以及相关偏度便可以得到解函数的二阶统计量，从而降低了对输入随机信息的要求，使方法趋于实用化。朱位秋等人 (1986) 也做了类似的工作。Liu W.K.及其同事们 (1986，1988) 的系列工作，对摄动随机有限元法的发展做出了贡献。他们利用此方法分析了结构在随机激励下的动态响应。在分析过程中，他们提供了一种“主模态”技术，即运用随机变量的特征正交化方法，将满秩的协方差矩阵变换为对角矩阵，从而减少了计算工作量。陈虬和李贤兴 (1989) 将特征正交化技术和局部平均理论结合，提出了一种新的随机场离散模型并建立了等参局部平均单元，在一定

程度上扩大了随机有限元法的应用范围。陈虬和刘先斌（1990，1991，1992）研究了摄动的变分列式解的存在性与唯一性并给出了明确的误差界。上述的随机有限元法，在列式过程中对随机扰动利用了中心摄动法来处理，于是要求随机变量的扰动是微小的，因而限制了随机有限元法的使用。近年来，有不少学者致力于研究新的随机有限元列式方法，取得了显著的进展。Yamagaki和Shinozuka（1987）将算子的 Neumann 级数展式引入随机有限元的列式工作，称为 Neumann 随机有限元法。此法如同摄动的随机有限元法一样，正定的随机刚度矩阵和微小的随机扰动量是两个基本要求。因为从本质上讲，随机算子方程的 Neumann 级数展开方法亦是一类正则的小参数摄动方法。上述两个要求保证了摄动解的正则性和收敛性。Neumann 随机有限元法的优点在于摄动形式较简单并可以得到近似解的高阶统计量。Shinozuka 等人（1987）将随机场函数的 Mante-Carlo 模拟与随机刚度矩阵的 Neumann 级数展式结合得到了具有较好计算精度的一类 Neumann 随机有限元法的列式。Takada 和 Shinozuka（1989），Deodatis（1990）提出利用加权积分方法建立随机刚度矩阵，此法通过选择权函数达到离散后的随机函数对原随机函数的预期的逼近精度要求。Benaroya 和 Rehak（1988）指出，以随机变分原理为基础的“真正的”随机有限元法将会出现并逐渐取代以摄动方法为基础的随机有限元法。Lawrence（1986）在他的博士论文中，提出了构造“基本的随机变量序列”的方法，并依次建立了相应的变分列式和随机有限元列式。这实际上是将 Galerkin 方法应用于随机分析。Spanos 和Ghanem（1990，1991）将随机过

程的凯汉—勒夫 (Karhuen-Loève) 展开方法引入随机有限元列式。Karhuen-Loève 展开方法也称为随机过程的正交展开方法或规范展开方法，它是将随机过程用一组正交的随机变量和正交的“坐标函数”的线性和来表示。Spanos 等人结合随机场函数的 Karhuen-Loève 展式和 Galerkin 射影方法建立了相应的随机有限元列式。刘先斌和陈虬 (1990, 1991) 独立地提出了这个方法，并从变分泛函的建立和误差界估计的角度做了进一步的工作。基于随机场函数的 Karhuen-Loève 展式的随机有限元法对于高维随机场和非 Gauss 随机场问题的分析在具体实施时存在一定的困难，有待于进一步的工作。陈铁云 (1991) 研究了随机拟协调元列式，首先用多变量有限元法求解随机问题。

上面介绍的随机有限元都是通过非统计的分析的方法解决随机问题。然而最直接的、对非线性问题很有效的方法是采用 Monte-Carlo 技术（或称 Monte-Carlo 法、Monte-Carlo 模拟）。Monte-Carlo 法是一类统计方法，它与有限元法的联合使用形成风格独特的统计有限元方法。Shinozuka 和 Astill (1972) 首先将 Monte-Carlo 法引入结构的随机有限元法分析。随后，他们的系列工作推动了 Monte-Carlo 法在结构分析和有限元分析中的应用。在具体实施时，Monte-Carlo 法通过在计算机上产生的样本函数来模拟系统的随机输入量的概率特征，并对于每个给定的样本点，对系统进行确定的有限元分析，从而得到系统的随机响应的概率特征。与摄动随机有限元法相比，Monte-Carlo 有限元法的结果，当样本容量足够大时，将更可靠也更精确。然而它的缺点如同它的优点一样的鲜明，由于大量的统计取样，

统计模拟，Monte-Carlo 法的计算工作量是十分庞大的。目前，对 Monte-Carlo 法的抽样模拟已提出很多减少计算量的措施，从而使 Monte-Carlo 法的优点愈来愈突出。

Ghanem 和 Spanos (1991) 著的《随机有限元：一个谱方法》一书是随机有限元法领域里的第一本专著。该书主要讨论用谱方法将随机过程的响应用离散的独立的随机变量来表示，从而可以在 Hilbert 相空间中进行离散和数值求解。随机有限元法的数学理论研究和非线性随机问题的有限元分析是人们关注的课题，目前这方面的工作有待深入。Liu W.K. (1988) 提出了一个随机变分原理，但此原理仅限于讨论各响应场（位移、应变、应力等）互不相关的特殊情况。Liu W.K. (1986) 还将随机场插值的概念引入了随机有限元的分析中，可以通过调整插值阶数满足插值函数对原随机场函数的较高的精度要求。笔者 (1991) 在这方面作了进一步的工作，提出了基于随机场插值的离散的 Karhuen-Loève 展式，并以此为基础建立了随机的变分列式和有限元列式。笔者研究了这类随机有限元方法的收敛性和误差界，指出，由于随机场函数的离散而导致的变分解的误差连续地依赖于随机场的离散误差；因而从这个意义上来说，伴随着离散单元的进一步细分，随机有限元法收敛。

随机有限元法与其它各种数值方法一样，要具有生命力必须在科技和工程中得到广泛应用。80 年代以来，随机有限元法已在一些工程领域中得到应用，且应用范围日益扩大。结构可靠性、安全性分析是随机有限元法的一个主要应用领域。结构的可靠性分析，已摆脱了以经验为基础的定性分析阶段而步入以统计数学为基础的定量分析阶段。在此过

程中，随机有限元法担当了强度分析器的重要角色。在各种随机激励下的响应变异是随机有限元法的另一个富有应用前景的领域。已经做的工作有：将随机有限元法应用于非线性瞬态响应分析；结构振动中随机阻尼对响应的影响；结构分析的随机识别；复杂结构地震响应的随机分析和两相动力系统的随机模拟等。在工程应用方面，已将随机有限元法应用于混凝土结构的响应分析；疲劳裂缝扩展的随机有限元研究；铁路轨道的强度和稳定性的随机有限元分析等等。随着随机有限元法理论工作的深入、列式工作的完善，随机有限元法的应用将会越来越广泛。

# 第二章　随机变量和随机过程

在近代工程技术中，越来越多地应用了各种数学工具。由于电子计算机的发展和推广，对过去某些被认为运算复杂而不适用的方法，而今有了新的看法。在建立数学模型方面也更多地考虑问题本身的性质，使之更切合实际，其中重要的一点是要考虑客观事物的随机性。实际上这种随机现象是广泛存在的。

为使工程设计尽可能经济合理、安全可靠，就应当对各类不确定因素进行分析研究。随机方法，尤其是随机数值分析方法的应用已成为当务之急了。本章讨论随机方法所需的基本知识——随机变量和随机过程。

## §2.1　概率的基本概念

在概率论中，往往需要进行大量的随机试验，它的结果不能在事先准确地预言，但有三个特性：每次随机试验可以在相同的条件下重复进行；每次试验的结果不止一个，事先可明确试验所有可能的结果；但试验前不能确定哪个结果会出现。

随机试验所有可能结果的集合，称为该试验的样本空间，记为 $\Omega$。随机试验的每一个结果称为基本事件（或样本点）。

概率的定义：如果对于样本空间 $\Omega$ 中的每一事件 $E$，都有一实数 $P(E)$ 与之对应，且满足如下三个条件：①对