概率论与数理统计

复旦大学数学系　主编

上海科学技术出版社

概率论与数理统计

（第 二 版）

复旦大学数学系　主编

郑紹濂 吳立德 陶宗英 汪嘉岡 編

上 海 科 学 技 术 出 版 社

內 容 提 要

本书根据1960年复旦大学数学系編著的“統計数学”一书改編而成。内容分为概率論（包括概率論基本知識及随机过程初步等七章）与数理統計（共六章）两部分。

本书可作为綜合大学及高等师范院校数学各专业“概率論与数理統計”課程的教材，也可供高等工科院校相近专业选用。

概率论与数理统计

（第二版）

复旦大学数学系　主編

郑紹濂　吳立德　陶宗英　汪嘉冈　編

上海科学技术出版社出版（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

上海市印刷五厂印刷　新华书店上海发行所发行

开本850×1168 1/32　印张11 16/32　排版字数273,000

1960年8月第1版印刷2次，共印16,050册（其中精装本50册）

1961年8月第2版　1964年7月第7次印刷

印数46,301—50,800（其中簡装本34,800册）

統一书号13119·409　定价（科五）1.30元

第二版序

本书是由复旦大学数学系1960年編的《統計数学》改編而成。該书出版后，除我校外，曾經北京大学、华东师范大学等兄弟学校采用为数学专业的教材。在这次的改編工作中，尽可能地根据原书在試用过程中的經驗，对內容做了必要的調整与补充。

本书由概率論和数理統計两部分組成。前一部分包括原书的第一篇"概率論"和第三篇"随机过程"，后一部分即为原书的第二篇。由于本书是綜合大学与高等师范院校的教科书，在讲授学时上有一定的限制，因此删去了原书的第四篇"訊息論"。

在概率論部分中，包括了随机变量、分布函数、数字特征、大数法則和中心极限定理，以及馬尔可夫过程与平稳过程等方面的基本知識。在数理統計部分中，叙述了参数估計与假設檢驗的基本理論，并在此基础上介紹了迴归分析、方差分析、抽样方案、极值分布等方面的內容。此外，还列举了以上的理論与方法在生产实际与自然科学中的应用。例如国民經济方面关于产品质量的控制与檢驗；物理学中扩散模型的分析；无綫电中噪声的过滤；自动調节系統中誤差的控制；概率方法在計算数学中的应用等等。

本书的全部內容是假定讀者已具有数学分析、实变函数与复变函数的基本知識来編写的。其中某些較深入的內容及一些較复杂的証明，都以小字排印或以星号(*)标明。这些內容对初次学习概率論与数理統計的讀者来說，可以暫时略去。

由于我們的水平所限，而改編工作的时間又很仓促，因此一定存在着不少的缺点，我們懇切地希望同志們批評和指正。

最后，我們对許宝騄、江澤培、王梓坤、魏宗舒及邓景賢諸先生对編写本书提出的宝貴意見，朱振民、孙芳烈、欧阳光中、施伯乐、何声武等同志对本书的編写工作所进行的协助，以及上海科学技术出版社对本书的出版工作所給予的支持，謹此一并表示衷心的感謝。

編　者

1961. 5. 1.

目　录

緒　論

在自然界中广泛地存在着一类所謂随机現象。例如我們在进行某种测量时，由于种种偶然因素的影响（如测量仪器受大气的影响，观察者生理上或心理上的变化等），不可避免地会产生测量的誤差。又如在容器里盛着一定体积的气体，气体分子由于受到其他分子的冲击而产生运动速度和方向的随机变化；飞机在高空飞行时，由于大气中湍流等各种影响，它环繞着重心作随机摆动；船舶在海洋中航行时，由于受到海洋波浪的影响而产生各种各样的搖摆（纵搖、横搖）以及高低起伏等等。

实踐証明，研究了大量的同类随机現象后，通常总揭露出一种完全确定的規律性，也就是大量随机現象所特有的一种規律性。例如，由分子物理学的观点来看，气体是由无数气体分子所組成的，这些分子在不断运动着，且在运动过程中彼此影响着，因而每个分子的运动軌道、速度、方向都是随机的。但是我們知道，从宏观看来，气体对器壁的压力却是稳定的，这是因为分子数足够大，因而各个分子的运动所具有的随机性在集体作用下就互相抵消了。又如在射击中，当射击次数不大时，靶上命中点的分布是完全沒有規則的，杂乱无章的，沒有什么显著的規律性；当射击次数增加时，分布就开始呈現一些規律性，射击次数越大，規律性越清楚，我們在本书中将証明它是服从正态分布的。綜上所述，知道个别随机現象虽然是无規律的，但大量性质相同的随机現象总是有“統計”規律性的。概率論与数理統計就是一門研究随机現象的数量規律的科学。由于随机現象是普遍存在的，这就使概率論与数理

統計的概念与方法具有极为普遍的意义。仅就我們自 1958 年以来所解决或接触到的实际問題来看，就有物理学、大型工程、自动控制、电子学、生物学等方面提出的随机过程的問題；气象、水文、紡織，医学等方面提出的数理統計問題。这种多方面的需要，就决定了概率論与数理統計在数学領域中所处的地位与作用以及它的广闊的发展前途。

概率論与数理統計中的一切定律（如大数定律）是宇宙中客观存在的大量随机現象統計規律性的反映。我們必須指出，随机性現象与决定性現象之間，必然性与偶然性之間并沒有不可逾越的鴻沟。“那被断定为必然的东西，是由种种純粹的偶然所构成的，而被认为是偶然的东西，則是一种有必然性隐藏在里面的形式”（恩格斯著的《費尔巴哈与德国古典哲学的終結》，1959 年人民出版社出版，第 34 頁）。事实上，宇宙中沒有那一件实际的現象不帶有某种程度的随机成分，因而任何决定性現象也不可避免地有随机偏差产生。在許多实际問題中，为了处理問題的方便，在所要求的精确度的范圍內，可忽略掉那些造成随机偏差的次要因素，而只考慮起主要和基本作用的那些因素，这是在研究自然現象时，为現代自然科学与工程技术方面所常采用的方法。也就是說，先找出那些对現象起决定作用的、最主要和最基本的条件，然后利用数学工具（例如引出描述現象的微分方程）把它解出来，找出在这組基本条件下現象所具有的主要規律。例如过去在船舶設計时，就是根据流体力学的原理列出微分方程，求出船舶在航行中所受的阻力，它的航行規律。但是，这种做法是以犧牲精确度为代价的，在某些精确度要求較高的問題中（如火箭发射角的确定），就必須将一些随机性的次要因素也考慮在內。这样一来，由于众多的因素，使得研究决定性現象的那些数学工具（如微分方程等）就不够用了，因而还必須采用概率論与数理統計的方法。

显然，随着我国社会主义建設的发展及科学技术愈来愈高的要求，概率論与数理統計的应用范圍也将愈来愈广泛。例如，由于考虑了海洋波浪对船舶搖摆的影响而出現了以平稳过程理論为基础的“适航性理論”；在建造数百米高的电視塔时，由于要考虑到空气中湍流的影响，因而就提出了“随机微分方程”的問題。又如馬尔可夫过程在統計物理学中的应用，平稳过程在无綫电电子学及动力学系統中的应用，数理統計在气象、产品质量检查等方面的应用……。由此可見，概率論与数理統計的方法已被广泛地应用于各門自然科学和各个工业部門。

第一部分　概率論的基本知識

第一章　基 本 概 念

§1　事件和概率

当我們多次观察自然現象后，会发現許多事情在一定的条件下必然会发生。例如在沒有力作用的条件下，作等速直綫运动的物体必然继續作等速直綫运动。又如在标准大气压下，水加热到100°C 时，必然会沸騰等等。这种在一定条件下必然会发生的事情称为**必然事件**；反之，那种在一定条件下必然不发生的事情就称为**不可能事件**。例如在不受到外力作用的条件下，作等速直綫运动的物体就必然不可能改变其等速直綫运动的状况。

从所举例子中可以看出，必然事件和不可能事件之間有着很紧密的联系。事实上，如果在一定的条件下，某个事情是必然事件，那么在同样的条件下，那事情的反面就必然是不可能事件；反过来也一样。

但是在自然現象中，除了上面提到的必然事件和不可能事件外，也还存在着另一类与此有本质不同的事情。这种事情在一定的条件下可能发生也可能不发生。这种事情我們称为**随机事件**，簡称为**事件**。为了說明这种事件是在自然現象中广泛存在着的，我們来看下面的一些例子。

【例 1】“在 6～8 月間某河流的最高水位小于 5 米”便是一个随机事件。因为我們无法断言在 6～8 月間該河流的最高水位小

于5米还是超过5米。这种事情可能发生也可能不发生，因而是一随机事件。但是由于我們对6～8月間該河流的最高水位进行的多次观察，我們还是可以断定6～8月間該河流最高水位小于5米这一事件发生的可能性的大小。

【例2】“在一分钟內，一个电話交换台至少接到15次呼喚”也是一个事件。因为在一分钟內，可能接到不止15次呼喚，也可能接到正好15次或不足15次呼喚等等。但是由于人們以往长期多次重复观察的結果，仍可以預断在一分钟內电話交换台接到至少15次呼喚的可能性的大小。

【例3】“在一定的温度下，氫分子运动速度小于300米/秒”也是一个随机事件。因为在一定的温度下，氫分子运动速度是变化的，它可以小于300米/秒，也可以大于300米/秒，因而无法肯定氫分子运动速度一定都小于300米/秒。但是观察大量的氫分子运动，按照物理学上的定律，人們仍能断言“在一定温度下，氫分子速度小于300米/秒”这一事件发生的可能性的大小。

【例4】“在抽查某工厂生产的10件产品时，发現有一件次品”是一个事件。因为抽查的結果可能正好只发現一件次品，也可能沒有发現次品或发現的次品不止一件。但是按照人們对这个工厂过去生产情况的了解，我們还是能够預断这个事件发生的可能性的大小的。

类似的例子，还可以举出很多。从上面所列举的一些例子中，我們可以得到一些結論。

首先，事件确实是广泛存在于自然現象中，而且对这些事件的研究是非常必要的。例如对江河每年最高水位的研究将有助于水壩等工程的設計，电話交换台一分钟內接到呼喚次数的研究将有助于决定应設置多少綫路等等。

其次，事件虽然有其不确定的一面，即它在一次試驗中，可能

发生也可能不发生，但是在多次和长期的观察中或在大量現象中，人們还是可以发現其中的規律性的。为了說明这一点，我們来看下面的例子。

【例 5】 檢查大批的产品，当被檢查的产品长度介于 13.60 厘米到 13.90 厘米內时，則产品为合格的，否則是次品。我們分別抽取 5 件、10 件、60 件、150 件、600 件、900 件、1200 件、1800 件来檢查，其情况如表 1-1 和图 1-1 所示。

表 1-1

抽取件数	5	10	60	150	600	900	1200	1800
合格产品数	5	7	53	131	548	820	1091	1631
合格品頻率	1	0.7	0.883	0.873	0.913	0.911	0.909	0.906

$$合格頻率=\frac{合格数}{抽取件数}$$

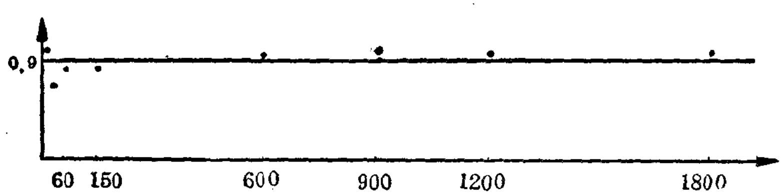

图 1-1

虽然抽出的产品中，次品数目是随机的，然而随着抽查件数的增多，合格的頻率愈来愈趋于一个稳定值 0.9。

由此可以清楚地看出，随着試驗次数的增多，頻率越来越清楚地呈現出稳定性来。而且不論是誰去进行这样的試驗，只要試驗是在相同条件下进行的（在这个例子中，所謂相同条件是指用同一种方法檢查同一批产品），那末这种頻率的稳定性就不会因人而改变。这說明事件发生的可能性的大小，是事件本身所固有的不随

人們主观意愿而改变的一种属性。事件的这种属性正是可以对事件发生的可能性大小进行度量的客观基础。因此，我們可以用一个数 $P\{A\}$ 来作为事件 A 发生的可能性大小的数值表征。如果把必然事件(通常記为 U)和不可能事件(通常記为 V)也作为随机事件的两个极端情形，那么，必然事件 U 的 $P\{U\}$ 应該最大，不可能事件 V 的 $P\{V\}$ 应該最小。我們将 $P\{U\}$ 规定为 1，$P\{V\}$ 规定为零。在这种规定下，对于任一事件 A，$P\{A\}$ 自然应满足不等式

$$0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1.$$

我們称这样的 $P\{A\}$ 为事件 A 的**概率**。

上面我們討論了事件和它的概率这两个概率論中最基本的概念。今后我們将用大写的拉丁字母 A, B, C 等等表示事件，而用 $P\{A\}, P\{B\}, P\{C\}$ 等等表示相应事件的概率。

我們只是一个个地来研究事件及其概率是不够的，在实际生活中，往往要求我們同时研究几个在同样条件下的事件以及他們之間的联系等等。例如在檢查某些圓柱形的产品中，要求它的长度和直徑都符合规格才算合格，这时我們要考虑"产品合格"、"产品不合格"、"直徑合格"、"直徑不合格"、"长度合格"、"长度不合格"、"直徑合格但长度不合格"等等这类事件。显然，这些事件相互之間是有联系的，从而它們的概率之間也必然有关系。又如在电話交換台的問題中，我們常要考虑"在一分钟內接到 1 次呼喚"、"在一分钟內接到 2 次呼喚"以及"在一分钟內接到不多于 5 次呼喚"、"在一分钟內接到多于 5 次呼喚"等等的事件。显然在这些事件中也是有着联系的，从而它們的概率之間也必然有关系。总之，在考虑任何一个随机事件时，总要同时考虑与之联系的种种事件以及这些事件之間的关系，它們的概率之間的关系等等。詳細地分析事件之間的种种关系，不仅会帮助我們更深刻地认識事件的本质，而且还可以大大簡化一些复杂事件的概率計算。这将在以后的叙

述中詳細討論。

下面,我們来引进事件間的几种主要的关系。

1. 如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,則称事件 A 是事件 B 的**特款**,記作 $A\subset B$,或 $B\supset A$. 例如"直徑不合格"必然导致"产品不合格",所以"直徑不合格"这一事件是"产品不合格"的特款。

如果 $A\supset B$, $B\supset A$ 同时成立,則称 A 与 B **等价**,記作 $A=B$. 等价的两个事件我們将看作是一样的。

2. 事件 A 与 B 至少一个发生而构成的事件,称为事件 A 与 B 的**和**,記作 $A\cup B$. 例如"产品不合格"便是"直徑不合格"与"长度不合格"两事件的和。它可以推广到事件为有限个的情形。例如"一分钟内接到不多于 15 次呼喚"这一事件便是"一分钟内接到 1 次呼喚"、"一分钟内接到 2 次呼喚"、…"一分钟内接到 15 次呼喚"及"一分钟内沒有接到呼喚"等事件的和。一般更可推广到事件为可列个的情形:如果 A 的发生,等价于 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个发生,則称事件 A 是事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和,記作 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. 例如用 A_n 表示"在一段时間 τ 内,某一分子受到 n 次碰撞"而用 A 表示"在时間 τ 内分子受到碰撞",則就有

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与 B 的**交**,記作 $A\cap B$,簡記为 AB. 例如,"产品合格"便是"直徑合格"和"长度合格"的交。类似地,我們可定义一系列事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的交,記作 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

如果 A 的发生,必然导致 B 的不发生(此时如果 B 发生,当然也导致 A 的不发生),則称 A 与 B 是**互不相容**的事件。例如,"在