

粒子同固体相互作用物理学

下册

王广厚 编

科学出版社

53.8195
122
12

实验物理学丛书

粒子同固体相互作用物理学

下 册

王 广 厚 著

53.8195
122
12

科 学 出 版 社

内 容 简 介

粒子同固体相互作用物理学是一门介于核物理和固体物理之间的交叉学科。本书系统地讨论了这一学科的基本理论、实验方法和在科学技术中的应用,作者试图将三者有机地结合起来,连贯地进行阐述,并用适当的篇幅详细介绍实验方法和技术应用的最新发展。

下册主要阐述离子注入和离子束混合概念,辐照损伤以及沟道辐射。

实验物理学丛书

粒子同固体相互作用物理学

下 册

王 广 厚 著

责任编辑 赵惠芝

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1991年2月第一版 开本: 850×1168 1/32

1991年2月第一次印刷 印张: 17 1/2

印数: 平1—600 插页: 附2

精1—470 字数: 462 000

ISBN 7-03-001209-7/O-267 (平)

ISBN 7-03-001210-0/O-268 (精)

定价: 平 装: 20.90 元
布面精装: 23.10 元

科技新书目: 234-平 100 精 101

目 录

上 册

- 第一章 引言
- 第二章 带电粒子在原子为无序分布物质中的运动
- 第三章 离子束分析固态材料的组分和结构
- 第四章 溅射物理
- 第五章 带电粒子在晶体中的沟道效应
- 第六章 沟道效应和阻塞效应的应用

下 册

- 第七章 离子注入及其应用..... 621
 - § 7.1 注入离子的射程和射程分布理论 624
 - 一 射程概念和射程的均方偏差..... 625
 - 二 射程分布的统计理论..... 630
 - 三 投影射程..... 641
 - 四 低速重离子在固体中的射程..... 648
 - 五 注入离子在非晶靶的浓度分布..... 654
 - 六 单晶靶中的射程分布..... 678
 - § 7.2 辐射增强扩散效应 689
 - 一 增强扩散的基本概念..... 689
 - 二 增强扩散的类型..... 694
 - 三 增强扩散机理..... 698
 - 四 多元扩散模型..... 705
 - 五 增强扩散效应的应用..... 713
 - § 7.3 注入离子在晶格中的位置 719
 - 一 半导体中注入离子的位置..... 720
 - 二 缺陷的移动和定位..... 725
 - § 7.4 离子注入层的电学性质 727

§ 7.5 离子注入系统	735
一 离子注入机的概念和类型	735
二 弱流和中等流强注入机	737
三 强流注入机	740
四 离子注入设备的物理限制	744
五 离子注入机的在线控制	753
§ 7.6 离子注入器件的应用	759
一 平面扩散工艺和离子注入法	759
二 全离子注入晶体管的电参量控制	766
三 离子注入 MOS 场效应晶体管	773
四 离子注入制备集成电路中的高值电阻	777
五 离子注入在硅加工中的发展	780
§ 7.7 离子注入化合物半导体	787
一 离子注入化合物半导体的特点和化学配比	787
二 退火保护问题	792
三 大规模高速集成电路的制备和离子注入化合物半导体 (GaAs) 器件	797
§ 7.8 离子注入对金属的改性	800
一 金属中离子注入的特点和物理因素	801
二 离子注入表面的力学性质	804
三 提高金属表面抗腐蚀能力	815
§ 7.9 离子注入超导体的研究	821
一 超导电性和超导临界温度	822
二 离子注入对超导临界温度 T_c 的影响	824
三 注入金属氢化物的超导电性和超导体中氢的作用	826
§ 7.10 离子注入合金的穆斯堡尔研究	833
一 内转换电子穆斯堡尔测量	833
二 磨损改善的机理—— N^+ 或 C^+ 注入铁	835
三 扩散的影响	837
四 磨损前后相的变化——锡注入铁	838
附录 射程计算机程序	841
参考文献	855
第八章 辐照损伤	861

§ 8.1 能量淀积和损伤分布	861
一 离子注入产生的缺陷	862
二 级联碰撞和原子位移	870
三 能量淀积的 WSS 理论	876
四 矩方程及其求解	881
五 “高能”离子在固体中能量淀积的“直接法”	897
六 沟道作用和聚焦作用	905
七 损伤及损伤分布	913
§ 8.2 缺陷的迁移和退火	923
一 缺陷迁移速率和聚集	923
二 热退火	927
三 激光退火	935
四 电子束退火	946
§ 8.3 金属中的辐射损伤	950
一 辐射缺陷的产生及其相互作用	951
二 金属玻璃辐射损伤的特性	962
§ 8.4 超精细相互作用和缺陷	967
一 超精细相互作用	967
二 扰动角关联和穆斯堡尔效应	969
三 辐射缺陷的研究	975
四 缺陷-反缺陷反应	981
五 ^{133}Xe 注入金属形成空位簇	982
§ 8.5 辐射对有机物质的作用	985
一 聚合物的辐射交联和降解	986
二 辐射交联的机理	990
三 固态有机材料的辐射损伤	995
四 辐照剂量率和温度效应	1000
§ 8.6 电子自旋共振 (ESR) 对极低温 (4K) 下聚合物辐射损伤 的研究	1003
一 电子自旋共振和基浓度的测量	1003
二 辐照对基在空间分布的影响	1011
三 氢原子迁移的减弱	1014
四 极低温 (4K) 下氢原子的反应率	1014

§ 8.7 重离子轰击固态生物体产生自由基	1016
一 室温下自由基的产生	1016
二 低温下 (77K) 自由基的产生	1027
三 “热钉扎”模型及其检验	1028
§ 8.8 正电子湮灭研究辐照损伤	1033
一 正电子湮灭的物理基础和实验技术	1033
二 捕获模型和金属中的辐照损伤	1045
三 电子辐照铂的损伤及退火效应	1048
四 辐照聚四氟乙烯的正电子寿命谱的分析	1055
附录 I 三维碰撞级联	1058
附录 II 矩积分	1059
附录 III 捕获模型	1061
参考文献	1067
第九章 离子束引起原子混合	1072
§ 9.1 薄膜系统中离子引起的反应	1072
一 离子感生反应的特点	1073
二 硅化物和金属间化合物	1078
三 热退火引起的相互混合	1080
四 金属固熔体的形成	1083
§ 9.2 碰撞混合的理论	1089
一 原子位置重排截面	1091
二 基体原子重排及多次重排	1095
三 各向同性的级联混合	1097
四 多次反冲注入	1101
五 含有铂标记层硅中的离子束混合	1103
§ 9.3 离子束混合机理的实验研究	1109
一 长程混合和短程混合	1109
二 化学效应对混合率的影响	1115
三 原子混合率的温度关联	1118
§ 9.4 界面反应和原子混合的唯象模型	1119
一 原子的重排和反应	1120
二 扩散控制和反应控制的界面反应	1122
三 扩散混合与碰撞混合的统一描述	1125

§ 9.5 离子束混合的应用	1128
一 离子束混合在一些物理过程中的作用	1128
二 离子束混合用于材料改性	1128
三 离子束混合微合金	1130
附录 I 方程 (9.2-19) 和 (9.2-20) 的推导	1131
附录 II 级联混合的随机走动模型	1133
参考文献	1134
第十章 沟道辐射	1137
§ 10.1 带电轻粒子在晶格沟道中运动的特点	1137
一 横向运动方程	1138
二 相互作用势和束缚态	1143
§ 10.2 沟道辐射谱学	1149
一 轴沟道	1149
二 平面沟道	1154
§ 10.3 实验安排	1162
§ 10.4 沟道辐射与其他几种辐射的比较	1165
一 相干韧致辐射	1165
二 跃迁辐射	1167
三 同步辐射	1168
§ 10.5 沟道辐射的应用前景	1168
参考文献	1169

第七章 离子注入及其应用

20 世纪 60 年代以来,各项尖端科学技术,如宇宙航行、电子仪器以及各种功能的电子计算机的发展,对半导体器件和电路的生产要求具有更高的性能,原有的生产工艺已不能满足这一要求,限制了半导体性能的进一步提高。离子注入技术正是适应这种需要而发展起来的一种半导体掺杂新工艺。它是用具有一定能量的离子轰击固体表面的方法,把原子引进固体衬底的表面层或其中一定的位置,从而使材料的表面和本体性能得到改善。现在,离子注入已广泛应用于材料科学和固体物理。它使集成电路的速度提高了一个数量级,例如,用离子注入制备的 MOS/SOS 电路,每门延迟时间已达到 60 皮秒,并且大大降低了功耗。CMOS 的功耗只是 Al 栅 MOS 的 1/200。离子注入制成的 16K 和 64K 随机存储器已经投入生产。1980 年还制成了 256K 的随机存储器电路,这种超大规模集成电路的发展,必然将进一步促进计算机的研究和生产。

离子注入化合物半导体可提供特性优良的激光器、微波器件和发光器件,逐渐发展成为研究激光光导通讯、光子计算机和光子电子技术基础。可以预料,离子注入砷化镓集成电路的发展,将为计算技术开辟一个新的领域。

在工业上,每年由于磨损和腐蚀而消费巨额资金,离子注入对金属材料的改性,即原子冶金技术,可对金属表面作硬化和防腐处理,使其耐腐蚀和抗磨损性能有很大的提高,从而将促使冶金工业和机械加工的技术革命。在磁性材料中,离子注入不仅可使录音机磁头的耐磨性能提高好几倍,而且还制备出大规模磁芯存储器。离子注入超导材料,可改变临界温度。

由于离子注入是人为的把快速运动的离子引入晶格,在同靶

物质原子激烈碰撞过程中,使固体中局部状态发生急骤的变化,出现一系列新的物理过程,如超固溶度、能量沉积、热钉扎、反冲效应和增强扩散等,这些是已有的固态理论所不能解决的。因此,研究离子注入的物理机制必然会促进固态理论的发展。此外,它还涉及到原子物理和核物理,例如,研究原子注入铁磁性物质的超精细相互作用可以确定核磁矩。相反,如果核磁矩已知,这种超精细相互作用可以用来研究固体中电磁场强度。从而在一定程度上把原子物理、核物理和固体物理的研究密切结合起来。因此,离子注入技术在国防、工业和科学研究中都起到了重要作用,受到各方面极大的关注。

从半导体器件生产来看,离子注入与常规的扩散掺杂工艺相比,具有以下优点:

(1) 注入的杂质不受靶物质固溶度的限制。由于离子注入过程的掺杂指标不受扩散系数和化学结合力等因素的限制,原则上对各种元素都可用作掺杂剂或被掺杂剂,并且在低温、室温、高温等不同温度都能进行注入。所以不仅避免了热扩散高温所带来的不良影响,而且制造工艺可以灵活多样,适应性强,可根据实际需要几十种元素中挑选合适的 n 型或 p 型杂质,注入各种半导体材料中。

(2) 可精确控制掺杂杂质的数量和浓度。热扩散工艺伴随着化学变化,因而对浓度极低和很浅的结是很难控制的,难于实现工艺过程的自动控制;而离子注入技术可以自由地支配两个独立参量——能量和剂量,从而能精确地控制掺杂的深度和浓度分布。由于离子注入机比较容易实现控制装置的自动化,保证了掺杂的精度和重复性。通过精确控制离子注入掺杂的参数,可调整大规模集成电路的电参量,如 MOS 电路的阈值,双极电路中三极管的 β , f_t 等参数。这是一种精密的掺杂技术,其重复性比扩散掺杂要好得多,从而大大提高了电路的成品率。

(3) 离子注入的横向扩散比较小。所以在制备电路时线条间距可进一步缩短,最小可缩到 1 微米(热扩散时线条间距要大于 3

微米),提高了集成电路的集成度。

(4) 离子注入可进行大面积均匀掺杂。离子注入时加入电扫描控制掺杂,使掺杂的均匀性比扩散掺杂好得多。比如对3英寸(1英寸=0.0254米)的硅片,离子注入使整个片子上的电阻率均匀性达到 $\pm 1\%$ (而热扩散仅为10%)。因此,离子注入适于大型硅片生产,并已成为超大规模集成电路的主要手段。

(5) 离子掺杂过程可以在低温下进行,从而避免热扩散所引入的热缺陷,特别适用于易分解的半导体材料的掺杂(如化合物半导体)。

(6) 掺杂纯度高。离子注入通过质量分析器来选取单一杂质离子,保证了掺杂纯度不受杂质源纯度的影响。如果采用低温装置和超高真空室,离子注入是一个理想的“清洁”技术。

当然,离子注入法也不是十全十美的。由于离子注入是用比较激烈的方式把一种原子引进晶格中,结果在每个注入离子路径周围产生大量的无序原子。例如,一个100千电子伏的铯离子进入硅晶可以产生20,000个左右的位移原子,故需要退火。但是,20,000:1是一个很高的比例,即使退火率为99.9%,位移原子对注入离子的数目之比仍然是20:1。因此,如果这些剩余损伤中心是带电性的,它们足以屏蔽掉注入铯原子的特性。

我国在六十年代后期开始研究离子注入技术。现已普遍采用这项技术研制新型半导体器件,离子注入CMOS电路的电子手表已投入生产。另外,离子注入红外探测器,注入逻辑电路(PL)、双极性高速电路、红外、激光、发光显示及电荷耦合(CCD)等器件的研制,都取得了较大的进展。

离子注入技术在这方面应用的深入发展,迫切要求定量地描述离子注入的物理过程。本章开始,将根据第二章带电粒子在无形靶中的运动规律,先讨论注入离子在物质中的位置-射程分布理论,并同实验结果进行比较,从而得到离子注入的基本特征;然后给出离子注入对一些固态材料的改性及其检测方法。关于离子注入过程产生的缺陷——辐射损伤是一个非常重要的问题,我们

将在下一章专门讨论。

§ 7.1 注入离子的射程和射程分布理论

当一束离子轰击固体靶时，一部分离子由于靶表面的反射而离开了靶，成为溅射离子(如图 4.4-1 所示)；而另一部分将射入靶内，成为注入离子。利用注入离子进行掺杂的方法，称为离子注入。显然，注入离子在靶物质中的分布以及影响分布各种因素无论在技术上还是在理论上都是我们首先关心的问题。

一般地说，入射离子在非晶靶中的射程分布主要依赖于离子的能量、质量、原子序数和靶原子的质量、原子序数、靶原子密度以及注入时靶的温度、离子的剂量率和剂量等。而对于单晶靶，除了上述因素外，还依赖于单晶对离子束的取向和晶面的情况等。

理论上，计算离子在任一类型靶中的射程分布是一个非常复杂的问题，没有一个现成的理论方法能对各种因素作出精确的分析，不仅重要的变数多，而且变动的范围广。早期讨论物质中射程分布^[1]是在原子核物理领域里进行的，理论分析多是关于高能轻粒子与非晶靶的碰撞。并且假定入射粒子在靶中的能量损失几乎全部是同靶内电子相互作用的结果，而所有的动量转移几乎全部是原子核相互作用的结果。

离子注入的条件与核物理不同，入射粒子重，而能量较低。因此，在多数情况下，把入射粒子与靶的相互作用仅仅看成电子碰撞结果是不够的，还必须考虑入射粒子与靶内原子核的作用。量子效应只有在处理转移给电子的平均能量损失中才可以忽略(见 § 2.3)。据此，1963 年林哈德、沙尔夫和希奥特 (Schjøtt) 提出了低速重离子在靶中射程分布的理论(即 LSS 理论)^[2]。这个理论主要假定入射离子与靶原子相互作用是准弹性碰撞，是利用托马斯-费米势 [式 (2.2-8)] 来描写的。它适用于质量范围相当宽的人射离子。但是，对于入射离子与主晶轴方向准直入射时在晶体中的射程分布，至今还没有满意的理论。

用背散射技术、中子活化分析和离子探针等方法，从实验中得到离子射程的统计分布与人射离子在靶内的能量损失的形式有关。对于中等速度的重离子，能量损失可分为两个彼此独立的过程——电子激发和原子核库仑散射。这些我们在 § 2.2 和 § 2.3 中已分别讨论过。

由于入射离子和靶原子核的碰撞次数以及每次碰撞中的能量转移都是随机变数，所以即使是同一类型和同一能量的离子也不会有相同的过程。因此，对于单个人射离子来说，很难预见它的确切射程及其停留在靶内的具体位置。这样做也没有实际意义。但是大量入射离子在靶内空间分布是确定的，因此，可用统计方法来表征这种分布，即用入射离子的平均射程 R 及其标准偏差 ΔR ，和较高的分布函数矩来描述它的特征。

一 射程概念和射程的均方偏差

由第二章的讨论我们已经知道，一定能量的入射离子进入固体靶后，由于同靶原子核和电子(包括束缚电子和自由电子)的碰撞，将损失其能量，最后停留在靶内的某一位置。离子由靶表面进入到停止所走过的总距离，叫射程 R ；这一距离在入射方向上的投影，称为投影射程 R_p ，如图 7.1-1 所示。对高能离子而言，开始主要是电子阻尼，离子的轨迹基本上在运动初始方向的一条直线上，只是在路程的尾部核碰撞引起能量离散，在这种情形，射程和投影射程差别很小 [图 7.1-1(a)]；而在能量较低时，核阻止 S_n 和电子阻止 S_e 相当，使入射离子的路程是曲折的，具有许多较大的

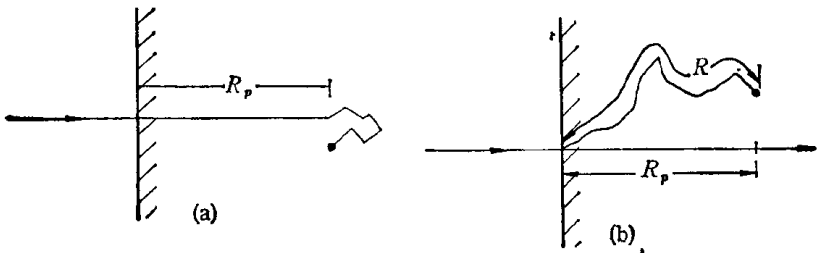


图 7.1-1 高能(a)和低能(b)离子进入固体的总射程 R 和投影射程 R_p 的含义

偏转，显然，此时在入射方向上的投影射程与射程差别很大 [图 7.1-1(b)]。

我们首先讨论入射离子在非晶态物质中的射程分布。根据第二章的内容和 LSS 理论，把入射到固体靶内中等能量范围的重离子能量损失看成是彼此独立的两个过程：(1) 入射离子与靶原子核的相互作用；(2) 入射离子与靶电子(包括束缚电子和自由电子)的相互作用。因此，一个入射离子在靶内单位距离上的能量损失可以表示为

$$-\frac{dE}{dx} = N[S_n(E) + S_e(E)], \quad (7.1-1)$$

式中 E 为入射粒子在 x 点的能量； N 是单位体积内靶原子的平均数； $S_n(E)$ 是原子核阻止本领，表示能量为 E 的入射粒子在单位密度的靶内通过微分厚度 Δx 传递给原子核的能量 [式 (2.1-9)]； $S_e(E)$ 是电子阻止本领，表示能量为 E 的入射离子在单位密度的靶内通过微分厚度 Δx 传给靶电子的能量 [式 (2.1-13)]。

将式 (7.1-1) 直接积分就得出入射离子由初始能量 E_0 到停止时所走过的总距离 R 为

$$R = \int_0^{R_0} dx = \frac{1}{N} \int_0^{E_0} dE / [S_n(E) + S_e(E)]. \quad (7.1-2)$$

距离 R 为平均总射程，可用来简单估计入射粒子在非晶靶内的平均穿透深度。

知道了 $S_n(E)$ 和 $S_e(E)$ 后，利用式 (7.1-2) 可求出射程。§ 2.2 和 § 2.3 对无定形物质中的核阻止和电子阻止已经分别作了详细分析，并得出了相应的表达式 (2.2-34) 和 (2.3-37)，这里，只引入 S_n 和 S_e 的近似公式，以便对射程作些有用的估计。在一级近似下，即入射离子在靶中绝大部分能量损失是由一系列小角散射所造成的情况下，核阻止本领 $S_n(E)$ 与入射离子的能量无关，并可写成

$$S_n^0 = 2.8 \times 10^{-15} \frac{Z_1 Z_2}{(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}} \frac{M_1}{M_1 + M_2} \quad (\text{电子伏} \cdot \text{厘米}^2), \quad (7.1-3)$$

其中 Z_1, M_1 和 Z_2, M_2 分别是入射离子和靶原子的原子序数和质量。

至于电子阻止本领的一级近似, 根据 § 2.3 的讨论, 把固体中的电子看成自由电子气. 当入射粒子的速度小于能量等于自由电子气的费米能级 E_F 的电子速度 (即 $v \ll v_F$) 时, S_e 和入射粒子的速度总是成正比 [式 (2.3-9)], 即

$$S_e(E) = Cv = KE^{1/2}, \quad (7.1-4)$$

式中 K 与入射离子和靶材料均有关. 但对于非晶靶, 可近似认为 K 与入射离子的性质无关. 例如, 对非晶硅靶, 有

$$K_{Si} \approx 0.2 \times 10^{-15} (\text{电子伏}^{1/2} \cdot \text{厘米}^2) \quad (7.1-5)$$

由式 (7.1-3)—(7.1-5) 所给出的 S_n 和 S_e 的近似值来粗略地估计射程.

由于 S_e 随入射粒子能量 E 的增加而增加, 而 S_n^0 是一个常数, 因此会有某一阈值能量 E_c 使 $S_e = S_n^0$. 当 $Z_2 = 14, M_2 = 28$ 时, 有

$$E_c^{1/2} = S_n^0/K = 14 \cdot \frac{14 Z_1}{[(14)^{2/3} + (Z_1)^{2/3}]^{1/2}} \cdot \frac{M_1}{M_2 + 28}. \quad (7.1-6)$$

如果用硼作入射离子 ($Z_1 = 5, M_1 = 10$), 阈值能量约为 10 千电子伏; 磷 ($Z_1 = 15, M_1 = 30$) 的阈值能量 $E_c \approx 200$ 千电子伏.

如果入射粒子的能量显著地小于 E_c , 则主要能量损失的形式是核阻止本领, 此时电子阻止可以略去, 于是

$$-\frac{dE}{dx} \approx NS_n^0. \quad (7.1-7)$$

硅靶的原子密度 $N = 5 \times 10^{22}$ 厘米⁻³, 由式 (7.1-2) 得

$$R = (0.7 \text{ \AA}) \cdot \frac{(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}}{Z_1 Z_2} \cdot \frac{M_1 + M_2}{M_1} E_0, \quad (7.1-8)$$

其中 E_0 是入射离子的初始能量, 单位是电子伏. 式 (7.1-8) 表明, 在近似情况下, 低能离子在非晶靶中的射程 R 与入射粒子的能量成正比. 当采用较为精确的 S_n 时, 这种关系仍然存在, 但比例系数并不这样简单. 对于较重的人射离子, 如锆和砷入射硅靶, 式

(7.1-8) 给出的 R 值较为满意, 其误差在 10% 以内。但用较轻的离子(如硼, 碳, 氮)注入时比实际的数值高一倍。

若入射离子的能量比 E_c 大得多, 这时电子阻止占主要地位, 核阻止可以忽略, 对于硅靶的离子射程约为

$$R \approx 20 \sqrt{E_0} (\text{\AA}). \quad (7.1-9)$$

此式可用于高能粒子入射非晶硅靶内的最大射程。

知道了核阻止 [式 (2.2-34)] 和电子阻止 [式 (2.3-37)] 的具体表达式后, 便可求出射程, 将式 (7.1-2) 写成

$$R(E) = \frac{1}{N} \int_0^E \frac{dE'}{S_n(E') + S_e(E')} = \frac{1}{N} \int_0^E \frac{dE'}{S(E')}, \quad (7.1-10)$$

其中

$$S(E) = S_n(E) + S_e(E) = \int_0^\infty T d\sigma \quad (7.1-11)$$

是单位路径长度上总的能量损失; $T = T_n + T_e$ 是总的能量转移。

同样也可求出射程的标准偏差。根据定义, 标准偏差是射程的平均平方涨落, 即

$$\Delta R^2 = \overline{R^2} - \bar{R}^2 \quad (7.1-12)$$

是表征射程分布的一个重要的统计物理量。由式 (2.1-4) 和 (2.1-8) 可得

$$-\Delta E = N \int_0^\infty T \Delta x 2\pi p dp, \quad (7.1-13)$$

其中 T 是能量转移; p 是碰撞参数; Δx 是离子穿入层的厚度的变化。

根据物理量的统计性质, 物理量在系统中的平均值等于该物理量在系统中出现的几率之和:

$$\bar{E} = \int EP(E)dE,$$

所以有

$$\overline{(\Delta E)^2} = \int_0^\infty T^2 N \Delta x 2\pi p dp = N \Delta x \int_0^\infty T^2 d\sigma.$$

这就是方程 (2.6-5)¹⁾。令

$$Q^2(E) = \int_0^{\infty} T^2 d\sigma, \quad (7.1-14)$$

于是

$$\overline{(\Delta E)^2} = NQ^2(E) dx.$$

假定单个事件出现的几率是彼此独立的，于是射程的均方偏差可表示为

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta R)^2} &= \overline{(\Delta E)^2} \cdot \left(\frac{\Delta R}{\Delta E} \right)^2 = \int NQ^2 dR \cdot \left(\frac{dR}{dE} \right)^2 \\ &= \int NQ^2 \left(\frac{dR}{dE} \right)^3 dE. \end{aligned}$$

故得

$$\overline{\Delta R^2} = \frac{1}{N^2} \int_0^E \frac{dE' Q^2(E')}{S^3(E')}. \quad (7.1-15)$$

这是在简化假定下得出的公式，多数情况同实验结果符合。式 (7.1-10) 和 (7.1-15) 是在假定射程的标准偏差相当小的情况下得出的，也就是说，入射粒子在靶内的散射角小，可以认为平均射程和最可几射程是近似一致的。如果不是这样，射程分布就要出现相当大的非对称性，就应严格区别最可几射程和平均射程。

当只考虑核阻止占优势的低能情况并且采用式 (2.2-30) 的相互作用截面时，则可得到相对均方偏差^[3]

$$\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{R^2} = \frac{s-1}{s(2s-1)} \cdot \frac{4M_1M_2}{(M_1+M_2)^2}, \quad (7.1-16)$$

表明射程的相对平方偏差 $\Delta R^2/R^2$ 与射程本身无关，并在 $s=2$ 附近变化很慢。当 s 从 2 增加到 3 时，相对平方偏差仅减少 20%；

低能时， $\frac{\overline{(\Delta R)^2}}{R^2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4M_1M_2}{(M_1+M_2)^2}$ 。随着入射离子能量的增加，电子阻止作用加大，核阻止的相对均方偏差就随着减小。图 7.1-2

1) 注意：在方程 (2.6-5) 中用 $Q^2 = N\Delta x \int T^2 d\sigma$ 。