目　　录

第一章 行列式

§1·1 n阶行列式定义

读者在中学已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义．在此，我们再进行简单的复习．

一、二阶行列式

我们用记号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式．

即：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

二阶行列式的代数和，可以用画线（图1-1）的方法记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积．

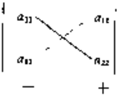

图1-1

例 1.1 $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=4\times3-(-1)\times2=14$

例 1.2 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问 (1) 当 λ 为何值时，$D=0$

(2) 当 λ 为何值时，$D\neq0$

解 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda=\lambda(\lambda-3)$

因此可得：(1) $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$

(2) $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时，$D\neq0$

二、三阶行列式

我们用记号：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}$

$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$

称为三阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}= \begin{aligned}&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}\\ &-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线（图 1-2）的方法记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项

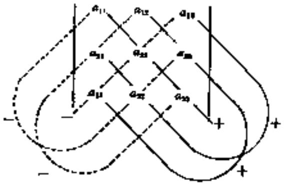

图 1-2

例 1.3
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0\times(-1)$$
$$=-58$$

例 1.4 当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0$

解
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2+1\times0\times1+4\times0\times x-x^2-1\times4\times x-3\times0\times0$$
$$=2x^2-4x=2x(x-2)$$

因此可得，$x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0$

三、n 阶行列式定义

记
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$

它由 n 行 n 列元素（共 $n\times n=n^2$ 个元素）组成，称之为 n 阶行列式．记 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式，即由行列式 D 中划去第 i 行第 j 列后剩下的 $(n-1)$ 行 $(n-1)$ 列元素组成的行列式，即：

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式．

现在我们用递推的办法（或称归纳法）来定义 D 的值．

定义 1.1 当 $n=1$ 时，式（1.1）定义为 $D=a_{11}$，当 $n=2$ 时，式（1.1）定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

假定对 $(n-1)$ $(n\geq 2)$ 阶行列式已经定义，则 n 阶行列式 D 的值定义为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1j}A_{1j}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{1.2}$$

即 $D=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}$

不难看出，上述行列式的定义与中学学过的二阶、三阶行列式的定义是一致的．

如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例 1.5 求 4 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

中元素 $a_{23} = -5$ 的余子式 M_{23} 及代数余子式 A_{23}．

解 由定义可得：

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 2$$

例 1.6 求下列行列式的值

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

解

$$(1)D_1=2\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-1&1\\4&2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-1&2\\4&1\end{vmatrix}$$

$$=6-6+3\times(-9)=-27$$

$$(2)D_2=3\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}=3\times(5-4)=3$$

例1.7 求 n 阶下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\text{的值}$$

解 行列式 D 的特点是：$i<j$ 时 $a_{ij}=0$，或者说，这个行列式 D 的主对角线（即 a_{11}、a_{22}，…，a_{nn}所占的一条对角线）以上的元素都等于零．

这是一个 n 阶行列式，但它的第一行除 a_{11}外都等于 0．因此，由定义，

$$D=a_{11}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0&\cdots&0\\a_{32}&a_{33}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33}&0&\cdots&0\\a_{43}&a_{44}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n3}&a_{n4}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=\cdots\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

在行列式定义 1.1 中，(1.2) 式是按照第一行展开的，读

者可能会产生一个问题，是否可以按第二行或其它行展开呢？说的更明确一点，对任意的 i $(1\leqslant i\leqslant n)$，是否仍有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \tag{1.3}$$

首先我们来看一个例子．

例 1.8 将三阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ 分别按第一行，第二行，第三行展开，比较其结果．

解 按 (1.2) 式

$$D=\begin{vmatrix}0 & 4\\ 1 & 1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$$

按(1.3)式，取 $i=2$

$$D=3\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+4\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3$$

按(1.3)式，取 $i=3$

$$D=2\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}+1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$$+1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3$$

通过该例子，我们看出，按任一行展开，其值都是一样的。这并不是偶然的巧合，而是所有情况均如此，有下面的定理．

定理 1.1 设 D 是一个 n 阶行列式，则对任意的 i $(1\leqslant i\leqslant n)$，有

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$$

该定理证明方法是对行列式的阶 n 用归纳法，其过程相当复杂，所以在此略去证明过程．当然，不能因此而怀疑其正确性．

§1·2 行列式的性质

上一节，我们引进了行列式的定义，也试着根据定义来计算了几个行列式．从中可以看出，计算是比较麻烦的，特别当行列式的阶数增大时，计算量迅速增加．如果要读者根据定义来计算一个10阶行列式，怕没有一个读者有耐心把它算完，按定义计算一个20阶行列式，既使用最高速的计算机也要算很长时间．因此有必要来研究行列式的性质，使实际计算成为可能．不仅如此，行列式的基本性质也为求解线性方程组提供了工具．

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^T 或 D'

即，若 $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $$D^T=D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1 行列式转置后的值不变，即 $D=D^T$

证明 对行列式的阶用归纳法．

当 $n=1$ 时，显然成立．现假设对 $(n-1)$ 阶行列式结论成立，要证明结论对 n 阶行列式也成立．将 D 按第 i 行展开有．

$$D=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1.4}$$

再将 D^T 按第 j 行展开，并注意到 D^T 的第 j 行第 i 列元素 $\bar{a}_{ji}$ 正好是 D 的第 i 行第 j 列元素 a_{ij}我们有：

$$D^T=\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ji}\bar{A}_{ji}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ji} \tag{1.5}$$

其中 $\bar{A}_{ji}$是 a_{ij}在 D^T 中的代数余子式，M_{ji}是相应的余子式，现在看 A_{ji}与 A_{ij}的关系，注意到 $\bar{M}_{ji}$是 D^T 中划去第 j 行第 i 列后剩下的元素组成的 $(n-1)$ 阶行列式，它正好等于 D 划去第 i 行第 j 列后剩下的元素组成的 $(n-1)$ 阶行列式 M_{ij}的转置，$M_{ji}=M_{ij}^T$，由归纳假设这两个行列式应相等，$M_{ij}=M_{ij}^T$ 故 $\bar{M}_{ji}=M_{ij}$

由于 $\bar{A}_{ji}=(-1)^{i+j}\bar{M}_{ji}$，$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，因此 $\bar{A}_{ji}=A_{ij}$

代入 (1.5) 式得：

$$D^T=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1.6}$$

将 (1.4) 式对 i 求和（从 1 加到 n）

$$nD=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1.7}$$

再将 (1.6) 式对 j 求和（从 1 加到 n）

$$nD^T=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij} \tag{1.8}$$

由重和号性质可得：

$$nD=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=nD^T$$

于是：$D=D^T$ 结论得证

推论 行列式按行展开与按列展开是一样的，也就是说对 D 有

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$

证明 按 D^T 的任意一 i 行展开，求其值为

$D^T=\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}\bar{A}_{ij}$，由性质 1 证明可知

$$\bar{a}_{ij}=a_{ji}\qquad \bar{A}_{ij}=A_{ji}\quad \text{且 } D=D^T$$

因此：$D=D^T=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}A_{ji}$　这就是 D 按任意一 i 列的展开式，推论证毕．

性质 1 说明：行列式的行与列具有相同的性质，因此下面只对行来讨论其性质．

性质 2 用数 k 乘行列式的某一行（或列）等于以数 k 乘此行列式，即

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD$$

证明时，将 B 按第 i 行展开，即立刻得出结论。

推论 1　若行列式的某一行（或列）的元素全为 0，则这个行列式等于零．

证明　设 D 的第 i 行元素全为 0，用 2 乘 D 的第 i 行的元素（仍为零），由性质 2：

$D=2D$　所以 $D=0$

推论 2　若行列式某一行（或列）有公因子 k，则这个 k 可以提到外面来．

性质 3　互换行列式两行（或列），行列式变号．

证明　设 B 是由行列式 D 互换第 i 行与第 j 行后得到的行列式．用数学归纳法：

当 $n=2$ 时（$n=1$ 时只有一行谈不上互换）．

$$设：B=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=-D$$

现设对 $(n-1)$ 阶行列式结论也成立，要证明对 n 阶行列式也有同样结论．

由于 $n=2$ 已证，不妨设 $n\geqslant 3$，即 D 除了第 i 行与第 j 行外还有一个第 k 行（$k\neq i$，j），将 B 按第 k 行展开．

$$B=(-1)^{k+1}b_{k1}B_{k1}+(-1)^{k+2}b_{k2}B_{k2}+\cdots+(-1)^{k+n}b_{kn}B_{kn} \tag{1.9}$$

由于第 k 行没有对调，所以 $b_{kl}=a_{kl}$，另一方面，若设 M_{kl} 是 a_{kl} 在 D 中的余子式，则 B_{kl} 与 M_{kl} 的元素正好有两行互换了位置而其余各行都相同，但 B_{kl} 与 M_{kl} 都是 $(n-1)$ 阶行列式．由假设 $B_{kl}=-M_{kl}$，代入（1.9），注意到 $b_{kl}=a_{kl}$，有

$$B=(-1)^{k+1}a_{k1}(-M_{k1})+(-1)^{k+2}a_{k2}(-M_{k2})+\cdots$$

$$+(-1)^{k+2}a_{kn}(-M_{kn})$$

$$=-[(-1)^{k+1}a_{k1}M_{k1}+(-1)^{k+2}a_{k2}M_{k2}+\cdots$$

$$+(-1)^{k+n}a_{kn}M_{kn}]$$

$$=-D$$

推论1 若行列式有两行（或列）元素相同，则行列式为零。

证明 互换这两行，$D=-D$，所以 $D=0$

推论2 若行列式某两行（或列）的元素成比例，则行列式为零。

证明 某一行提出公因子后，有两行元素完全相同，所以为零。

性质4 若行列式中某一行（或列）的元素 a_{ij} 都可以分解为两元素 b_{ij} 与 c_{ij} 之和，即：$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$，则该行列式可分解为相应的两个行列式之和。

即：
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 行列式某一行（或列）的元素都乘以同一个常数加到另一行（或列）的相应元素上去，行列式的值不变.

性质 4、性质 5 请读者自己证明.

§1·3 行列式的计算

根据行列式的五条性质，可对行列式进行计算，由例 1.7 及性质 1 可得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

因此，我们设法把行列式变成上三角形行列式，就可以计算出行列式的值.

例 1.9 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \text{的值}$$

解

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$
\xrightarrow[r_4+3r_2]{r_3+r_2}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4
$$

在这道题中，注意应先把左上角的 0 换成非 0 元素，然后再想法变成上三角形的形式．

例 1.10 计算 n 阶行列式

$$
D=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}
$$

解 把该行列式的第 2 列，第 3 列，…，第 n 列全部加到第 1 列，则

$$
D=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1 \\ \cdots \\ r_n-r_1}}
$$

$$=\begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$

例 1.11 求证：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}x^{n-2}$$

证明 第 2 行乘 (—1) 加到第 1 行，第 3 行乘 (—1) 加到第 2 行，…，第 n 行乘 (—1) 加到第 $n-1$ 行，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 2 \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}\xrightarrow[r_{n-1}-r_n]{\substack{r_1-r_2 \\ r_2-r_3 \\ \cdots}}$$