

目 录

第一章 结 论

- 1.1 断裂力学的产生和发展..... (1)
- 1.2 断裂力学的研究内容..... (6)

第二章 线弹性断裂力学

- 2.1 引言..... (10)
- 2.2 线弹性裂纹尖端场..... (11)
- 2.3 应力强度因子..... (25)
- 2.4 能量原理..... (37)
- 2.5 断裂准则..... (43)
- 2.6 裂纹尖端的塑性区..... (47)
- 2.7 平面应力断裂和 R 曲线..... (70)
- 2.8 平面应力问题工程解法..... (77)
- 2.9 平面应变断裂韧度 K_{Ic} 测定..... (82)

第三章 复合型脆性断裂

- 3.1 引言..... (96)
- 3.2 最大环向拉应力理论..... (96)
- 3.3 能量释放率理论..... (101)
- 3.4 应变能密度理论..... (108)
- 3.5 几种复合型断裂理论的对比..... (120)
- 3.6 复合型脆性断裂的工程判据..... (122)

第四章 弹塑性断裂力学

- 4.1 前言..... (127)

4.2	J 积分理论	(128)
4.3	裂纹顶端张开位移 (COD)	(148)
4.4	J 积分与COD的关系	(155)
4.5	稳定扩展的裂纹	(155)

第五章 动态断裂力学

5.1	概述	(167)
5.2	裂纹扩展速度和动能	(167)
5.3	动态应力强度因子和能量释放率	(170)
5.4	裂纹的分叉	(173)
5.5	裂纹的止裂	(176)
5.6	动态断裂韧度	(179)

第六章 疲劳裂纹扩展

6.1	前言	(183)
6.2	在恒幅疲劳载荷下裂纹扩展规律	(183)
6.3	影响裂纹扩展速率的因素	(188)
6.4	表达裂纹扩展速率的其它公式	(192)
6.5	疲劳裂纹扩展中的闭合现象	(194)
6.6	载荷间的相互作用	(195)
6.7	考虑超载迟滞效应的计算模型	(199)
6.8	疲劳裂纹扩展寿命计算	(207)
6.9	复合型载荷下疲劳裂纹扩展	(208)
6.10	小裂纹疲劳扩展特点	(209)

第七章 复合材料损伤与断裂

7.1	复合材料结构的失效特点	(217)
7.2	断裂力学在复合材料中的应用	(219)
7.3	各向异性材料断裂力学	(221)

7.4	复合材料层板的损伤与断裂分析.....	(234)
7.5	复合材料层板的损伤扩展与刚度降.....	(239)
7.6	复合材料层板断裂准则.....	(240)

第八章 断裂力学在金属结构设计中应用

8.1	损伤容限设计概念.....	(250)
8.2	耐久性设计概念.....	(253)
8.3	结构损伤容限设计内容和方法.....	(255)
8.4	加劲板结构的断裂分析.....	(264)
8.5	断裂力学在壳体结构中应用.....	(293)
8.6	焊接结构中的断裂问题.....	(304)
8.7	提高结构耐久性及损伤容限特性的工艺措施.....	(308)

第一章 绪 论

1.1 断裂力学的产生和发展

任何工程结构都不可避免地存在着类似于裂纹的缺陷。它们或是结构材料中固有的，或是制造加工过程中造成的，也可能是使用过程中造成的损伤。这些缺陷的存在和扩展，降低了结构的承载能力，甚至使之失效。但是，在工程结构设计实践中认识到这一点，是经过一个很长的过程的。

19世纪以前，工程结构的设计主要依靠经验。后来，由于弹性理论的建立和发展，使结构强度的定量分析成为可能。为了补偿由于外载荷计算、分析方法、材料特性等一系列不确定性因素引起的误差，在设计时采用大于1的安全系数以保证结构的安全。这种传统的强度设计方法一直沿用到今天。

应用传统设计方法设计的工程结构，绝大多数保证了它们的承载能力而未失效（当然，有时是以增大结构重量为代价的）。但是，也曾出现过意外的失效事故，造成很大的损失。下面举两个典型的例子。

第二次世界大战期间，美国建造约5000艘货轮和油轮，至少有13艘油轮和3艘“自由号”货轮由于船体结构上的裂纹扩展而断裂为两半；还有1/3以上的轮船在服役3年以内都在结构中产生裂纹，其中200艘以上损伤严重。对以上断裂的船舶进行的强度分析表明，在它们破坏时所承受的应力都远小于船体材料的屈服应力。进一步的研究表明，由于船体采用焊接结构，在焊缝附近存在着缺陷和残余应力，使结构中的缺陷（裂纹）扩展而最终导致低应力脆断。

英国的de Havilland 公司在 1952年研制了双喷气发动机带增压舱的旅客机“彗星” I 号 (Comet I)，并有 6 架投入伦敦至南非和伦敦至远东的航线上定期飞行。一年以后，一架在印度上空热带风暴中失事，接着又有两架连续在罗马附近上空失事。事后，飞机的大部分残骸被回收，并进行了分析研究。很明显，座舱顶部窗口边缘的一个微小裂纹在增压舱重复载荷下扩展而引起的爆裂使飞机失事。后来又用已停飞的飞机座舱进行模拟试验，重现了座舱爆裂的过程，当时，尚无法解释如此微小的裂纹何以会导致断裂。

由上述两个例子可以看出，建立在材料力学、弹性力学和结构力学基础上的强度分析方法，不能反映含裂纹结构的强度特点，因此必须发展一门研究含裂纹体力学行为的科学——断裂力学。

为了说明断裂力学的发展过程，有必要回顾一下在断裂力学（做为固体力学的一个分支）建立以前的一些有关历史情况。

有关断裂的问题的记载，首次是15世纪杰出的工程师和艺术家达·芬奇在试验中发现，在直径一定的情况下，铁丝的断裂载荷与其长度成反比，但当时没能做出合理的解释。当然，在今天看来，这个现象是很容易理解的。因为铁丝愈长，其内部存在缺陷（例如微裂纹）的可能性愈大，因而其强度亦愈低。特别是考虑到当时生产铁丝的工艺水平较低，这种推断就更合理了。

俄国的Колосов 在1919年发表的博士学位论文中，首次研究了无限大板中含一椭圆孔时应力集中问题（Inglis在1913年也独立地研究了同类问题）。在板受各向均匀应力时，椭圆孔长轴端的最大应力为

$$\sigma_{max} = 2\sigma \frac{a}{b} \quad (1.1)$$

而当板受单轴拉应力且垂直于长轴时，孔长轴端的最大应力为

$$\sigma_{max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \quad (1.2)$$

式中， σ 为外加应力， a 和 b 分别为椭圆孔的半长轴和半短轴长度。由式(1.1)和式(1.2)可以看出，当椭圆孔的短轴 $b \rightarrow 0$ 时，椭圆孔变成了裂纹，此时有

$$\sigma_{max} = \lim_{b \rightarrow 0} \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b} \right) \rightarrow \infty$$

这意味着带有裂纹的构件，根本承受不了任何载荷。显然这是与实际不符的。Griffith 在 1921 年发表的理论论文解答了这一疑题^[1]。

Griffith 为了解释结晶体的拉伸强度远小于其理论强度这一事实，对脆性材料的断裂问题进行了研究，发现玻璃平板的断裂应力随板厚的减少而增加；当厚度减至一极限值时，其断裂强度趋近于其理论值。Griffith 认为厚度的效应实际上是裂纹尺寸的效应。他提出，当构件中存在裂纹时，如假想裂纹扩展一微量，构件将释放出一定量的应变能；而裂纹扩展时为了克服阻力（所需表面能）要做一定量的功。当能量释放率，或裂纹扩展一单位长度所释放出来的应变能（亦称裂纹扩展力）大于阻力时，裂纹才会发生扩展。根据上述准则，可得到含裂纹构件发生断裂时应力为

$$\sigma_f \propto \sqrt{\frac{2E\gamma}{a}} \quad (1.3)$$

式中， γ 为材料的表面能， a 为裂纹长度， E 为材料的弹性模量。由式(1.3)可以看出，断裂应力随结构内所含裂纹长度的增大而降低。

尽管 Griffith 的理论还是很不完美的，但在断裂力学发展上无疑是很重要的一步。在论文发表后的 20 多年里，一直未被人们重视。对断裂问题的研究，在这段时间里也只是出于科学上的兴趣

而未能应用于工程设计。

第二次世界大战前后，由于发生了一系列严重的断裂事故，为了分析这些事故的原因，断裂研究重新引起人们极大的兴趣。为了将前述的Griffith理论转化为一门工程科学，Irwin和Orowan各自独立将Griffith理论加以补充，以适用于金属材料。他们指出：裂纹扩展时，不仅要消耗能量于表面能，还要消耗能量于扩展时的塑性功。这样将塑性功加入后，得到断裂应力为

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{E(2\gamma + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (1.4)$$

式中， γ_p 为裂纹尖端向前扩展单位长度时的塑性功。Orowan估计，对于金属材料， γ_p 比 γ 大约高3个数量级。

Irwin^[2]对于断裂力学的另一个重要贡献是将Griffith理论的能量释放率概念与一个更便于计算的裂纹尖端参量——应力强度因子联系起来，从而为线弹性断裂应力学奠定了理论基础。当然，这些参量能否成为控制断裂的量，还在于它能否通过实验直接或间接地测定出来，并且要证明它确实同裂纹的扩展有关。对含裂纹试件的一些断裂试验表明，对一定的材料，在脆断情况下，确实有一个临界应力强度因子，它只与材料有关而与试件的几何形状、尺寸以及外加载荷形式无关。这个临界应力强度因子称为材料的断裂韧度，它表征材料抵抗裂纹扩展的能力。因此，脆性断裂的准则（或断裂条件）是

$$K_I \geq K_{Ic} \quad (1.5)$$

式中， K_I 为应力强度因子（推动裂纹扩展的力）， K_{Ic} 为材料的断裂韧度。

线弹性断裂力学（因为应力强度因子或能量释放率的概念的建立以及其应用都是以线弹性力学为基础的，故称之为线弹性断裂力学）的建立，为分析含裂纹结构的强度提供了新的工具，它实际上是传统强度理论的补充和革新。线弹性断裂力学不仅用于含裂纹体承载能力的预测，还扩充到预测含裂纹体在疲劳载荷

下的扩展行为，从而可以计算结构从初始裂纹扩展到临界裂纹尺寸的疲劳寿命。对裂纹运动规律的（包括裂纹在准静态载荷下的开裂和扩展以及在疲劳载荷下的扩展）了解，有助于比较合理地评定结构安全可靠，为抗断裂设计和断裂控制提供了理论基础。在此基础上发展起来的“损伤容限设计原理”是近十几年来在结构设计方面的一个重大进展，为航空航天飞行器结构设计所广泛采用。

线弹性断裂力学着重研究断裂时在裂纹尖端附近具有小范围塑性变形的情况，也就是说，外加应力要低于净截面屈服应力。但是随着断裂力学的发展和应用范围的日益扩大，人们对于不满足上述小范围塑性变形条件的断裂行为也发生了兴趣，因为有许多工程结构（如用韧性很好的结构材料做成的高压容器、核电站结构中的一些构件）正属于这一范畴。由于材料的韧性足够大，在载荷增大时，伴随着裂纹扩展的塑性区已经达到裂纹尺寸、试件尺寸的同数量级，显然线弹性的假设已不成立，所以必须发展弹塑性断裂力学。

最早考虑裂纹尖端塑性区效应的方法是在线弹性断裂力学的基础上加以修正：即认为裂纹尖端的塑性区的存在，使结构的刚度比完全按线弹性分析所得结果要“弱”一些，这相当于使裂纹长度稍微增大一点的效果。在计算应力强度因子时用增大的当量裂纹长度。用这种修正方法以扩大线弹性断裂力学应用范围的方法，是Irwin等人^[3]在1958年首先提出的，大约在同时，Wells^[4]提出了裂纹尖端张开位移（COD）作为控制裂纹扩展的参量。它不仅可用于线弹性情况，也可以用于弹塑性情况。随后许多研究者发展了一套分析含裂纹结构的COD工程方法。

1968年Rice和Hutchinson等人^[5~7]的工作，为 J 积分方法奠定了理论基础。Begley和Landes的工作使 J 积分做为弹塑性断裂力学主要参量的体系得以建立。在此基础上，在随后的年代里， J 积分理论和其应用成为弹塑性断裂力学中一个最为活跃的研究

领域，并取得了丰硕的成果。例如，美国的电力研究院（EPRI）还发展了一套可应用于工程结构的以 J 积分和COD为控制参量的弹塑性断裂分析手册，可用于压力容器，特别是核电站容器的断裂分析。

50年代初期关于焊接船体断裂事故的分析，关于“慧星号”旅客机的疲劳断裂分析以及其它一些重大断裂事件的分析，都明确地表明：分析裂纹在疲劳载荷下扩展至临界尺寸的过程是非常必要的。在众多的描述裂纹扩展速率的公式中，Paris等^[8]在1961年提出的，以应力强度因子变程做为控制裂纹扩展速率的主要参量的公式，具有明显的优越性。但由于疲劳裂纹扩展速率受到许多因素的影响，它们不是简单的Paris公式所能概括的。随后的研究工作中，提出了许多改进了的疲劳裂纹扩展速率公式，以考虑不同因素的影响；同时对谱载荷作用下疲劳裂纹行为也进行了大量的研究工作。

对动态断裂的定量分析是由Mott^[9]在1948年作出的，不久（1951年）Yoffe^[10]提出了裂纹动力学的解。以后围绕着裂纹扩展速率、动态裂纹止裂、裂纹分叉、快速断裂的起裂点、动态断裂韧度等课题进行了大量理论分析和实验工作。

在断裂力学发展的初期和以后相当长的一段时间内，研究重点是针对金属材料的，但由于大量非金属材料逐渐引入工程结构，人们也企图将断裂力学理论扩展到非金属材料、复合材料结构的分析中去。近年来，对纤维增强复合材料、高分子聚合物、陶瓷材料以及岩石等方面的断裂力学的研究，日益引起研究者的兴趣，并取得了许多成果，甚至在采矿和破冰等领域也得到了应用。

1.2 断裂力学的研究内容

从上面简单的历史回顾中可以看到，断裂力学是紧密结合工

程应用而发展起来的。它的目的是定量地研究承载体由于含有一条主裂纹发生扩展（包括静载下扩展及疲劳载荷下的扩展）而产生失效的条件。因此，它必须能定量地确定促使裂纹扩展的“推动力”、材料（或结构）阻止裂纹扩展的“阻力”以及在什么条件下结构发生失效，也就是要建立断裂准则，用什么参量表征裂纹“推动力”以及如何计算它的数值是断裂力学研究中极为重要的一个课题。线弹性断裂力学中应力强度因子 K （或其等效参量——能量释放率 G ）概念的提出，是线弹性断裂力学的奠基工作。科学工作者为研究应力强度因子的计算方法（包括解析公式及数值解法）付出了艰苦的劳动，至今仍为计算复杂结构的应力强度因子的方法进行着大量的研究工作。 J 积分和COD等参量的提出，则为弹塑性断裂力学的研究开辟了广阔的道路。

研究材料或结构的裂纹扩展阻力，更多地依靠实验。 K 或 J 的测定以及这些材料特性常数受到那些因素的影响及其定量关系，都要进行大量实验研究才能获得。

断裂准则适用范围和适用条件的研究，是将断裂力学基本原理应用于工程结构分析的先决条件。

把断裂力学应用于复杂结构的分析，也是一个很重要的研究课题。例如，航空结构中广泛采用组合形式（铆接的、胶接的）的加劲平板、加劲曲板或筒壳。这些结构在产生裂纹后，各元件之间的相互影响，使断裂分析变得复杂。又如在核电站容器中由于采用韧性很高的材料，裂纹起裂后可能有相当量的稳定扩展之后才发生失稳断裂。为了对这类结构进行断裂分析，必须研究裂纹从起裂、稳定扩展到失稳断裂这一过程中裂纹尖端的应力场、应变场的特征，以便建立相应的断裂准则。

把断裂力学原理应用于疲劳裂纹扩展的分析，并用于估算含裂纹结构的寿命，是断裂力学研究的一个极其重要的部分。在工程结构的断裂分析中需要回答下列问题：

1. 结构的剩余强度与裂纹长度有什么样的函数关系？

2. 在已知外载荷作用下结构中容许的裂纹长度（即临界裂纹长度）是多大？

3. 结构中（或假定的）某长度的初始裂纹时，扩展到临界裂纹长度需要多少时间（或多少次载荷循环）？

4. 在结构（或产品）交付使用时容许有多大的裂纹存在？

断裂参量、材料特性的计算和测定以及断裂准则的建立可以回答前两个问题；要回答后两个问题，必须研究试件或结构所含裂纹在疲劳载荷（恒幅的、变幅的或随机的）作用下增长的规律。由于裂纹疲劳扩展的机理到目前为止还不十分清楚，所以大量的研究仍主要依靠实验。当然各种计算模型的研究有助于实际工程上的应用。应当指出，疲劳裂纹扩展与外界环境（温度、湿度、介质等）密切相关，而且互相影响，因此诸如腐蚀疲劳、蠕变疲劳等边缘学科的研究也随着结构分析的需要而开展起来。总之，对于疲劳裂纹扩展规律的了解还很不深入，有待进一步的研究。

参 考 文 献

- (1) Griffith, A.A. *The Phenomena of Rupture and Flow in Solid*, Philosophical Transaction of Royal Society of London A221 163~197, 1921.
- (2) Irwin, G.R. *Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate*, Journal of Applied Mechanics 22 361~364, 1957.
- (3) Irwin, G.R., Kies J.A. and Smith H L, *Fracture Strengths Relative to Onset and Arrest of Crack Propagation*, Proceedings of the American Society for Testing Materials 58 640~657, 1958.
- (4) Wells, A A, *Application of Fracture Mechanics at and Beyond General Yielding*, British Welding Journal 10 563~570, 1963.
- (5) Rice J.R., *A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of strain Concentrations by Notches and Cracks*, Journal of Applied Mechanics 35 379~386, 1968.
- (6) Hutchinson, J. W. *Singular Behavior at the End of a Tensile Crack in a Hardening Material*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 16 13~31 1968.
- (7) Rice, J.R and Rosengren, G F, *Plane Strain Deformation Near Crack Tip in a Power-Law Hardening Material*, Journal of

- the Mechanics and Physics of Solids 10 1~12, 1968.
- [8] Paris, P. C. et al, *A Rational Analytic Theory of Fatigue*,
The Trend in Engineering 13 9~14, 1961.
- [9] Mott, N F, *Fracture of Metals*, Engineering 166 16~18, 1948.
- [10] Yoffe, E H, *The Moving Griffith Crack*, Philosophical Mag-
azine 42 739~750 1951.

第二章 线弹性断裂力学

2.1 引言

用弹性力学的线性理论研究含裂纹体在载荷作用下的力学行为和失效准则的工程学科称为线弹性断裂力学。首先要研究在裂纹尖端附近的应力场和位移场（及应变场），确定促使裂纹扩展的“推动力”，即表征裂纹尖端场强的特征参量；还要通过实验和分析，测定材料抵抗裂纹扩展的“阻力”；从而建立使裂纹扩展而致结构失效的条件，即断裂准则。

从第一章的简单叙述中还可以看出，研究含裂纹体的力学行为可从两种观点出发，即从能量平衡的观点和从裂纹尖端应力场强度的观点进行研究。以后将会证明，这两种研究方法所得到的结果，在线弹性条件下，是完全等价的，只是在处理某些具体问题，各有优点。

工程结构中存在的缺陷一般可认为是“裂纹”，即为有一定长度而其端点为极其尖锐的裂缝。按裂纹的受力特点和位移特点：可以把它们抽象化为3种基本类型(图2.1)。

1. 张开型或Ⅰ型 外载荷为垂直裂纹平面的正应力，裂纹面相对位移垂直于裂纹平面；
2. 滑开型或Ⅱ型 外载荷为面内垂直裂纹前缘的剪力，裂纹在其自身平面内作垂直于裂纹前缘的滑动；
3. 撕开型或Ⅲ型 外载荷为离面剪力，裂纹面在其本身平面内作平行于裂纹前缘的错动。

任何型式的裂纹，都可看做上述三种基本类型的组合。

本章将首先从应力强度的观点，然后从能量的观点，研究裂纹体的力学行为和失效准则。

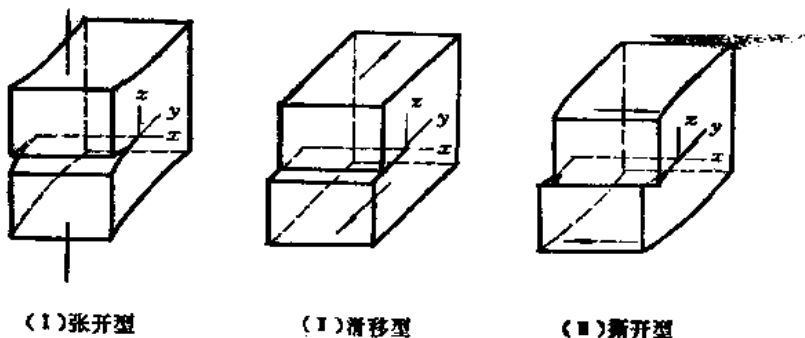


图2.1 裂纹的基本类型

2.2 线弹性裂纹尖端场

除非材料是理想弹性的，否则含裂纹体在任何外载荷下，在其裂纹尖端都必有塑性变形。因为从上一章所介绍的Колосов和Inglis的分析结果看，当裂纹很尖锐时，在尖端处的应力集中程度是很高的，其局部高应力必然导致材料屈服。因此，严格地说，要处理带裂纹体的力学行为时，应该考虑塑性问题。但是，当外载不太大，裂纹尖端塑性区与裂纹本身尺寸相比小得多的情况下，可认为整个构件的力学行为主要由小塑性区外的广大弹性区所决定。因此，在线弹性断裂力学分析中，可认为材料是线弹性的，并且暂不考虑裂纹尖端极小范围内的屈服问题。

对裂纹尖端的应力场和应变场的研究是非常重要的，因为这个场控制着裂纹尖端附近所发生的断裂过程。

2.2.1 含裂纹体平面问题的复变函数解法

在弹性力学课程中，一般都介绍平面问题的复变函数解法，

本节不再详细讲述其原理和推导过程。为了下面应用方便，只对其基本公式做简要回顾，并对应用于裂纹体时一些特殊情况加以简略介绍。

应力函数可以写成

$$\phi = \operatorname{Re}[zF(z) + g(z)] \quad (2.1)$$

式中， $F(z)$ ， $g(z)$ 为解析函数， $z = x + iy$ ， $\bar{z} = x - iy$ ， Re 表示复变函数的实部。应力分量和位移分量可分别表达为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}F'(z) \quad (2.2)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[zF''(z) + g''(z)] \quad (2.3)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa F(z) - z\overline{F'(z)} - \overline{g'(z)} \quad (2.4)$$

式中， $\overline{F'(z)} = \operatorname{Re}F'(z) - i\operatorname{Im}F'(z)$ ， $\overline{g'(z)} = \operatorname{Re}g'(z) - i\operatorname{Im}g'(z)$ ， Im 表示复变函数的虚部， μ 为剪切弹性模量；

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (\text{平面应变}) \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & (\text{平面应力}) \end{cases}$$

下面研究应力函数在裂纹体应力分析中的应用。令 x 轴在裂纹平面内垂直于并指向裂纹前缘， y 轴逆时针向并垂直于 x 轴。

(a) I型裂纹的情况。此时 x 轴是对称轴，在 x 轴上 ($y = 0$) 到处满足 $\tau_{xy} = 0$ 的条件，则需有下列条件

$$g'_1(z) = F_1(z) - zF'(z) \quad (2.5)$$

将式(2.5)代入式(2.1)，得到应力函数为

$$\phi_1(x, y) = \operatorname{Re}z_1(z) + y\operatorname{Im}z_1(z) \quad (2.6)$$

式中， $Z_1(z) = 2F'(z)$ ； $Z_1(z) = \int Z_1(z)dz = 2F(z)$ ； $\bar{z}_1(z) = \int \bar{z}_1(z)dz$ 。

上面积分中的积分常数只引起刚体位移而不产生应力，故可以略去。

将式(2.5)代入式(2.2)及(2.3)，得到应力分量的表达式为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z_1(z) - y \operatorname{Im} Z_1'(z) \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1(z) + y \operatorname{Im} Z_1'(z) \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

由上式可见，在 x 轴上 ($y=0$) $\tau_{xy}=0$ 。

将式(2.5)代入式(2.4)，可得位移分量为

$$\left. \begin{aligned} 4\mu u &= (\kappa - 1) \operatorname{Re} \bar{Z}_1(z) - 2y \operatorname{Im} Z_1(z) \\ 4\mu v &= (\kappa + 1) \operatorname{Im} \bar{Z}_1(z) - 2y \operatorname{Re} Z_1(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

函数 $Z_1(z)$ 称做 Westergaard 函数。由式(2.7)和(2.8)可见，只要找到满足边界条件的函数 $Z_1(z)$ ，裂纹尖端附近的应力场和位移场就可以求得。

(b) I 型裂纹的情况。如果以 x 轴为构件的对称轴，裂纹面与 x 轴重合，并且外载荷是关于 x 轴反对称的，则在 x 轴上应满足 $\sigma_y=0$ 。此时应有关系式

$$g_1'(z) = -F_1(z) - zF_1'(z) \quad (2.9)$$

式中，下标 I 表示是对应于 I 型裂纹的。将式(2.9)代入式(2.1)，得到

$$\Phi_1(x, y) = -y \operatorname{Re} \bar{Z}_1(z) \quad (2.10)$$

式中， $Z_1(z) = 2iF_1'(z)$ ； $\bar{Z}_1(z) = 2iF_1(z)$ 。

再将式(2.10)代入式(2.2)及(2.3)，得到应力分量的表达式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Im} Z_1(z) + y \operatorname{Re} Z_1'(z) \\ \sigma_y &= -y \operatorname{Re} Z_1'(z) \\ \tau_{xy} &= \operatorname{Re} Z_1(z) - y \operatorname{Im} Z_1'(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

它们显然满足 x 轴上 $\sigma_y=0$ 的条件。把式(2.10)代入式(2.4)，得位移分量

$$\left. \begin{aligned} 4\mu u &= (\kappa + 1)\operatorname{Im}Z_{\mathbb{I}}(z) + 2y\operatorname{Re}Z_{\mathbb{I}}(z) \\ 4\mu v &= -(\kappa - 1)\operatorname{Re}Z_{\mathbb{I}}(z) - 2y\operatorname{Im}Z_{\mathbb{I}}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

函数 $Z_{\mathbb{I}}(z)$ 称做 I 型裂纹的Westergaard应力函数。

(c) I 型裂纹的情况

对 I 型裂纹这类反平面问题，其变形特点和受力特点可表示为

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

而只有 z 方向的位移和剪应力 τ_{xz} 、 τ_{yz} 。利用

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$$

关系式，代入平衡方程

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

可得到 w 的微分方程

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

即 w 是一个调和函数。由复变函数理论可知，复变函数的实部和虚部都是调和函数。选择一个解析函数 $Z_{\mathbb{I}}(z)$ ，并令

$$w(x, y) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im}Z_{\mathbb{I}}(z) \quad (2.13)$$

则应力分量和位移分量为

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial x} = \operatorname{Im}Z_{\mathbb{I}}(z) \\ \tau_{yz} &= \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \operatorname{Re}Z_{\mathbb{I}}(z) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

式中， $Z_{\mathbb{I}}(z) = dZ_{\mathbb{I}}(z)/dz$ 。