研究生教材

应用数学基础

夏宗伟 编

西安交通大学出版社

内 容 简 介

本书是为未读过大学本科“工程数学”的工科硕士研究生写的，内容包括复变函数、积分变换、常微分方程特征值问题、特殊函数和数学物理方程等共十章。每章均附有一定数量的习题及答案，供读者练习、参考。

本书也可作为工科院校本科“工程数学”课程有关部分的教材或教学参考书。

应 用 数 学 基 础

夏 宗 伟 编

责任编辑　王延华

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社印刷厂印装

陕西省新华书店发行　各地新华书店经售

*

开本 850×1168　1/32　印张　12.5　字数：314 千字

1989 年 11 月第 1 版　1989 年 11 月第 1 次印刷

印数：1——4,000

ISBN7—5605—0277—6/O·52　定价：3.05 元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院

西安交通大学出版社

1986年12月

前　　言

最近几年，编者为工科类部分专业的研究生开设“应用数学基础”课，本书就是在所用讲义的基础上修改写成的。“应用数学基础”是一门学位课程，它是专为没有读过大学“工程数学”的机械、化工等专业的研究生设置的，这就决定了本教材的基本内容。首先，它应包含“工程数学”中各有关部分的主要内容；其次，因为读者是研究生，所以各部分应适当扩大和加深，为他们以后的专业学习与研究打下坚实的基础．基于这样的要求，本书在复变函数部分加进了一致收敛性，利用它讲述解析函数项级数的各种性质，并增加了多值函数及其分枝、多值函数的级数展开和积分等，此外，解析函数零点的孤立性、唯一性定理及解析延拓也是新加内容．在数学物理方程部分，本书在热传导方程和位势方程中加进了极值原理，介绍了三类方程解的唯一性．为了突出分离变量法的理论基础，专章介绍了常微分方程的特征值问题，说明特征函数系的完备性．本书各章配有一定数量的习题，并附答案，供读者练习、参考．

根据编者的教学实践，讲完全部内容约需76学时，可以采用先讲复变函数理论，后讲数理方程，并在数理方程讲到适当部分时插讲积分变换和特殊函数的方法处理，这样既省学时，效果又好．若将本书中超出大学“工程数学”教学大纲要求的部分删去，也能供大学生使用．

国家教委工科数学课程教学指导委员会主任陆庆乐教授极其细致地审阅了复变函数部分，提出了许多宝贵的意见，编者得益

匪浅，谨向陆老致谢。另外，张自立副教授对本书其余部分也提出了不少修改意见，西安交通大学研究生院和西安交通大学出版社对本书的出版给予了大力支持，在此一并致以衷心的谢意。

限于编者水平，不免有疏漏或谬误之处，真诚希望同行们和广大读者批评指正。

编　　者

1989 年 5 月于西安交通大学

作者简介

夏宗伟　生于1934年，1956年毕业于中山大学数学系，同年9月到西安交通大学任教。现为西安交通大学副教授。1962—1965曾赴波兰雅盖龙(Jagiellon'Ski)大学进修偏微分方程，现研究抛物型方程自由边界问题，译有《抛物型偏微分方程》(A.Friedman著)，参加编写《研究生工程数学入学考试指南》等。

目　录

前言

第一章　复数

§ 1　复数的概念……………………………………(1)
§ 2　复数的代数运算………………………………(1)
§ 3　复数的几何表示　复数的三角形式
　　和指数形式……………………………………(3)
§ 4　复数的乘幂与方根……………………………(6)
习　题……………………………………………(8)

第二章　复变函数

§ 1　复变函数的概念………………………………(10)
§ 2　极限和连续性…………………………………(15)
§ 3　函数的导数 Cauchy-Riemann条件　解析函数(23)
§ 4　初等函数………………………………………(31)
§ 5　多值函数举例…………………………………(34)
习　题……………………………………………(47)

第三章　解析函数的积分理论

§ 1　复变函数的积分………………………………(50)
§ 2　Cauchy 定理 …………………………………(56)
§ 3　不定积分　原函数……………………………(62)
§ 4　含参变量的积分………………………………(66)
§ 5　柯西(Cauchy)积分公式及其推论……………(69)

习　题……………………………………………………(78)

第四章　解析函数项级数

§ 1　复数项级数……………………………………………(82)
§ 2　函数项级数的收敛性及一致收敛性……………(87)
§ 3　一致收敛级数的性质…………………………………(90)
§ 4　幂级数　泰勒(Taylor)级数…………………………(94)
§ 5　解析延拓…………………………………………………(109)
习　题……………………………………………………(112)

第五章　罗伦(Laurent)级数与孤立奇点

§ 1　罗伦级数…………………………………………………(115)
§ 2　孤立奇点…………………………………………………(121)
§ 3　解析函数在无穷远点的性态…………………………(127)
习　题……………………………………………………(129)

第六章　留数理论及其应用

§ 1　留数及留数定理…………………………………………(132)
§ 2　利用留数计算实积分……………………………………(138)
§ 3　对数留数…………………………………………………(155)
习　题……………………………………………………(161)

第七章　保形映射

§ 1　解析变换的性质…………………………………………(164)
§ 2　分式线性变换……………………………………………(178)
§ 3　儒可夫斯基 (Жуковский)函数 ………………………(188)
§ 4　许瓦尔兹-克瑞斯托弗尔(Schwartz-Christoffel)
积分　多角形的变换………………………………………(191)

§ 5　狄利克莱(Dirichlet)问题……………………………(195)
习　题……………………………………………………(198)

第八章　积分变换

§ 1　傅里叶(Fourier) 级数及其收敛性 ……………(203)
§ 2　傅里叶积分…………………………………………(205)
§ 3　傅里叶变换…………………………………………(207)
§ 4　傅里叶变换的性质…………………………………(209)
§ 5　δ-函数 ………………………………………………(213)
§ 6　拉普拉斯 (Laplace) 变换……………………………(220)
§ 7　拉普拉斯变换性质…………………………………(224)
§ 8　关于拉普拉斯变换求逆……………………………(231)
§ 9　用拉普拉斯变换解微分方程………………………(237)
习　题……………………………………………………(238)

第九章　常微分方程的本征值问题与特殊函数

§ 1　非奇异情形本征值问题的提法……………………(243)
§ 2　非奇异本征值问题的性质…………………………(244)
习题一……………………………………………………(250)
§ 3　常微分方程解的解析性质…………………………(251)
§ 4　勒让德(Legendre)方程的本征值问题…………(254)
习题二……………………………………………………(269)
§ 5　贝塞尔(Bessel)函数 ………………………………(270)
习题三……………………………………………………(286)

第十章　数学物理方程

§ 1　数学物理基本方程的来源　定解问题的提法…(288)
习题一……………………………………………………(298)

§ 2　二阶线性偏微分方程的分类……………………（300）
§ 3　波动方程的初始值问题……………………………（307）
习题二………………………………………………………（330）
§ 4　热传导方程的初始值问题…………………………（332）
§ 5　热传导方程的极值原理　解的唯一性…………（339）
习题三………………………………………………………（342）
§ 6　分离变量法………………………………………（343）
§ 7　特征函数法——非齐次方程的求解……………（354）
§ 8　若干例题…………………………………………（358）
习题四………………………………………………………（369）
§ 9　位势方程…………………………………………（373）
习题五………………………………………………………（382）

附　　录…………………………………………………（383）

第一章 复　　数

在初等代数中已经讲过复数及其代数运算。这里我们叙述一些基本概念和定理，带有复习的性质。

§1 复数的概念

一对有序实数(a,b)称为一个复数，记作

$$z=(a,\ b)$$

数a称为复数z的**实部**，记作$a=\mathrm{Re}\,z$，数b称为复数z的**虚部**，记作$b=\mathrm{Im}z$。

两个复数$z=(a,\ b)$和$\zeta=(c,\ d)$称为**相等**的，记作$z=\zeta$，当且仅当$a=c$，且$b=d$。

§2 复数的代数运算

复数的加法和乘法由如下规则定义：

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$

$$(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

由这一定义不难证明复数的加法和乘法有如下性质：

1　满足交换律，即

$$z+\zeta=\zeta+z,\quad z\zeta=\zeta z$$

2　成立结合律，即

$$(z+\zeta)+w=z+(\zeta+w)$$

$$(z\zeta)w=z(\zeta w)$$

3　分配律也成立，即

$$z(\zeta+w)=z\zeta+zw$$

我们定义实数 c 和复数 $z=(a,\ b)$ 的乘法如下：

$$c(a,\ b)=(ca,\ cb)$$

现在我们可以将任何一个复数 $z=(a,\ b)$ 写成如下形式：

$$(a,\ b)=ae_1+be_2$$

其中　　$e_1=(1,\ 0)$，　　$e_2=(0,\ 1)$

在乘法运算中可以把数 e_1 看作单位，因为 $ze_1=z$。因此，把 e_1 和实数 1 等同起来是合理的。数 e_2 通常记作 i，即 $e_2=i$，称为**虚单位**。不难验证：$i^2=-1$.这样，一个复数 $z=(a,\ b)$ 就可表为如下形式

$$(a,b)=a+bi \tag{1.1}$$

复数 $a+0i$ 就是实数 a，而复数 $0+ib$ 称为**纯虚数**。

于是，复数的集合是实数集的扩充。实数的公理，除阿基米德(Archimedes)的有序性公理之外，对于复数仍然成立。对于复数来说，“大于”和“小于”的概念是没有意义的。

复数 $a-ib$ 称为复数 $z=a+ib$ 的共轭复数，记作 $\bar{z}$.

显然，复数 $z=a+ib$ 等于零，当且仅当 $a=0$，且 $b=0$。

复数的减法运算定义为加法的逆运算。复数 $z=a+ib$ 称为复数 $z_1=a_1+ib_1$ 和 $z_2=a_2+ib_2$ 的差，如果

$$a=a_1-a_2,\quad b=b_1-b_2$$

复数的除法定义为乘法的逆运算。复数 $z=a+ib$ 称为复数 $z_1=a_1+ib_1$ 和 $z_2=a_2+ib_2(\neq 0)$ 的商，如果 $z_1=z\cdot z_2$。因此，商数 z 的实部 a 和虚部 b 可以从下面的线性方程组求得：

$$a_2a-b_2b=a_1$$
$$b_2a+a_2b=b_1$$

由于 $a_2^2+b_2^2\neq 0$，这一方程组有唯一解，解之得

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1 a_2-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2} \tag{1.2}$$

注 式(1.2)可以用更简便的方法得到。事实上

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2+i(b_1 a_2-a_1 b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$

$$=\frac{a_1 a_2+b_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\,\frac{b_1 a_1-a_1 b_2}{a_2^2+b_2^2}$$

§3 复数的几何表示 复数的三角形式和指数形式

既然我们把复数定义为一有序的实数对，所以自然把复数 $z=a+ib$ 看作是 x，y 平面上直角坐标为 $x=a$，$y=b$ 的点。数 $z=0$ 对应于平面的原点。我们把这一平面称为**复平面**；横轴称为复平面的**实轴**，纵轴称为**虚轴**。这样我们就建立了一切复数的集合和复平面上的点之间的一一对应关系。我们也可以将复数 $z=a+ib$ 和从原点到坐标为(a, b)的点的矢量等同起来，因而也可以使所有复数$z=a+ib$的集合和矢量之间建立一一对应关系，该矢量在横轴和纵轴上的投影分别等于 a 和 b。以后我们将不再区分复数 z 和复平面上的点 z。

复数除表示式(1.1)之外还有其它十分重要的表示式。我们可以用极坐标(ρ, φ)来确定平面上点的位置，其中 ρ 是坐标原点到那点的距离，而 φ 是给定点的矢径与极轴正向之间的夹角，通常认为反时针方向是角 φ 的正向$(-\infty<\varphi<\infty)$。如果 $z\neq 0$，利用极坐标和直角坐标的关系式

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi$$

可以得到复数的三角形式（极坐标形式）

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi) \tag{1.3}$$

其中 ρ 称为复数 z 的**模**（或**绝对值**），记作 $\rho=|z|$，而 φ 则称

为复数 z 的**辐角**，记作 $\varphi=\mathrm{Arg}z$. 不难用复数的实部和虚部来表示模和辐角：

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{b}{a}$$

我们知道，任一非零复数 z 有无穷多个辐角，而任意两个辐角之差为 2π 的整数倍，若以 $\arg z$ 记这无穷多个辐角中满足不等式

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi$$

的一个特定值，则 z 的一切辐角便可表为

$$\varphi=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1.4}$$

并称 $\arg z$ 为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值.

复数 $z=0$ 的模为零，辐角无意义.

两个非零的复数相等的充要条件是它们的模相等，而它们的**辐角或者相等或者相差 2π 的整数倍.**

彼此共轭的两个复数有相同的模，而辐角相差一个符号.

设 $z_1=a_1+ib_1$，$z_2=a_2+ib_2$ 是两个复数，

则 $z_1+z_2=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)$ 有明显的几何意义. 从图 1.1 看出，z_1+z_2 是对应于 z_1 和 z_2 的矢量的和.

复数 $-z_1$、z_2-z_1 也有明显的几何解释(图 1.1)，$-z_1$ 对应于这样的矢量，它与表示 z_1 的矢量有相同的模，但方向相反. 而表示 $\bar{z}$ 的矢量则是表示 z 的矢量关于实轴的反射 (见图 1.2).

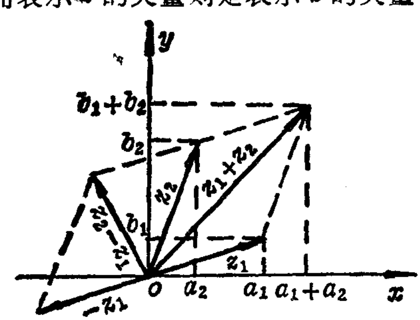

图 1.1

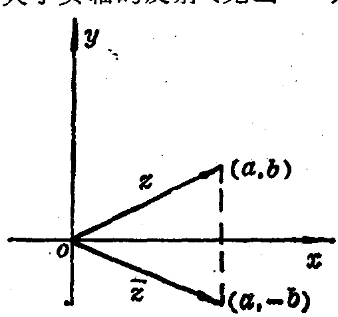

图 1.2

显然，如下关系成立：

$$|z|=|-z|=|\bar{z}|$$

$$\arg z=-\arg\bar{z},\ \arg(-z)=\pi+\arg z$$

如果定义 $$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

从(1.3)便得到复数的指数形式

$$z=\rho e^{i\varphi} \tag{1.5}$$

显然，我们有

$$\begin{aligned} e^{-i\varphi}&=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)\\ &=\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{\overline{i\varphi}} \end{aligned}$$

$$|e^{i\varphi}|=|e^{-i\varphi}|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$$

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}&=(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\\ &=(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\ &\quad+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\\ &=\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\\ &=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \end{aligned}$$

$$\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}}=e^{i\varphi_1}e^{-i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

下面我们证明两个关于模的重要不等式：

对于任意复数 z_1 和 z_2，有

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_1|\leqslant|z_1|+|z_2|$$

证明 考察以 o，z_1，z_1+z_2，为顶点的三角形（图1.3）。

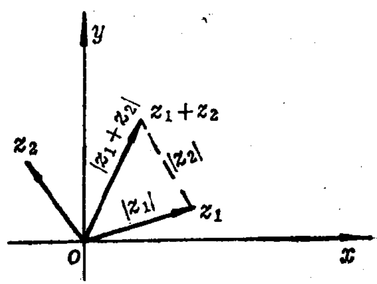

图 1.3

因为点 z 和 ζ 之间的距离等于 $|z-\zeta|$，所以这个三角形的边长分别为 $|z_1|$，$|z_2|$ 和 $|z_1+z_2|$。我们知

道，三角形一边之长不大于其余两边的长之和，又不小于其余两边的长之差的绝对值。将这一结果用于从 0 到 z_1+z_2 的那条边，就得到所要的不等式。

我们再指出显然的不等式：对于任意复数 $z=a+ib$，有

$$|z|\geqslant a,\quad |z|\geqslant b$$

在进行乘法运算时，利用复数的三角表示式十分方便。设 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z_k=\rho_k(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k)$，$k=1,2$，由乘法规则，

$$\begin{aligned}z=z_1\cdot z_2&=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\\&=\rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\quad+i\rho_1\rho_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\\&=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\\&=\rho_1\rho_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\end{aligned}$$

因此，$\rho=\rho_1\rho_2$，$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$。就是说，乘积的模等于模的乘积，而乘积的辐角等于各因子辐角的和。

同理，对于 $z_2\neq0$ 我们有

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

于是，两复数之商的模 ρ 等于两个复数的模之商 $\frac{\rho_1}{\rho_2}$，而商的辐角等于被除数的辐角与除数的辐角之差，即 $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$。

§4 复数的乘幂与方根

利用复数的三角式和指数式来求复数的正整数次幂和求方根都比较方便。复数 $z(\neq0)$ 的正整数次幂 z^n 是指 n 个相同因子 z 的乘积。设 $z=\rho e^{i\varphi}$，则

$$z^n=\rho^ne^{in\varphi}=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

当 $\rho=1$ 时，就得到著名的**棣莫佛**(De Moivre)**公式**

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

如果$w^n=z$($n\geqslant 2$为整数)，则称w为z的n次方根，记作$w=\sqrt[n]{z}$

设$z=\rho e^{i\varphi}$，$w=re^{i\theta}$，则从方根的定义得到

$$r^n e^{in\theta}=\rho e^{i\varphi}$$

于是得两个方程

$$r^n=\rho,\ n\theta=\varphi+2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

解之得

$$r=\sqrt[n]{\rho}\text{（取算术根）},\qquad \theta=\frac{\varphi+2k\pi}{n}$$

因此，z的n次方根为

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}},\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{1.6}$$

在(1.6)式中，虽然k可取一切整数值，但它实际上只给出n个不同的值，就是当$k=0,1,2\cdots,n-1$时那n个w的值。所以非零复数z的n次方根共有n个。显然这n个根都均匀地分布在以原点为中心、$\sqrt[n]{\rho}$为半径的圆周上，即它们是内接于该圆周的正n边形的n个顶点。

例1.1 求$\sqrt{1-i\sqrt{3}}$的一切值。

先将根号内的复数z化为指数形式：

$$z=1-i\sqrt{3}=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

所以该复数的平方根为

$$z_k=\sqrt{2}\,e^{-i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{2}\right)}\quad k=0,1$$

因此，$$z_0=\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-i\right)$$