北京科海培训中心

计算机专业教学辅导丛书

离散数学

——习题与解析

胡新启　胡元明　编著

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

北京科海培训中心

▶ 计算机专业教学辅导丛书

离散数学——习题与解析

胡新启　胡元明　编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 提 要

本书按教学大纲要求，通过仔细精选和解析了一些具有代表性的习题，帮助读者深化对集合论、代数系统、图论和数理逻辑内容的理解，达到提高分析和解决问题能力的目的。全书共 9 章，每章先简要介绍主要内容、重要概念和主要结论。然后给出基本题和典型习题，对疑难问题和容易混淆、甚至误解的问题进行剖析，本书独到之处在于，罗列了不同书上对同一要领的不同定义和不同的记号，在许多地方通过举反例对某些不一定成立的性质进行说明，加深读者对它的理解。

本书适用于理工科高等院校计算机及相关专业的学生作为练习辅导书，也是报考计算机专业硕士研究生的考生必读参考书，还适用于自学考试的读者和计算机等级（三级或四级）考试者研习。

版权所有，盗版必究。
本书封面贴有清华大学出版社激光防伪标签，无标签者不得销售。

书　名：离散数学——习题与解析
作　者：胡新启　胡元明
出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：北京耀华印刷有限公司（原门头沟胶印厂）
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：20.25　字数：492 千字
版　次：2002 年 1 月第 1 版　　2002 年 1 月第 1 次印刷
印　数：0001～8000
书　号：ISBN 7-302-05163-1/TP・3028
定　价：28.00 元

丛 书 序

计算机技术的迅猛发展，对现有的计算机专业的教学模式提出了新的挑战，同时也带来了前所未有的机遇。深化面向21世纪的教学改革，寻求一条行之有效的途径，培养跨世纪的高素质的科技人才，已是当务之急。

经过较长时间的研究、讨论，对教学经验进行总结之后，我们精心规划了这套“计算机专业教学·考研辅导丛书”。丛书内容针对计算机专业的主干课程，根据教学大纲要求，通过研习各类习题的解答与分析，使读者充分掌握各课程的原理和求解问题的思路和方法，深化对各课程概念的理解，提高分析与解决问题的能力。这套丛书包括:

1. 《C语言习题与解析》
2. 《C++语言习题与解析》
3. 《离散数学习题与解析》
4. 《数据结构习题与解析》(C语言篇修订版)
5. 《数据结构习题与解析》(PASCAL篇)
6. 《操作系统习题与解析》
7. 《数据库原理与应用习题解析》
8. 《编译原理习题与解析》
9. 《计算机网络习题与解析》
10. 《计算机组成原理习题与解析》
11. 《计算机系统结构习题与解析》

本套丛书由长期坚持在教学第一线的教授和副教授编写，在对丛书进行规划和评审时，我们把提高学生素质、培养学生的应用能力和创新能力作为首要的评价标准，同时注意各门课程的特色和教学的实用性。

这套教辅丛书具有以下特点:

- 语言简练，概念清晰
- 突出重点，阐述深入
- 习题丰富，启发扩展
- 由浅入深，循序渐进

如果说科学技术快速发展是21世纪的一个重要特征的话，那么，教学改革将是21世纪教育工作永恒的主题，是需要不断探索的课题。欲实现以上目标，还需要我们不断地努力实践和完善。这套教材一定有许多疏漏和不足之处需要我们不断地补充、不断地修改和完善。我们热情欢迎使用这套丛书的教师、学生和其他读者提出宝贵意见和建议，使之更加成熟。

读者联系方式： huxinqifox@263.net
x_fb@163.net

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

前　　言

当今科技的发展已进入以计算机技术为核心的信息时代，计算机技术的迅速发展和应用的日益广泛，极大地促进了“离散数学”的发展，已使“离散数学”成为计算机及其他相关的信息学科的重要理论和技术基础课。

本书作为对教学辅导资料编写的一次尝试，每章的内容包括内容分析、重点及难点解析，并给出了不同难度的基本题（选择、填空、判断题），精选了一些典型的习题。整个内容包含四个部分：集合论、代数系统、图论和数理逻辑。按教学大纲，从内容上共分9章：第1章“集合论”，讨论了集合的定义、运算及相关运算性质、幂集、笛卡尔积，基本计数原理等；第2章“二元关系”，讨论了关系的定义及表示、关系的运算（复合与求逆）、关系的基本类型、关系的闭包、等价关系、相容关系、偏序关系等；第3章“函数”，讨论了函数的定义，复合函数、反函数及集合的基数；第4章“代数系统”，主要给出了代数系统的定义和性质，半群、群及子群、陪集等的定义和性质及其判定；第5章“格”，讨论了格的两种等价定义，几种特殊的格、布尔代数等；第6章“图论”，讨论了图的基本定义、图的连通性及图的矩阵表示、最短路径、欧拉图和哈密尔顿图、二分图、图的着色等；第7章“树”，讨论了树的几种等价定义，根树、最小生成树、最优二元树等；第8章“命题逻辑”，讨论了命题及其符号化、命题公式及其真值、范式、重言式与自然推理；第9章“谓词逻辑”，讨论了谓词逻辑命题的符号化，谓词公式及其真值，前束式、重言蕴含式与推理规则等。

作为教学辅导资料，与一般教材不同的是：它首先简要介绍了每章的主要内容，列出了一些重要的概念和主要结论，并给出了每章的大纲要求，对疑难问题进行了剖析，并精选了一些有代表性的题目。本书概念清晰，所选题目覆盖面广，既有较容易的题，又有难度适中的题和难度较高的研究生入学考试题（带*号者即为研究生入学考试题）。

本书的独到之处在于：其一，本书罗列了不同书上对同一概念的不同定义或不同记号等，使得不同教材的使用者都可使用这本书；其二，每章还专门安排了重点及难点解析一节，对本章的疑难问题，即容易混淆、甚至理解错误的问题进行剖析；其三，在许多地方通过举反例对某些不一定成立的性质进行了说明，以使读者加深对它的理解。

本书适用于理工科高等院校计算机及相关专业的学生作为学习辅导书，对备考计算机专业的研究生也不失为一本好的复习资料，还适用于自学考试和计算机等级（三级或四级）考试的应试者研习。

本书第1章至第5章、第9章由胡新启编写，第6章至第8章由胡元明编写，赵迎红也参与了第1章至第5章的编写工作。

作者是在多年讲授“离散数学”课程的教学基础上编写本书的，虽竭尽全力，但由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

目 录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章 集 合 论

集合论是现代数学的基础，它几乎与现代数学的每个分支均有联系，并且已渗透到各个科学领域。集合论的内容十分丰富，并有相应的专著论述，这里只概括介绍集合论中最基本的内容，包括：集合的基本概念；子集、全集、幂集、补集等；集合的基本运算和集合代数的一些基本公式；基本计数原理等。

§1.1 内 容 分 析

§1.1.1 集合的基本概念

集合是数学中没有给出精确定义的基本的数学概念，我们通常把所考查的对象的全体称为集合。其中的每个对象称为元素（或成员），通常用大写英文字母表示集合，如：A，B，X等，用小写英文字母表示元素，如 a，b，x 等。

经常用到的几个集合有：

N 自然数集或正整数集（有些教材用N表示非负整数集，用P表示正整数集）

Z 整数集（有些教材用I表示整数集，但一般用I表示区间[0，1]）

Q 有理数集

R 实数集

C 复数集

给出一个集合的方法之一是列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并把它们用花括号括起来，例如：

$N_m = \{0,1,2,\cdots,m-1\}$； $P_m = \{1,2,\cdots,m\}$（有些教材表示为： $Z_m = \{1,2,\cdots,m\}$ ）

不含任何元素的集合称为空集，用$\varnothing$（或$\{\}$）表示。在所讨论的问题中，涉及到的全体对象的集合称为全集，通常用 U（或 E）表示。空集是惟一的，但全集只能是相对惟一的，而非绝对惟一的。

集合的元素与集合之间是属于或者不属于的关系，两者必有且只有一个成立。用$a \in A$表示元素 a 属于集合 A，用$x \notin X$表示元素 x 不属于集合 X。

集合通常有两种表示方法：列举法和描述法。列举法是列出集合的所有元素，如：$A = \{1,2,3\}$；描述法是用谓词概括该集合中元素的属性，如：$B = \{n^2 \mid n \in N\}$，$C = \{x \mid x \in R$，且$-1 < x < 1\}$等。

集合具有几个性质：

（1）确定性。对一个具体的集合来说，其元素是确定的，一个元素或者在此集合中，或者不在此集合中，两者必居其一，这与模糊集合不同。不清晰的对象构成的集合不在本书讨论范围之内。

（2）无重复性。集合中元素彼此不同，没有重复的元素，这与后面图论中涉及的多重集合不同，那里因为特殊的原因允许有重复的元素。例如：$\{1,2,1\}=\{1,2\}$。

（3）集合中元素无顺序。例如：$\{1,2,3\}=\{2,3,1\}$。

（4）集合中元素是抽象的，甚至可以是集合。例如：$A=\{1,\alpha,\{1\}\}$。

§1.1.2 子集，集合的相等

定义 1 设有 A，B 两集合，若 B 中的每个元素都是 A 中的元素，称 B 是 A 的子集，也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记为 $B\subseteq A$。若 B 是 A 的子集，且 A 中至少有一个元素不属于 B，则称 B 为 A 的真子集，记为 $B\subset A$。

显然有：$\varnothing\subseteq A$，$A\subseteq A$

据定义有：

$$B\subseteq A\Leftrightarrow \forall x\in B，有\ x\in A$$

定义 2 若两集合 A 与 B 包含的元素相同，称 A 与 B 相等，也解释为：若 A 是 B 的子集且 B 是 A 的子集，称 A 与 B 相等，即

$$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B 且 B\subseteq A$$

定义 3 设 A 是一集合，A 的所有子集构成的集合称为 A 的幂集，记为 $P(A)$（或 $p(A)$、2^A）。即 $P(A)=\{B\mid B\subseteq A\}$。

用 $|A|$ 记为 A 中元素的数目，也称为集合的基数（对有限集）。显然有：$|\varnothing|=0$。对于幂集，若 A 是有限集，则有：$|P(A)|=2^{|A|}$。

对于幂集，还有下面的结论：

定理 1 对任意集合 A，B，有：

（1）若 $A\subseteq B$，则 $P(A)\subseteq P(B)$；反之，若 $P(A)\subseteq P(B)$，则 $A\subseteq B$

（2）若 $A=B$，则 $P(A)=P(B)$；反之，若 $P(A)=P(B)$，则 $A=B$

（3）$P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

（4）$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

（5）$P(A-B)\subseteq(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$

能举例说明（3）、（5）可以发生真包含的情形。如对（5），设 $A=\{a,b\}$，$B=\{b,c\}$，则 $A-B=\{a\}$，$P(A-B)=\{\varnothing,\{a\}\}$，$(P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$，两者不等。

§1.1.3 集合的运算及其性质

给定集合 A 和 B，可以通过集合的并 $\cup$，交 $\cap$，相对补 $-$，绝对补 $\sim$，对称差 $\oplus$ 等

运算产生新的集合。

定义4 任意两集合 A 与 B 的并是一个集合，它由所有至少属于 A 或 B 之一的元素所构成，记为 $A\cup B$。

任意两集合 A 与 B 的交是一个集合，它由所有属于 A 且属于 B 的元素所构成，记为 $A\cap B$。

任意两集合 A 与 B 的差是一个集合，它由所有属于 A 但不属于 B 的元素所构成，记为 $A-B$（或 $A\backslash B$），也称为 B 相对 A 的补集。

任意两集合 A 与 B 的对称差是一个集合，它由所有属于 A 不属于 B 和属于 B 不属于 A 的元素所构成。记为 $A\oplus B$（有些教材记为 $A\Delta B$）。

集合 A 的补集是一个集合，它由所有不属于 A 的元素所构成，记为 $\overline{A}$（或 $\sim A$、A^c、A' 等），也称为 A 的绝对补集。

由以上定义，有：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}$$
$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}$$
$$A-B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}$$
$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$\overline{A}=\{x\mid x\in U\text{且}x\notin A\}$$

上面集合的并和交可以推广到 n 个集合的并和交：

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\text{；}\qquad \bigcap_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$$

并和交的运算还可推广到无穷集合的情形，设 J 为一非空指标集，有：

$$\bigcup_{j\in J}A_j=\{x\mid \exists j_0\in J,x\in A_{j_0}\}\text{；}\qquad \bigcap_{j\in J}A_j=\{x\mid \forall j\in J,x\in A_j\}$$

集合之间的相互关系和运算可以用文氏图（John Venn）形象描述，它有助于我们理解相关问题，有时对解题也很有帮助。

集合的运算具有下面一些基本性质：

定理2 对于全集 U 的任意子集 A，B，C，有（下面的算律在不同教材中，可能名称、性质等都有所不同）：

幂等律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
结合律	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
交换律	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
分配律	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap U=A$
零律	$A\cup U=U$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
双补律	$A\cup\overline{A}=U$	$A\cap\overline{A}=\varnothing$

德摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

（De Morgen）

吸收律 $A\cap(A\cup B)=A$ $A\cup(A\cap B)=A$

对合律 $\overline{\overline{A}}=A$

除了上面的性质外，关于集合的差与对称差，还有下面一些性质：

定理3 设 A，B，C 为任意集合，有：

（1）$A-B=A\cap\overline{B}$，我们通常用此式将差运算转化为其他的集合运算；

（2）$A\oplus B=B\oplus A$

（3）$A\oplus\varnothing=A$；$A\oplus A=\varnothing$；$A\oplus U=\overline{A}$；$A\oplus\overline{A}=U$

（4）$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

（5）$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$

但 $A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$ 不一定成立，如：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1\}$，$C=\{2\}$，则右边为空集，但左边为非空集。

§1.1.4 笛卡尔积

称 $<a,b>$ 为由元素 a 和 b 组成的有序对（或序偶），其中 a 为第一元素，b 为第二元素，a，b 可以相同。

定义5 设 A，B 为两集合，称 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素，构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为 A 与 B 的笛卡尔积（也称为直积），记作 $A\times B$，即 $A\times B=\{<a,b>|\, a\in A,b\in B\}$。同样可以给出 n 维笛卡尔积的定义。

据上面定义可知：若 A 或 B 中有一个空集，则 $A\times B=\varnothing$。且一般来说：$A\times B\neq B\times A$。关于笛卡尔积，有下面几条性质：

定理4 对任意集合 A，B，C，有：

（1）$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

（2）$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

（3）$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$

（4）$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

（5）$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

（6）$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$

（7）若 $C\neq\varnothing$，则 $A\subseteq B\Leftrightarrow A\times C\subseteq B\times C\Leftrightarrow C\times A\subseteq C\times B$

（8）若 A，B，C，D 非空，则 $A\times B\subseteq C\times D$ 的充要条件是 $A\subseteq C$ 且 $B\subseteq D$

注意：上面结论（7）在条件 $C\neq\varnothing$ 不满足时，结论不一定成立。

§1.1.5 集合的覆盖与划分

定义6 设A是非空集，A的划分Π是A的非空子集的集合，即

$\Pi=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$，满足：

（1）$A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing, \alpha \neq \beta$

（2）$\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = A$

定义7 非空集A的一个覆盖C是A的非空子集的集合，即

$C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$，满足：

$$\bigcup_\alpha A_\alpha = A$$

若$C=\{A_\alpha \mid A_\alpha \subseteq A, A_\alpha \neq \varnothing\}$是集合$A$的一个覆盖，且$C$中任意元素不是其他元素的子集，则称$C$是$A$的完全覆盖。

集合的覆盖与划分的区别在于前者不要求各个子集两两之交为空。

§1.1.6 基本计数原理

1. 鸽巢原理（抽屉原理）

定理5 把n+1个物体放入n个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的物体。

推广的鸽巢原理：

定理：把n个物体放入m个盒子里，则至少有一个盒子里至少有$\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor+1$个物体*。

2. 容斥原理

最简单情形：

定理：A，B均为有限集，则有：$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

有三个集合时，容斥原理的表现形式：

定理：A，B，C均为有限集，则有：

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

一般情形：

定理6 设$A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$均为有限集，则有：

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

---

* $\lfloor x \rfloor$表示小于等于x的最大整数。如$\lfloor 3.5 \rfloor = 3$。

推论：

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

$$= |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^n |A_1 \cap \cdots \cap A_n|$$

§1.2 重点及难点解析

§1.2.1 基本要求

1. 掌握集合、子集、全集、空集等概念，熟悉常用的表示集合的方法以及用文氏图来表示集合的方法，能判定元素与集合、集合与集合之间的关系。懂得两集合间相等关系和包含关系的定义和性质，能够利用定义证明两个集合相等。
2. 掌握集合的五种基本运算：并、交、补、差和对称差的定义并熟记集合运算的基本等式，能够利用它们来证明更复杂的集合等式。
3. 掌握幂集的定义及计算有限集的幂集所含元素个数，所使用的方法和思想。
4. 掌握序偶和笛卡尔积的概念。
5. 理解抽屉原理，熟记简单情形的容斥原理。
6. 理解划分与覆盖的定义，清楚两者之间的差异。

§1.2.2 疑难点解析

1. 注意两符号$\in$和$\subseteq$意义的区别。$\in$表示元素与集合之间的关系，而$\subseteq$则表示集合与集合之间的关系。但是由于集合的抽象性，集合中的元素可以是集合，故可以发生如：$A \in B$ 且 $A \subseteq B$ 的情形。
2. 集合中无重复元素，我们认为$\{a，a，b\}=\{a,b\}$。
3. 证明集合相等是一个经常遇见的问题，对集合运算的等式的证明，可以利用集合的基本等式，也可以利用定义直接证明。
4. 文氏图。在文氏图中，用矩形代表全集，用（椭）圆或其他闭曲线的内部代表 U 的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。要注意的是，文氏图只是对某些集合之间的关系及运算结果给出的一种直观而形象的示意性的表示，而不能用来证明集合等式及包含关系等。
5. 差和对称差是值得关注的一点。希望大家对定理 3 和定义 4 中的一些结果如：$A - B = A \cap \overline{B}$；$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$有较好的记忆。
6. 给定一个集合，确定其幂集，注意$\varnothing$和集合本身一定在幂集中，并且由于给定集合的不同，可能表现出来的幂集形式上有一定差别。如$A = \{a\}$和$B=\{\{a\}\}$，则它们的幂集是不同的，P（A）$=\{\varnothing,\{a\}\}$，而P（B）$=\{\varnothing,\{\{a\}\}\}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com