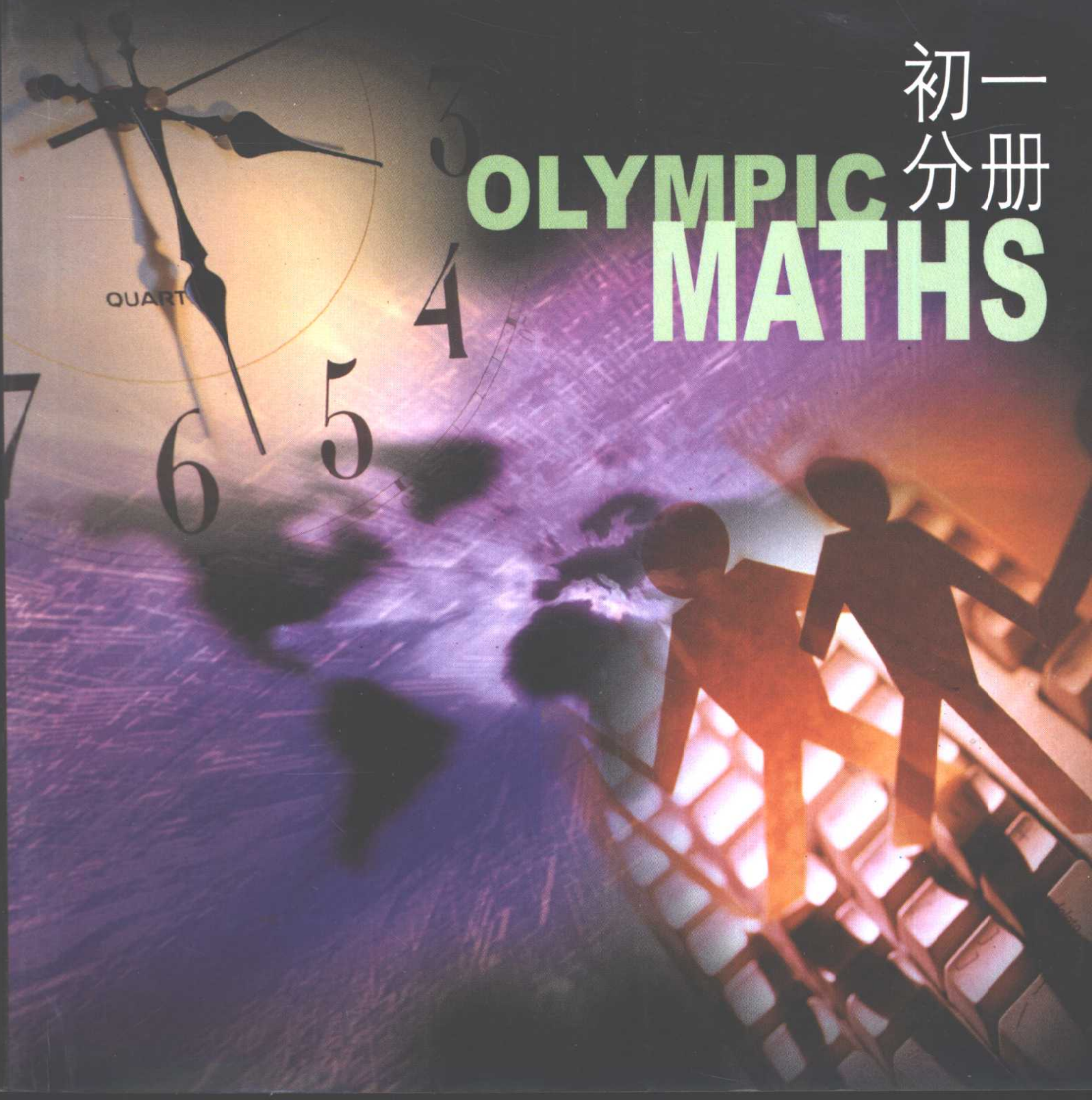
奥林匹克数学

钱展望 朱华伟/编著

湖北教育出版社

初一分册

OLYMPIC MATHS



奥林匹克数学 初一分册 钱展望 朱华伟/编著 湖北教育出版社

金 牌 教 练 教 你 学

奥林匹克数学

初一分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．初一分册/钱展望,朱华伟主编．—武汉：湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3140-9

Ⅰ．奥…　Ⅱ．①钱…②朱…　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011149 号

出版　发行:湖北教育出版社
网址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路 277 号
邮编:430015　传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经　销:新　华　书　店
印　刷:湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开　本:850mm×1168mm　1/32　7 印张
版　次:2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字　数:171 千字　印数:1-10 000

ISBN 7-5351-3140-9/G·2546　定价:9.00 元

前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中,物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展,电子计算机的发明和发展,数学不仅是整个自然科学的基础,同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛(1894年)。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明,科学合理地举办各级数学奥林匹克活动,对于传播数学思想方法,激发学生学习数学的兴趣,培养学生的创新精神,提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革,发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试,本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月

钱展望 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国“五一”劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。

朱华伟 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。

ISBN 7-5351-3140-9

9 787535 131409 >

定 价：9.00 元

目 录

第一讲　代数初步知识

知识点和方法述要

1. 代数的特点是用字母表示数，从而有别于算术. 它通过选取适当的字母代表某些数或数量使问题变得既准确、又简单明了. 这里应该注意的是：

①在同一个问题中，一个字母只能表示同一个数量，以免混淆.

②字母不但可以表示具体的数，还可以表示带运算符号的式子.

2. (1)代数式是用基本的运算符号把数、表示数的字母连接而成的式子. 它表示了数量间的关系. 如 $1, a, 3a, a+b, ab, a^2, \frac{s}{t}$ 等都是代数式. 括号不是运算符号，是表示运算顺序的符号，它也经常出现在代数式中. 单独一个数或一个字母虽然不明显涉及运算但也可看作代数式. 如把 1 看作 $1\times1, 1-0$，把 a 看作 $\frac{a}{1}, a-0$ 等.

(2)代数式书写要规范. 字母和字母相乘，数与字母相乘，乘号通常写作“·”，或省略不写，数字因数要写在字母因数的前面，但数与数相乘仍要用乘号. 代数式中出现除法运算时，一般按照分数的写法来写. 如 x 除以 $(x+1)$ 的商写成 $\frac{x}{x+1}$. 带分数与字母相乘时，若省略乘号应把带分数写成假分数，如 $x^2y\times1\frac{2}{3}$ 应写成 $\frac{5}{3}x^2y$ 或 $\frac{5x^2y}{3}$.

(3)通常认读代数式采取先算的先说，即运算顺序在前的先说，最好连运算结果一起说. 如 $a-\frac{1}{2}b$ 说成 a 与 b 的 $\frac{1}{2}$ 的差或说成 a 减去 $\frac{1}{2}b$ 的差.

(4)列代数式是把实际问题中与数量有关的词语用含数、字母和运算符号的式子表示出来，也就是用代数式表示出来. 列代数式一定

要紧扣关键词语，理清数量关系．与数量关系有关的词语中经常会出现“的”字，甚至出现多个“的”字，可抓住一个个“的”字将句子分成几个层次，逐层分析，一步步列出代数式．

(5)用数值代替代数式里的字母，按照代数式指明的运算计算出的结果叫做代数式的值．

代数式的值是由这一代数式中字母在允许范围内所取的值而确定的，它随字母所取的值的不同而变化．

求代数式的值主要有代入和计算两个步骤．代入时不要混淆，要对号入座，代数式中原来的运算符号和具体的数字都要保持不变，必要时可添上括号．

例 题 精 讲

例 1 填空：

(1) 一箱苹果有 m 千克重，另一箱苹果有 n 千克重，两箱苹果共重______千克；

(2)红星牌电扇原来每台成本 a 元，技术革新后每台成本降低 10%，那么现在每台成本是______元；

(3)从甲地到乙地的路程是 s 千米，汽车以每小时 a 千米的速度从甲地到乙地去，走了 b 小时后，汽车把速度每小时增加 2 千米，则到达乙地共需时间______小时．

解 (1)$(m+n)$千克；

(2)$(1-10\%)a$ 元；

(3)汽车先走 b 小时的路程为 ab 千米，离乙地还有$(S-ab)$千米，以后汽车的速度是$(a+2)$千米/时，到达乙地还需$\frac{s-ab}{a+b}$小时，所以一共需$\left(b+\frac{s-ab}{a+2}\right)$小时．

例 2 说出下列代数式的意义：

(1)$\frac{a+b}{c}$;

(2)$a+\frac{b}{c}$;

(3)$(x+y)^2-xy$;

(4)$x+y^2-xy$.

解 (1)a 与 b 的和除以 c 所得的商;

(2)a 与 b 除以 c 的商的和;

(3)x 与 y 的和的平方减去 x,y 乘积的差;

(4)x 与 y 的平方的和减去 x,y 乘积的差 .

例 3 用代数式表示:

(1)a,b 两数的立方差除 5 的商;

(2)比 a 除以 b 的 2 倍的商大于 c 的数;

(3)a 的 2 倍与 b 的差乘以 a 与 b 的$\frac{1}{3}$的和.

解 (1)注意到先读顺序在前,且"除"是与"除以"不同的概念,代数式表示为$\frac{5}{a^3-b^3}$.

(2)句子中出现三个"的"字,可用不同的线条顺次把它们所包含的层次区分开来:

比 a 除以b 的 2 倍的商大于 c 的数.

先表示细线的内容:$2b$,再表示波纹线的内容:$\frac{a}{2b}$,最后表示双线的内容:$\frac{a}{2b}+c$.

(3)a 的 2 倍与 b 的差乘以 a 与 b 的$\frac{1}{3}$的和.

用代数式表示$(2a-b)(a+\frac{1}{3}b)$.

例4　如图 1-1，在长方形 $ABCD$ 中，M 是 CD 边上一点，$DM = MC$，$\overset{\frown}{DN}$ 是以 A 为圆心的一段圆弧，$\overset{\frown}{NK}$ 是以 B 为圆心的一段圆弧，$AN = a$，$BN = b$.

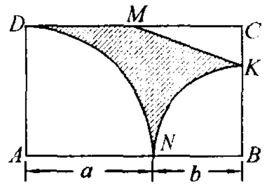


图 1-1

(1)用代数式表示图中阴影部分的面积 S；

(2)当 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，求 S.

解　(1) $S = S_{四边形ABCD} - S_{扇形AND} - S_{扇形BNK} - S_{三角形CMK}$

$$= (a+b)a - \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{4}\pi b^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(a+b)(a-b)$$

$$= (a+b)a - \frac{1}{4}\pi(a^2+b^2) - \frac{1}{4}(a+b)(a-b).$$

(2)当 $a=\frac{3}{2}$，$b=\frac{1}{2}$ 时，

$$S = \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}\cdot\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3 - \frac{5}{8}\pi - \frac{1}{2}$$

$$= 2\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\pi.$$

例5　若 $\frac{a-2b}{a+2b}=3$，求代数式 $\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{3a-6b}{4a+8b}$ 的值

分析　不能直接求出 a，b，但代数式可直接与 $\frac{a-2b}{a+2b}$，$\frac{a+2b}{a-2b}$ 联系起来，$\frac{a-2b}{a+2b}=3$ 时，$\frac{a+2b}{a-2b}=\frac{1}{3}$. 这样可通过整体代入的办法解决问题.

原式 $=\frac{a+2b}{a-2b}+\frac{3}{4}\cdot\frac{a-2b}{a+2b}=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times 3 = 2\frac{7}{12}$.

例6　从 1 开始，连续的奇数相加，和的情况如下表：

加数的个数(n)	和(S)
1	$1=1=1^2$
2	$1+3=4=2^2$
3	$1+3+5=9=3^2$
4	$1+3+5+7=16=4^2$
5	$1+3+5+7+9=25=5^2$
…	…

推测从 1 开始,n 个连续的奇数相加,它们的和 S 的公式是什么.取 $n=11,15,20$,检验的公式是否正确.

解 $S=1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$.

当 $n=11$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+21=\frac{(1+21)\times 11}{2}=11^2;$$

当 $n=15$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+29=\frac{(1+29)\times 15}{2}=15^2;$$

当 $n=20$ 时,

$$S=1+3+5+\cdots+39=\frac{(1+39)\times 20}{2}=20^2.$$

答 推测公式为 $S=n^2$.取 $n=11,15,20$ 检验时,推测是正确的.

练 习 一

一、填空题

1. 三个连续的奇数,中间一个为 $2k+1$,则它们的和等于______.

2. 一个两位数,十位上的数字为 a,个位上的数字比十位上的数字少 1,则这个两位数为______.

3. a 的平方与 b 的四分之三的立方的差用代数式表示为______.

4. 托运行李 p 千克(p 为整数)的费用为 c,已知托运第一个 1

千克需付2元,以后每增加1千克(不足1千克按1千克计)需增加费用5角,则计算托运行李费用 c 的公式是______.

5.一项工程甲队单独做完要 x 天,乙队单独做完要 y 天.若两队先合作 a 天后剩下的工程由乙队完成,那么剩下的工程为整个工程的______.

二、选择题

6. 某农场1993年的粮食产量为 a,以后每年比上年增长 $p\%$,那么1995年这农场的粮食产量是 ( ).

(A) $a(1+p)^2$　　(B) $a(1+p\%)^2$

(C) $a+a(p\%)^2$　　(D) $a+ap^2$

7. A、B 两地相距 m 千米,甲每小时行 a 千米,乙的速度是甲的1.2倍,那么乙从 A 到 B 的时间是 ( ).

(A) $\frac{m}{(1+1.2)a}$ 小时　　(B) $\frac{m}{1.2a}$ 小时

(C) $\frac{1.2m}{a}$ 小时　　(D) $\frac{ma}{1.2}$ 小时

8. 某商场进了一批布料,出售时要在进价(进货的价格)的基础上加一定的利润,其数量 x 与售价 y 如下表:

数量 x(米)	1	2	3	4	……
售价 y(克)	7+0.2	14+0.4	21+0.6	28+0.8	……

下列用 x 表示 y 的公式中正确的是 ( ).

(A) $y=7x+0.2$　　(B) $y=7+0.2x$

(C) $y=(7+0.2)x$　　(D) $y=8+0.3+x$

9. 浓度为 $a\%$ 的盐水 m 千克与浓度为 $b\%$ 的盐水 n 千克混合后的溶液浓度是 ( ).

(A) $\frac{a+b}{2}\%$　　(B) $(am+bn)\%$

(C) $\frac{am+bn}{a+b}\%$　　(D) $\frac{am+bn}{m+n}\%$

三、解答题

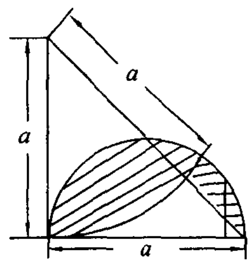
10. 船在静水中的速度为 x 千米/时，水流的速度为 2 千米/时，x 大于2，若 A、B 两地相距40千米，从 A 顺流而下到 B，再由 B 逆流而上到 A.

(1)用代数式表示往返一次的平均速度；

(2)当 $x=6$ 时，求往返一次的平均速度.

11. 已知 $a-b=3\frac{1}{7}$，$a+2b=7\frac{1}{3}$，求 $14(a-b)+\frac{13}{2}a+\frac{5}{2}b$ 的值.

12. 用代数式表示图中阴影部分的面积 S，并求出当 $a=10\text{cm}$ 时，阴影部分的面积（π 取 3.14）.



（第 12 题）

13. 是否可以确定 $\underbrace{11\cdots1}_{2000个}\underbrace{22\cdots2}_{2000个}$ 是两个连续自然数的积？

第二讲　有理数

知识点和方法述要

1.（1）大于零的数叫做正数，小于零的数叫做负数．在正数的前面加上“-”号，用以表示负数．零既不是正数，也不是负数，零不仅可以表示“没有”，而且具有非常确定的内容，如：零时、零度．零是偶数，零是正、负数的界限，它小于一切正数，大于一切负数．

（2）有理数是整数和分数的统称．有理数常见的分类是

$$\text{有理数}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\end{array}\right\}\text{非负有理数}\\\text{负有理数}\end{cases}$$

任何一个有理数都可以表示为一个既约分数$\frac{q}{p}(p\neq0)$．

（3）我们把具有某种性质的对象的全体称为具有某种性质的一个集合．如正数集合．集合是一个应用十分广泛的概念．

2．规定了原点、正方向和单位长度的直线叫做数轴．原点、正方向、单位长度是数轴的三大要素，缺一不可．数轴能形象地表示数，每个有理数都可用数轴上的一个点表示，但数轴上的点亦不都表示有理数．数与形的结合是一种十分重要的思想方法．

3．有理数可以比较大小．在数轴上表示的两个数，右边的数总比左边的数大．

4．如 3.5 与 -3.5 这样只有符号不同的两个数，我们说其中一个是另一个的相反数．如果 a 表示任意一个有理数，则 $-a$ 是 a 的相反数．零的相反数是零．

5．在数轴上表示数 a 的点与原点的距离叫做这个数 a 的绝对值，数 a 的绝对值记作 $|a|$．

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

两个互为相反数的数的绝对值相等.任何一个有理数不大于它的绝对值.两个正数绝对值大的数大;两个负数绝对值大的数反而小.

6. 分类思想是一个重要数学思想.当问题较为复杂时,可根据问题的性质采取适当的标准分类研究,从而化繁为简,利于问题解决.分类时要注意不重复、不遗漏.

7. 有理数运算法则:

(1) 两数相加,同号的取原来的符号,并把绝对值相加;异号的取绝对值较大的加数的符号,并用较大的绝对值减去较小的绝对值,且 $a-b=a+(-b)$,减法可转化为加法.

(2)两数相乘,同号得正,异号得负,并把绝对值相乘,乘积是1的两个数互为倒数. $a\div b=a\cdot\frac{1}{b}(b\neq0)$,除法可以转化为乘法.

(3)求 n 个相同因数的积的运算,叫做乘方,乘方的结果叫做幂.在 a^n 中,a 叫做底数,n 叫做指数.

(4)在有理数的混合运算中,先算乘方,再算乘除,最后算加减.如果有括号,就先算括号里面的.

(5)把一个大于10的数记成 $a\times10^n$ 的形式,其中 a 是整数数位只有一位的数,这种记数法叫做科学记数法.如 $3800=3.8\times10^3$.

例 题 精 讲

例1 已知两数 a,b 互为相反数,c,d 互为倒数,x 的绝对值是2,求

$$x^2-(a+b+cd)x+(a+b)^{2000}+(-cd)^{2001}$$

的值.

解 依题意,有 $a+b=0,cd=1$,故

原式 $= x^2 - x + 0^{2000} + (-1)^{2001}$

$\quad = x^2 - x - 1$

因 $|x| = 2$,所以,有

(i) $x = 2$ 时,原式 $= 2^2 - 2 - 1 = 1$;

(ii) $x = -2$ 时,原式 $= (-2)^2 - (-2) - 1 = 5$.

例 2 观察图 2－1 中的数轴,用字母 a, b, c 依次表示点 A、B、C 对应的数.试确定 $\frac{1}{ab}, \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c}$ 这三个数的大小关系.

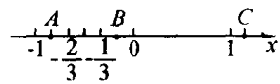


图 2－1

分析 由 B 点在 A 点右边,可知 $b - a > 0$.而 A、B 都在原点左边,故 $ab > 0$,又 $c > 0$,这说明要比较 $\frac{1}{ab}, \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c}$ 的大小,而需比较分母 $ab, b-a, c$ 的大小.

因 C 点在 1 的右边,所以 $c > 1$.因 A 点在 -1 与 $-\frac{2}{3}$ 之间,B 点在 $-\frac{1}{3}$ 与 0 之间,所以 A、B 间距离大于 $\frac{1}{3}$ 而小于 1,即 $\frac{1}{3} < b - a < 1$.同样可知 $\frac{2}{3} < |a| < 1, 0 < |b| < \frac{1}{3}$,有 $0 < ab < \frac{1}{3}$.因此,

$$0 < ab < b - a < c,$$

可得

$$\frac{1}{ab} > \frac{1}{b-a} > \frac{1}{c}.$$

例 3 在有理数 a 与 $b(b > a)$ 之间找出无数个有理数.

分析 设 m 为一个正有理数,若 P 位于 O、M 之间且 $OP = \frac{1}{n}OM$(n 为大于 1 的自然数),则 P 点对应有理数 $\frac{m}{n}$.同样,如图 2－3,

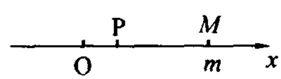


图 2－2

Q 位于 A、B 之间,且 $AQ = \frac{1}{n}AB$,则 Q 点对应的有理数

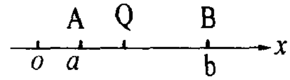


图 2－3

$$q = a + \frac{b-a}{n}.$$