微积分复习辅导

——经济应用数学(一)

广西人民出版社

前　言

一、为了使广大学员有效地学习电大统编教材，更好地理解和掌握其中的基本概念和基本原理，提高分析问题和解决问题的能力，我们组织富有电大教学经验的骨干教师编写了这套丛书，供同学们在学习教材的过程中使用。同学们通过本丛书加强平时的综合性复习训练，将会牢固地掌握所学课程的基本知识，更好地把握重点难点，有效地提高知识应用能力。这对进一步搞好期末复习考试，无疑会起到事半功倍的作用。

二、《经济应用数学（一）微积分》对电大学员来说，是一门难度较大的必修课程。本书编写力求做到通俗易懂、重点突出，尽量帮助学员理解各章的基本概念、掌握主要运算和重要应用，从而有效地提高学习效果，以利于期末复习考试。

三、参加本书编写的有梁崇明（第一章）、杨山青（第二章）、冯远征（第三章）、李郁明（第四章）。全书由杨山青、冯远征两位副教授审阅定稿。

由于编者水平有限和时间仓促，书中难免有缺点错误，诚恳希望读者批评指正。

编　者

1989年9月

目　　录

第一章 函　　数

一、基本概念：

（一）函数

定义：设有两个变量x和y，变量x的变化范围为D（实数集），如果对于D中的每个x值，按照某一对应规律f都可以唯一地确定变量y的值，我们就说变量y是变量x的函数，记为$y=f(x)$　$x\in D$

x称为自变量，y称为因变量，x的变化范围D叫做函数的定义域。

记号$y=f(x)$表示：自变量x通过对应规律f对应到y。这里，字母“f”不代表数，而是代表一个对应规律。如函数$f(x)=x^2+1$，对应规律“f”表示“将x乘以x再加上1”。

从上述中，可以发现构成函数有三个因素。（1）对应规律“f”，（2）定义域D，（3）值域（因变量的变化范围）。其中（1），（2）是主要因素。第（3）个因素是由前两个因素所决定的。

如函数$f(x)=x^2+1$，x的取值范围是$(-\infty,+\infty)$，在这个范围内任意取一点，都能通过对应规律，找到一个y值与之对应。

若　x取1时，$f(1)=1\times1+1=2$

　　x取-5时，$f(-5)=(-5)\times(-5)+1=26$

就此函数而言，通过对应规律f所找到的每一个y值都大于或等于1，故y的变化范围是$[1, +\infty)$。

例1：判别下列各对函数是否相同。

（1）$f_1(x)=\sin^2x+\cos^2x \quad f_2(x)=1$

（2）$f_1(x)=\dfrac{x^2}{x} \qquad f_2(x)=x$

解：（1）因为$y=\sin^2x+\cos^2x$与$y=1$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，对于定义域中的任意一点x_0，$f(x_0)=\sin^2x_0+\cos^2x_0=1$，而$f_2(x_0)=1$，即$f_1(x)$与$f_2(x)$的对应规律相等。另外$f_1(x)$与$f_2(x)$的值域是相同的，只有$y=1$这一点。所以函数$f_1(x)=\sin^2x+\cos^2x$与$f_2(x)=1$是两个相同的函数。

（2）$f_1(x)=\dfrac{x^2}{x}$的定义域是$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)$，而$f_2(x)=X$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，故两个函数的定义域不相同，所以这两个函数不相同。

说明：判别两个函数是否相同，往往是通过判别两个主要因素是否相同。若相同则两个函数相同，反之，则不相同。

（二）函数的奇偶性

1．奇函数

定义：若函数$y=f(x)$，当x改变符号时，函数值也改变符号，即$f(-x)=-f(x)$，此函数叫做奇函数。

如函数$f(x)=x^3$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，设x属于$(-\infty, +\infty)$，那么$-X$亦属于$(-\infty, +\infty)$。则$f(-x)=$

$(-x)^3=-x^3=-f(x)$，即$f(-x)=-f(x)$函数值改变符号，所以$f(x)=x^3$一个奇函数。

2．偶函数

定义：若函数$y=f(x)$，当x改变符号时，函数值不变，即$f(-x)=f(x)$，此函数叫做偶函数。

如函数$y=x^2$的定义域是$(-\infty, +\infty)$，设$X\in(-\infty, +\infty)$，则$-X\in(-\infty, +\infty)$，那么$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，即$f(-x)=f(x)$，函数值不变号，所以$f(x)=x^2$是一个偶函数。

说明：讨论函数的奇偶性时，函数的定义域区间必须具备着对称性，即$X\in D$（定义域），则$-X\in D$一定要成立。

例2：判别下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=4X^3-X$　(2) $f(x)=x^2e^{-x^2}$　(3) $y=X^3+X^2$

解：(1) $\because f(-x)=4(-X)^3-(-X)=-4X^3+X$
$$=-(4X^3-X)=-f(x)$$

$\therefore f(x)=4X^3-X$是奇函数。

(2) $\because f(-x)=(-x)^2e^{-(-x)^2}=x^2e^{-x^2}=f(x)$

$\therefore f(x)$是偶函数。

(3) $\because f(-x)=(-x)^3+(-x)^2=-x^3+x^2$
$$=-(x^3-x^2)\neq\begin{cases}f(x)\\-f(x)\end{cases}$$

$\therefore f(x)=x^3+x^2$是非奇非偶函数。

（三）函数的单调性

1．单调增加函数

定义：若函数$y=f(x)$对区间(a, b)内的任意两点X_1和X_2，当$X_1<X_2$时，有$f(X_1)<f(X_2)$，则称此函数在

（a，b）内是单调增加函数。

如函数$f(x)=\ln x$，其图形1．1。从图中看到在定义域区间（0，+∞）内，任意取两点x_1与x_2，都有$f(x_1)<f(x_2)$，所以$f(x)=\ln x$是单调增加函数。

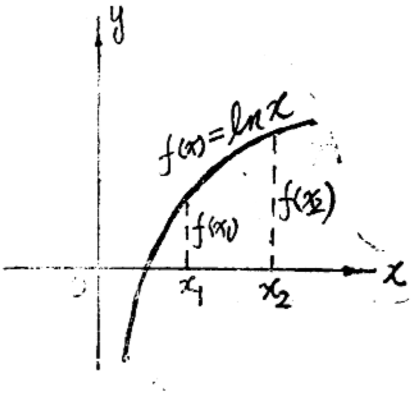

图 1.1

2．单调减少函数。

定义：若函数$y=f(x)$对区间（a，b）内任意两点X_1和X_2，当$X_1<X_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在此区间上是单调减少函数。

如函数$y=\log_{\frac{1}{2}}X$，其图形1．2

从图中看到在定义域内，只要$x_1<x_2$时，则有$f(x_1)>f(x_2)$。符合定义的要求，所以$y=\log_{\frac{1}{2}}X$是单调减少函数。

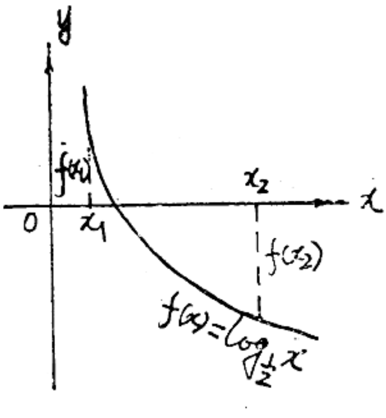

图 1.2

说明：（1）若函数$f(x)$在其定义域范围内具有单调增加性（单调减少性），则称此函数为单调增加函数（单调减少函数）。

（2）若函数$f(x)$在某区间上具有单调增加（单调减少）性，则称此函数在此区间是单调增加（单调减少）的。

如函数$y=\sin x$，其图形1．3。从图中可看到$y=\sin x$，在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是单调递增的，而在$[\frac{\pi}{2},\pi]$上是单调递减的。但在定义域（$-\infty$，$+\infty$）内，既有单调递增，也有单调递减的时候，也就是说函数$y=\sin x$，既不是单调递增函数，也不是单调递减函数。

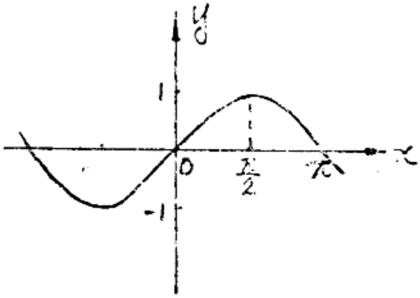

图1·3

例3：判别下列函数的增减性。

（1）$y=\ln x$　　（2）$y=(\frac{1}{2})^x$

解：（1）$\because y=\ln x$的定义域是（0，$+\infty$）

设$x_1x_2\in(0,+\infty)$内的任意两点，且$x_1<x_2$，那么

$\ln x_2-\ln x_1=\ln(\frac{x_2}{x_1})>0(\because\frac{x_2}{x_1}>1,\therefore\ln\frac{x_2}{x}>0)$

即当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_2)>f(x_1)$

故$y=\ln x$是单调递增函数。

（2）$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）

设x_1，$x_2 \in (-\infty, +\infty)$内任意两点，且$x_1 < x_2$

令$x_2 = x_1 + \triangle x$（$\triangle x > 0$），那么

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1 + \Delta x} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta x} - 1\right\}$$

又$\because \triangle x > 0$，则$\left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta x} < 1$，

故$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta x} - 1\right\} < 0$

而$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > 0$，

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\Delta x} - 1\right\} < 0$

即$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < 0$，

得$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$

因此函数$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$是单调减函数。

（四）有界函数

定义：设函数$y = f(x)$在区间（a，b）内有定义，如果存在一个正数M，对于所有$x \in (a,b)$，恒有$|f(x)| \leqslant M$，则称$f(x)$在（a，b）内是有界的。如果不存在这样的正数M，则称$f(x)$在（a，b）内是无界的。

如函数$y=\frac{1}{X}$，其图形1．4。

因为函数$y=\frac{1}{X}$在（$-\infty$，0）内是单调递减的。那么在区间（－2，－1）内，其函数值的变化范围是（-1，$-\frac{1}{2}$），则相应的绝对值也只能是$\frac{1}{2}\leqslant|f(x)|\leqslant 1$。也

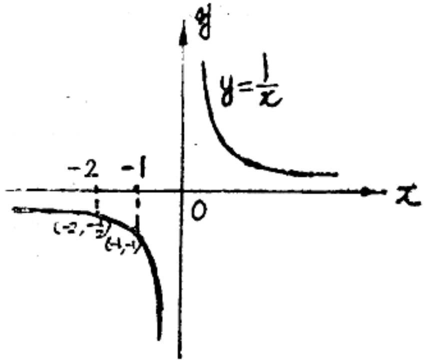

图 1·4

就是说存在一个正数M（M＝1），$|f(x)|\leqslant M$，所以$f(x)$在（－2，－1）内是有界的。

说明：（1）若函数有界，则存在的M不唯一。

（2）有界性与所讨论的区间有密切的关系。

例4：讨论函数$y=\frac{1}{X}$在（0，1〕上是否有界。

解：（反证法）假设存在一个正数M，使得$\left|\frac{1}{X}\right|\leqslant M$在（0，1〕上成立。

那么$\left|\frac{1}{X}\right|=\frac{1}{X}\leqslant M$；取$X=\frac{1}{M+1}$ $\left(\frac{1}{M+1}\in(0,1]\right)$

则有$\frac{1}{X}=\frac{1}{\frac{1}{M+1}}=M+1\leqslant M$（这不可能）

$\therefore$ 假设不能成立，即在（0，1］上函数$y=\frac{1}{X}$是无界的。

例5：讨论函数$f(x)=\cos X$是否为有界函数。

解：$f(x)=\cos x$的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）。

而值域为$-1\leqslant\cos x\leqslant 1$，

那么 $|\cos x|\leqslant 1$（即可找到$M=1$）

$\therefore f(x)=\cos x$是有界函数。

（五）复合函数

1．基本初等函数

基本初等函数是指下列六类函数。

（1）常量函数$y=C$

（2）幂函数$y=X^{\alpha}$（α为任何实数）

（3）指数函数$y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$）

（4）对数函数$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$）

（5）三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\mathrm{tg}x$，

$y=\mathrm{ctg}x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$

（6）反三角函数$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，

$y=\mathrm{arctg}x$，$y=\mathrm{arcctg}x$，

$y=\mathrm{arcsec}x$，$y=\mathrm{arccsc}x$

2．复合函数

定义：设y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\psi(x)$，当x在$\psi(x)$的定义域或其中一部分取值时，$\psi(x)$的函数值均落在$y=f(u)$的定义域内，则y成为x的函数，记为$y=f[\psi(x)]$这个函数叫做由函数$y=f(u)$及$u=\psi(x)$复合而成的复合函数，其定义域是使$u=\psi(x)$的函数值落

在$y=f(u)$的定义域内所对应的x取值的全体，u叫做中间变量。

如函数$y=\arcsin 2x$，就是由二个函数$y=\arcsin u$与，$u=2x$复合而成。由定义得复合函数的定义域是$-1\leqslant 2x\leqslant 1$（$-1\leqslant u\leqslant 1$），即$-\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant\frac{1}{2}$。但要注意，不是任何两个函数都可构成复合函数。如由$y=\arcsin u$及$u=2+x^2$就不能复合成一个复合函数。因为$u=2+x^2$的定义域（$-\infty$，$+\infty$）中任何一个X所对应的u值都大于等于2，使得$y=\arcsin u$没有定义。另外复合函数不只限于两个函数间的复合，可以是有限个函数进行复合，但必须要满足定义的要求，才能构成复合函数。

例6，下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成。

（1）$y=\sqrt{3X-1}$　　（2）$y=\sqrt{\ln\sqrt{X}}$

解：(1)函数$y=\sqrt{3x-1}$，是由$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=3x-1$复合而成。

(2)函数$y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$，是由$y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=\ln v$，$v=x^{\frac{1}{2}}$复合而成。

3．初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并用一个式子表示的函数，叫做初等函数。

下面的都是初等函数：

$$y=x^2+\sin 2x,\quad y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}},\quad y=\frac{x-1}{x-2}$$

说明：分段函数不属于初等函数。

二、主要运算

（一）建立函数关系式

1．成本函数

（1）总成本函数

总成本函数是由固定成本与变动成本两大部分组成。固定成本指生产中的固定投资，如厂房、机器等。变动成本由材料、工人工资等构成。

总成本＝固定成本＋变动成本

（2）平均成本

平均成本就是单位产品的成本。

$$平均成本=\frac{总成本}{产品数量}$$

例7：三星农车厂年产量为M台汽车。固定成本为C元。每生产一台汽车，总成本增加a元。（1）求总成本函数。（2）求平均成本函数。

解：（1）设生产x台汽车，即$x\in[0, M]$

总成本函数$C(x)=C+ax$

（2）平均成本函数$A\cdot C=\frac{c(x)}{x}=\frac{c+ax}{x}=a+\frac{c}{x}$

例8：若例7中，当M＝1万台，C＝1000万元，a＝8万元时，求（1）总成本函数，（2）平均成本函数。

解：（1）$C(x)=1000+8x$

（2）$A\cdot C=\frac{C(x)}{x}=\frac{1000+8x}{x}$

$$=8+\frac{1000}{x}\text{（万元／台）}$$

2．供应函数

供应函数是指在一定的价格条件下，厂家愿意提供的产品数量。

例9．设农用汽车的价格w元时，厂家可提供b台汽车，若价格每增加d元时，厂家可多提供e台，试求供应函数。

解：设p代表汽车的价格，q代表供应量。

得 $$q=b+\frac{(p-w)e}{d}$$

（注：以下分别用p代表价格，q代表供应量。）

例10．若例9中，当w＝8.5万元，b＝54台，d＝54千元，e＝100台时，试求供应函数。

解：即$$q=5000+\frac{p-85000}{5000}\times100$$

$$=5000+\frac{p}{50}-1700$$

$$=3300+\frac{p}{50}$$

3．需求函数

需求函数指一定的价格条件下，消费者对某种商品的需要量。

例11．设农用汽车的价格为w元时，销售量为b台，若价格每增加d元时，销售量减少g台，试求需求函数。

解：即 $$q=b-\frac{(p-w)g}{d}$$

例12．若例11中，当w＝12万，b＝1万台，d＝2千元，g＝100台时，求需求函数。

解：$$q=10000-\frac{(p-120000)}{2000}\times100$$

$$=10000-\frac{p}{20}+6000$$

$$=16000-\frac{p}{20}$$

4．价格函数

价格函数指商品销售一定量时对应的价格。

例13．设某电子厂家批发１０００台快乐牌小型收音机，其价格１００元，若多批发１００台，价格降低２元，该厂最多能提供３５００，试求价格函数。

解：设q代表销售量，p代表价格。$q\in[1000，3500]$

$$\text{价格函数}p=100-\frac{q-1000}{100}\times 2$$

$$=100-\frac{q-1000}{50}$$

$$=120-\frac{q}{50}$$

5．收入函数（收益函数）

（１）总收入函数

产品销售量与其价格的乘积，为收入函数

收入＝销售量×价格

（２）平均收入函数

指商品销售一定数量时，每单位商品所得的平均收入，也就是平均每单位的商品售价。

$$\text{平均收入}=\frac{\text{总收入}}{\text{销售量}}=\text{单位商品的售价}$$

例14：接例13，试求收入函数。

解：设R代表收入，p代表价格，q代表销售量。

$$\because R = p \cdot q \text{（由例13已知} p = 120 - \frac{q}{50} \text{）}$$

$$\therefore R = \left(120 - \frac{q}{50}\right) q = 120q - \frac{q^2}{50}$$

另外　又$\because$由$p = 120 - \frac{q}{50}$，即$q = 6000 - 50p$

$$\therefore R = p \cdot q = p \cdot (6000 - 50p)$$
$$= 6000p - 50p^2$$

说明：因为$R = p \cdot q$，而p与q之间又存在着函数关系。因而收入函数分别可以表示为价格或销售量（产量）的函数。具体情况由有关要求而定。

6．利润函数

（1）利润函数是指在收入中除去成本。

（2）平均利润函数指单位产品获得的利润。

例15：接例14，若生产小收音机的固定成本2万元，每生产一台需增加成本5．7元。（1）求利润函数。（2）求平均利润函数。

解：由例14已知$R(q) = 120q - \frac{q^2}{50}$

由题意得：$C(q) = 20000 + 5.7q$

即利润函数$L(q) = R(q) - C(q)$

$$= \left(120q - \frac{q^2}{50}\right) - (20000 + 5.7q)$$

$$= -\frac{q^2}{50} + 114.3q - 20000$$

$$= (-q^2 + 5715q - 1000000) \cdot \frac{1}{50}$$

平均利润函数$A \cdot L = \frac{L(q)}{q} = -q + 5715 - \frac{10^6}{q}$