

生活与科学文库

〔日〕堀场芳数 著

罗亮生 罗丽生 译

角



的奥秘

生活与科学
文库

图形及函数的性质研究

角

科学出版社

生活与科学文库

角 θ 的奥秘

角、图形及函数的性质研究

〔日〕堀场芳数 著
罗亮生 罗丽生 译

科学出版社

「角 θ の不思議」 堀場芳数

©Yoshikazu Horiba

All rights reserved

First published in Japan in (1995) by Kodansha Ltd. Tokyo

Chinese version published by Science Press Chinese Academy
of Sciences

Under license from Kodansha Ltd.

本书据日本讲谈社 1995 年第 1 次印刷版译

图字:01-1999-3293 号

图书在版编目(CIP)数据

角 θ 的奥秘:角、图形及函数的性质研究/[日]堀场芳
数著;罗亮生,罗丽生译.-北京:科学出版社,2001
(生活与科学文库)

ISBN 7-03-009006-3

I. 角… II. ①堀… ②罗… ③罗… III. 角-普及读
物 IV. O123.3-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 85290 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码 100717

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

定价: 12.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈北燕〉)

前言

关于图形的研究始于公元前，称为几何学。古希腊著名数学家欧几里得归纳研究了各种各样的图形，创立了“欧氏几何学”。

因直角三角形最重要的定理“勾股定理”而闻名的毕达哥拉斯自创学派，将研究图形作为毕生目标，发现了正五边形的作图方法，并以正五边形为其学派的标志。

古埃及因尼罗河水泛滥，需要重新测量土地，因而活跃着一批专门测量土地的“拉绳定界师”。

由测量 (metry) 土地 (geo) 这一词源产生了几何学 (geometry) 这一学科，在中国被译为几何学。明治时代，欧氏几何学传入日本。

另外，早在江戸时代的日本式的数学“和算”中，发现图形问题解决方法的人们，作为“算额”供奉神社佛阁而残存于

日本各地。

欧几里得的《几何学原论》(即《几何原本》),在其后的很长时期内作为世界几何学教科书的经典被采用。

日语欧氏几何学原本,是以英译欧氏几何学为蓝本,明治时代由大数学家菊池大麓先生完成的。

其后,直到昭和初年,在旧制高中(现在的大学基础课)的入学考试中,仍有许多弯弯绕的几何题目,颇使当时的考生头痛。

因为几何题难解,第二次世界大战后,欧氏几何在初中与高中被称作魔鬼学科。然而,昔日的情形已不复存在。如今,不仅大学的数学系,连土木系、建筑学系等也将几何学作为必修科目。

另外,有一段时间几何学被忽视,但最近又重新被重视起来,欧氏几何学在高中数学中已部分恢复。

笔者师从日本大数学家笹部贞市郎先生,也受过理学博士矢野健太郎先生在几何方面的直接指导,有多部专著问世。本书作为其集大成者,以《角 θ 的奥秘》为题来研究图形的性质。

研究图形的学问非常便利,像阿基米德和帕斯卡那样,无论用木棒在沙地上描图,抑或用粉笔在庭院地板上画图,都可以展开。

因画图而在凝神远眺中自然而然地发现定理、获得问题的解法和证明方法是常有的事。无论是害数学过敏症，还是害图形过敏症，只要一画图，一凝神思考，那些病症大概就会痊愈。

本书首先将有关角的故事追溯至公元前；其次，论述地球和宇宙等现代问题中的角，并拟叙述一部以角为中心的几何学故事小说。倘若能使读者诸君对角中潜伏的几何学有所领悟的话，则笔者自觉幸甚至矣！

堀场芳数

1995 年春

目 录

前 言

第一章 利用角的人类	(1)
1.1 曲线、拐角与坡道	(2)
1.2 角的部位与名称	(4)
1.3 平行线与交角	(7)
1.4 角的单位	(9)
1.5 正多边形的内角与外角	(13)
1.6 正多面体与角	(15)
1.7 锥体、柱体与角	(18)
1.8 起自江戸时代的“点心”	(20)
1.9 表针重叠的时候	(23)
1.10 方位与船的逆针	(26)
1.11 导数与斜率	(28)
第二章 角与人类社会	(32)
2.1 图形的错觉	(33)

2.2	使用角的图	(38)
2.3	棒球、橄榄球与角	(39)
2.4	比例之神泰勒斯与丸桥 忠弥	(43)
2.5	间接求出两点间的距离	(47)
2.6	道路立体枢纽	(49)
2.7	飞机的起落与山的上空	(51)
2.8	物价上升与经济	(55)
2.9	刀类与角度	(57)
2.10	距离与角度	(58)
第三章	日常生活中的角	(60)
3.1	牙刷与角度	(61)
3.2	理想的体形	(62)
3.3	人类的住所与角	(63)
3.4	餐具与角	(65)
3.5	工具与角度	(67)
3.6	车的死角	(69)
3.7	角的使用方法	(71)
3.8	运动与角	(72)
3.9	自然与角	(76)
3.10	角与人类	(76)
第四章	直线图形与角	(80)
4.1	毕达哥拉斯定理与拉绳 定界师	(81)
4.2	直尺与圆规	(82)
4.3	正 n 边形的作图与对角	

线	(87)
4.4 全等与相似	(92)
4.5 放大、缩小	(94)
4.6 平行线、比例与木板的 等分	(95)
4.7 图形的移动	(97)
4.8 矢量	(100)
4.9 正多面体的示意图与展 开图	(103)
4.10 正棱锥的展开图	(104)
4.11 正棱柱的展开图	(105)
4.12 面对称的图形	(106)
第五章 曲线、曲面与角	(108)
5.1 顿嘉利帽子的切口	(109)
5.2 旋轮线	(111)
5.3 二次、三次、四次曲线 图与切线的斜率	(113)
5.4 三角函数	(114)
5.5 仰角与俯角	(127)
5.6 三角函数公式	(128)
5.7 三角函数与直线	(135)
5.8 极坐标与极形式	(138)
5.9 三角函数的叠加与简谐 振动	(141)
5.10 反三角函数	(143)
5.11 三角方程式、三角不等 式、反三角方程式 ...	(151)
5.12 三角函数的微分与积分	

.....	(154)
5.13 反三角函数的微分与积分	(156)
5.14 平面图形的旋转体 ...	(158)
5.15 平面上绘制的世界地图	(163)
5.16 立体角与球面三角形	(165)
第六章 自然科学与角	(167)
6.1 摆的运动	(168)
6.2 照明的亮度	(171)
6.3 折射与反射	(175)
6.4 太阳、月亮、星星与地球	(187)
6.5 地球自转的影响	(214)
6.6 交通工具的形状	(219)
6.7 平板测量与误差	(221)
6.8 物体的运动与抛物线	(224)
6.9 空间图形的初步与正射影	(231)
6.10 平面上描绘的空间图形	(235)
第七章 计算机程序	(250)
与角有关的程序	(251)
三角函数表	(268)
参考文献	(269)
后记	(270)

第一章

利用角的人类



1.1 曲线、拐角与坡道

“泡沫崩溃，股价下跌，日本走向何方？”这是当前日本的社会经济状况。

股价和汇率的变动每天都可在电视上看到，对其一目了然的表示正是诸位熟知的“折线图”。

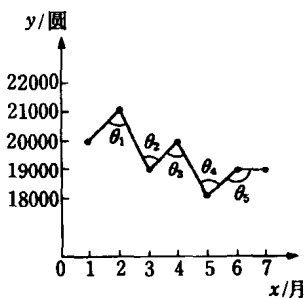


图 1.1 股价变动

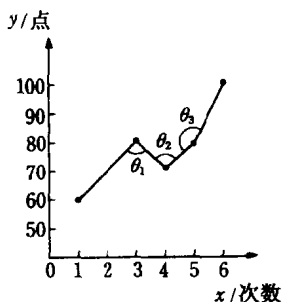


图 1.2 点数表

这是连小学生也明白的表示方法.折线图就像图 1.1 和 1.2 那样,物价与点数的变化一看便知.

盛夏,人们使用的自古就有的手工凉风发生装置,即“扇子”,其打开的样子,即上图中在一点相交的两条线段(半直线或直线)间的形状,一般称之为“角”(angle).即折线图是由线段(segment, 直线的一部分)与角构成的.

另外,过去乡间田埂上的道路是左拐右弯的曲线状,而市区的道路大致有交叉点,形成 4 个角或 3 个角等.

即使是问路,也经常听到“在小卖部屋角向左拐第

三冢”之类的话。

所谓角是什么呢？角是交叉点处的两条线段间的部分。在市区道路那儿常形成直角。

两条直线垂直相交时，在交叉点形成的 4 个角全是直角。另外，面向水平面让系有石头的线下垂，会形成垂（铅）直的线。这时，垂直线和水平面成直角。即水平面上的所有直线和线段都与垂直线成直角。这条垂直线称作水平面的垂线。

但是，小卖部房屋的角并非都是直角。它们当中既有比直角大的，也有比直角小的

第二次世界大战中，出现了放置法国旋转式交通指挥台的十字交叉口。当时为节约经费，似乎没有交通信号，现在这已鲜为人见



再者，车子一上东名高速公路，就可看到许多如图 1.3 那样的“上坡坡度 3%”，或“下坡坡度 3%”等交通标志，即用图来表示的角。其含义为每走 100 米，上升 3 米；或每走 100 米，下降 3 米。



图 1 3

在我们日常生活中，也经常得到“角 θ ”的关照。

如图 1.4 那样，我们的生活中也有许多要爬的“坡”。人生和精神追求自不待言，即使如地图上描绘的等高线及车站的台阶等等，这类要爬的坡也不胜枚举。

上坡或急或缓千姿百态。就角度而言，或急遽增加，或平缓几近水平。

台阶也好，坡道也好，“之”字形(zigzag)绕道缓上，使道路与水平面形成较小的角度，较之于径直地上下，显然更为舒适、省力。

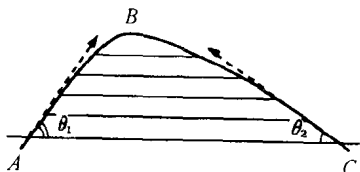


图 1 4

对老年人而言，
 急坡也好，台阶也
 好，上上下下有益健
 康。但若长距离的行
 走则应量力而力

富士山的登山

道，利用了“之”字形。

1.2 角的部位与名称

关于角字，日语中有“かく”、“ろく”、“つの”、“かど”等多种。其原始含义为“兽角的形状”。计有①犄角之角；②角笛之角；③拐角、屋角、物体突出部位（四角、外角）之角；④四角、四角形、四角的角材（四楞木材）、角帽（菱形帽顶的大学生帽）之角；⑤相交的两条直线所交（锐角、直角）之角；⑥将棋（类似中国象棋而有所不同）棋子之名（角行、飞车角）；⑦比较、竞争（角力、角逐）之角；⑧柔道（角道、角界）之角。角的含义大致如此。

从字形看，“角”是牛羊等兽角刚刚生出时的象形字。日文字音是“kaku”。此音的意思是“确（坚硬之意）”，字义是坚硬的骨头之意。

人名中则有“かど（角）”、“すみ（角）”、“つぬ（角）”、“つの（角）”、“ふさ（角）”等读音和含义。

角的字源就此结束。下面让我们谈一下数学中使用的角的各部分名称

(1) 点 O 被称作“顶点”、“角的顶点”（图 1.5）。

(2) 两条射线 OA, OB 被称作“边”或“角的边”。

(3) 角用“ $\angle AOB$ ”、“角 θ ”或 θ_1 , θ_2 表示,也常用 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 表示.

(4) $\angle AOB$ 的狭窄面称为“角的内部”.

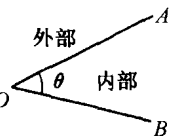


图 1.5

(5) 说 $\angle AOB$ 时,包含 $\angle AOB$ 的内部和两条边 OA 、 OB 上的点.

(6) $\angle AOB$ 的外侧平面称为“角的外部”

(7) 直角用 $\angle R$ 表示. R 是 Right Angle(直角)的第一个英文字母.

(8) $\theta < \angle R$ 时,称“ θ 是锐角”(图 1.6).

(9) $\angle R < \theta < 2\angle R$ 时,称“ θ 是钝角”.

(10) $\theta = 2\angle R$ 时,称“ θ 是平角”.

(11) $\theta < 2\angle R$ 时,称“ θ 是劣角”(图 1.7).

(12) $2\angle R < \theta < 4\angle R$ 时,称“ θ 是优角”.

(13) 对于两个角 θ_1, θ_2 , 若 $\theta_1 + \theta_2 = 2\angle R$, 则称“角 θ_1, θ_2 互为补角”或称“ θ_1 的补角是 θ_2 ”(图 1.8).

(14) 对于角 θ_1, θ_2 , 若 $\theta_1 + \theta_2 = \angle R$, 则称“角 θ_1, θ_2 互为余角”或称“ θ_1 的余角为 θ_2 ”(图 1.9).

(15) 两条直线交于一点 O 时, O 点周围形成 4 个角. 这时, 相对的某两对角 θ_1 和 θ'_1, θ_2 和 θ'_2 称为对顶角. 对顶角大小相等, 即 $\theta_1 = \theta'_1, \theta_2 = \theta'_2$ 称“ θ_1 的对顶角为 θ'_1 ”, 亦称“ θ_1 和 θ_2 互为补角”(图 1.10).

(16) 3 条直线 a, b, c 如图 1.11 那样相交, 产生 8 个角. 这时, 我们把像 θ_1 和 θ'_1 那样处于同一位置关系的两个角称作“同位角”. 即存在 4 组同位角. 又, 具有 θ_2 和 θ'_2 那样的位置关系时, θ_2 和 θ'_2 叫做“内错角”. 即有 2 组内错角.

再者, 具有像 θ'_1 和 θ_2 那样的位置关系时, θ'_1 和 θ_2

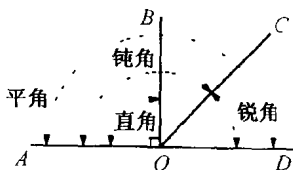


图 1.6

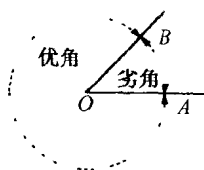


图 1.7

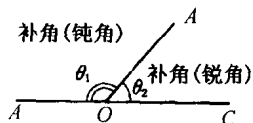


图 1.8

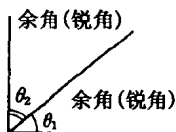


图 1.9

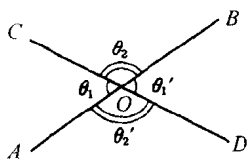


图 1.10

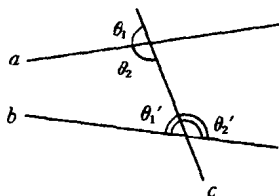


图 1.11

叫“同侧内角”或“同旁内角”. 同侧内角也有 2 组.

(17) 角的等分法. 利用直尺和圆规等工具来分角时, 虽然可把角 2^n 等分, 但却不可能 3^n 等分, 其中 n 是自然数 ($n=1, 2, 3, \dots$). 这是已被证明了的结论.

在此, 将图形的世界三大难题叙述如下:

- ① 任意角不能 3 等分
- ② 不能制成某立方体 2 倍体积的立方体
- ③ 不能制成与圆同面积的正方形.

当然,以上三大难题是相对于传统作图工具即直尺和圆规而言的.关于难题②尚有一段趣闻,现介绍如下.

古希腊的狄罗斯有个国王,他的一个王子患怪病死了.国王为王子造了个立方体的墓,但因嫌其体积太小,遂命家臣再建一个原墓体积 2 倍的新墓.家臣们将长、宽、高分别增加了 2 倍,但最后体积却是原来的 8 倍.

于是,大家明白了要使体积成为 2 倍,需将立方体的各边增加 $\sqrt[3]{2}$ 倍,但这在当时是不可能的.

后来,这一趣闻传遍整个欧洲,许多大数学家都向它挑战,但只用圆规和直尺无论如何也不能解决这一问题.

结果,随着无理数研究的推进,从数学上证明了只限于直尺和圆规要解决这一问题是不可能的.

1.3 平行线与交角

同一平面上的两条直线 AB 和 CD 没有公共点,即 AB 和 CD 不相交时,称“直线 AB 与 CD 平行”,表示如下:

$$AB \parallel CD.$$

另外,直线 AB 和 EF 如图 1.12 那样相交时,称“直线 AB 和 EF 不平行”,表示为

$$AB \nparallel EF.$$

因此, $CD \nparallel EF$.

图 1.12 中,用 α 表示的 4 个角皆相等.即 $\angle \alpha_1 = \angle \alpha_2 = \angle \alpha_3 = \angle \alpha_4$. 用 β 表示的 4 个角亦相等.也可以