北京大学数学丛书

代　　数　　学

下　册

莫宗坚 蓝以中 赵春来 著

北京大学出版社

北京大学数学丛书
代 数 学
下 册
莫宗坚 等著
*
北京大学出版社出版
(北京大学校内)
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
850×1168毫米 32开本 9.5印张 236千字
1986年12月第一版 1986年12月第一次印刷
印数：1—12,000册
*
统一书号：13209·142 定价：2.30元

下 册 目 录

第六章　环　论

§1　环的局部化

本书所说的环都是有幺元的交换环。读者请参考第三章§2关于"比域"的讨论，特别是定义3.7中提出了"局部化环"的概念。在那里，我们假定了S是一整环，在本节中，我们将讨论一般环的情形。

定义6.1　设S为一环。S的一个非空子集D如果适合下列条件：

1）$0 \overline{\in} D$；

2）$d_1, d_2 \in D \Longrightarrow d_1 \cdot d_2 \in D$，

则称之为一**分母系**。

讨论　类似于定义3.7，我们想要定义s/d，这里$s \in S$，$d \in D$。自然的，就像从整数环$\boldsymbol{Z}$引出有理数域$\boldsymbol{Q}$的情形一样，我们要求

$$\frac{s_1}{d_1}+\frac{s_2}{d_2}=\frac{s_1d_2+s_2d_1}{d_1d_2}, \qquad \frac{s_1}{d_1}\cdot\frac{s_2}{d_2}=\frac{s_1s_2}{d_1d_2}.$$

麻烦的问题是$d \in D$可能是一个零因子，即有$s \in S$，$s \neq 0$，但$sd = 0$。则我们不免得出下面的自相矛盾的算式：

$$s = s \cdot 1 = s \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) = (s \cdot d)\frac{1}{d} = 0 \cdot \frac{1}{d} = 0.$$

解决之道，是通过商环的步骤，消除这个难点。请见下定理。

定理6.1　令D为环S的一个分母系。又令

$$I = \{s: s \in S, \text{存在一个} d \in D, \text{使} sd = 0\}.$$

则有

1）I是S的一个理想；

2）令 $\sigma: S \to S/I$ 为典型映射，则 $\sigma(D)$是S/I的一个分母系，而且，如果 $\sigma(s)\sigma(d)=0$，必有 $\sigma(s)=0$，此处 $d\in D$。

证明 1）如果 $s_1, s_2\in I$，则有 $d_1, d_2\in D$，使

$$s_1d_1=0, \quad s_2d_2=0.$$

显然立得

$$(s_1\pm s_2)d_1d_2=0,$$

$$(s\,s_1)d_1=s(s_1d_1)=s\cdot 0=0, \qquad \forall s\in S.$$

于是 I 是理想。

2）显然，$\sigma(d_1)\sigma(d_2)=\sigma(d_1d_2)\in\sigma(D)$。又如果 $0=\sigma(d)\in\sigma(D)$，立得 $d\in I$，即存在 $d_1\in D$，使 $0=dd_1\in D$。这与D的性质不合，所以 $0\,\overline{\in}\,\sigma(D)$。因此 $\sigma(D)$ 是一个分母系。

现设 $\sigma(s)\sigma(d)=0$，则 $\sigma(sd)=0$，即 $sd\in I$。故必存在$d_1\in D$，使 $s(dd_1)=(sd)d_1=0$。立得 $s\in I$，即 $\sigma(s)=0$。▎

讨论 从上面的定理，我们知道：给定一个分母系D以后，我们从环S转移到环S/I来考虑，则$\sigma(D)$中没有零因子。因此，零因子所产生的难点也即消失。

定义6.2 设S是环，D是分母系。令I，σ如定理6.1所设。又令$S'=S/I$，$D'=\sigma(D)$。则我们定义S对D的**局部化环**S_D为下面的集合

$$S_D=S'_{D'}=\left\{\frac{s'}{d'}: s'\in S', \ d'\in D'\right\},$$

及其运算规则

$$\frac{s'_1}{d'_1}+\frac{s'_2}{d'_2}=\frac{s'_1d'_2+s'_2d'_1}{d'_1d'_2},$$

$$\frac{s'_1}{d'_1}\cdot\frac{s'_2}{d'_2}=\frac{s'_1s'_2}{d'_1d'_2}, \qquad \frac{s'_1d'_2}{d'_1d'_2}=\frac{s'_1}{d'_1}.$$

又如果 $s'=\sigma(s)$，$d'=\sigma(d)$，则定义

$$\frac{s}{d}=\frac{s'}{d'}.$$

讨论 1）如果S为整环，则定义 6.2 与定义3.7相同。

2）对于分母系的规定，我们也可以取消$0 \overline{\in} D$的限制。自然，如果$0 \in D$时，$S_D = 0$。

例1 令$S = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$，$D = \{(n, 0): n \neq 0\}$。则显然$D$是一个分母系。此时，不难看出

$$I = \{(0, m): m \in \boldsymbol{Z}\},$$

$$S/I \approx \boldsymbol{Z}, \quad \sigma(D) = \{n: n \neq 0\}.$$

于是，我们得出$S_D \approx \boldsymbol{Q}$。 ▎

我们任取$s \in S$，一般可以考虑

$$s \mapsto \sigma(s) \mapsto \frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}.$$

这样把S的元素s，认同为S_D的元素$\frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}$。例如，在例1中，把元素$(n, m)$认同为$n/1 = n$。显然，这个认同映射不是单射。

在下面的讨论中，我们将证明，环的局部化法与取商环法，是可以交换的。

定理6.2 设S是环，D是分母系，J是S的理想，$D \cap J = \varnothing$。令$\tau: S \to S_D$是认同映射。再令$J' = \tau(J) \cdot S_D$，即J'是J的元素在认同映射下的象所生成的理想。又令$\pi: S \to S/J$是典型映射。则恒有

$$\pi(S)_{\pi(D)} \approx S_D/J'.$$

证明 我们先要说明上面的式子是有意义的。换句话说，$\pi(D)$是$\pi(S)$的分母系。事实上，因为$D \cap J = \varnothing$，自然$0 \overline{\in} \pi(D)$。又有$\pi(d_1)\pi(d_2) = \pi(d_1 d_2) \in \pi(D)$（$\forall d_1, d_2 \in D$），所以$\pi(D)$是一个分母系。

我们定义一个映射α如下：

$$\alpha: \pi(S)_{\pi(D)} \to S_D/J',$$

$$\alpha\left(\frac{\pi(s)}{\pi(d)}\right) = \frac{s}{d} + J'.$$

请读者自行证明，这确实是个单满映射，故为同构。▌

我们常见的局部化环，是取$D=S\setminus\mathfrak{p}$，此处$\mathfrak{p}$是S的一个素理想。请注意，按照素理想的定义，我们有

$$ab\in\mathfrak{p}\Longrightarrow a\in\mathfrak{p}\text{ 或 }b\in\mathfrak{p},$$

也即

$$a\overline{\in}\mathfrak{p},\ b\overline{\in}\mathfrak{p}\Longrightarrow ab\overline{\in}\mathfrak{p},$$

$$a\in D,\ b\in D\Longrightarrow ab\in D,$$

因此，$D=S\setminus\mathfrak{p}$确是一个分母系。

符号 设$D=S\setminus\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}$是素理想，则我们用$S_{\mathfrak{p}}$表示S_D。又设$J\subset S$，$\tau: S\to S_{\mathfrak{p}}$是认同映射，则我们用$JS_{\mathfrak{p}}$表示$\tau(J)S_{\mathfrak{p}}$，即由$\tau(J)$生成的理想。

例2 令$S=\mathbf{C}[x,y]$，$\mathfrak{p}=(x-a,y-b)$，则有

$$S_{\mathfrak{p}}=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}: f,g\in S,\ g(a,b)\neq 0\right\}.$$

不难看出，$S_{\mathfrak{p}}$即是在点(a,b)有定义的有理函数的集合。

又令$R=\{(f(x),g(y)): f,g\in S,\ f(0)=g(0)\}$，即定义在$x$轴及$y$轴上的多项式组（任何一组中的两个多项式在原点取值相等）的集合。令$\mathfrak{q}=\{(xf(x),yg(y))\}$，则有

$$R_{\mathfrak{q}}=\left\{\left(\frac{f(x)}{r(x)},\frac{g(x)}{s(x)}\right): r(0)\neq 0,\ s(0)\neq 0,\ \frac{f(0)}{r(0)}=\frac{g(0)}{s(0)}\right\}.$$

不难看出，$R_{\mathfrak{q}}$即是在原点有定义的x轴及y轴上的有理函数组（每组中的两个有理函数在原点取值相等）的集合。

定义6.3 设环S中只有唯一的极大理想$\mathfrak{m}$，则称S为**局部环**。

讨论 定理3.23中已经证明，在任意环S中必有一极大理想。在局部环的定义中，我们强调只有唯一的极大理想。

定理6.3 1）环S是局部环$\Longleftrightarrow J=\{s\in S: s\text{ 非可逆元}\}$是一个理想。于是$J$是$S$的唯一的极大理想；

2）设$\mathfrak{p}$是环S的素理想，则$\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$是$S_{\mathfrak{p}}$的唯一的极大理想。

于是$S_\mathfrak{p}$是局部环。

证明 1) $\Longrightarrow$。令$\mathfrak{m}$是S的极大理想，则显然$\mathfrak{m}=J$。

$\Longleftarrow$。任取理想$I\neq S$，显然有$I\subset J$。于是J是S的唯一的极大理想。

2) 令$s/d\in S_\mathfrak{p}$，其中$d\bar{\in}\mathfrak{p}$。显然

$$\frac{d}{s}\in S_\mathfrak{p}\iff s\bar{\in}\mathfrak{p}.$$

所以s/d为可逆元当且仅当$s\bar{\in}\mathfrak{p}$，也即s/d为非可逆元当且仅当$s\in\mathfrak{p}$。于是，$\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$是$S_\mathfrak{p}$中的所有非可逆元的集合，它显然是$S_\mathfrak{p}$的一个理想。由1)，即知2)成立。▍

例3 一般言之，任取环S的一个分母系D，则S对D的局部化环S_D不一定是局部环。最简单的例子，令$D=\{1\}$，则$S_D=S$，显然不一定是局部环。

现在我们取一个实例。令$S=\mathbf{C}[x,y]$，$\mathfrak{p}=(y-x^2)$。请注意$y-x^2=0$定义一条抛物线。我们考虑$S_\mathfrak{p}$，不难看出

$$S_\mathfrak{p}=\left\{\frac{f(x,y)}{g(x,y)}:\ g(x,x^2)\neq 0\right\}.$$

此时，分母$g(x,y)$不在抛物线$y-x^2=0$上恒等于零。然而，在抛物线的个别点上，$g(x,y)$可以是零。例如，y即可以当作分母，而此多项式y在原点$(0,0)$等于零。自然，$(0,0)$是抛物线上的一点。▍

值得我们注意的是S的理想在局部化后的变动情形，即在S_D中生成的理想如何。我们有下面的定理。

定理6.4 1) 设D是环S的分母系，J是S的理想。则

$$JS_D=S_D\iff J\cap D\neq\varnothing;$$

2) 设$\mathfrak{p}$及J是S的素理想，$J\subset\mathfrak{p}$。则下面的映射是由S中含于$\mathfrak{p}$的素理想集合到$S_\mathfrak{p}$的素理想集合的单满映射：

$$J\mapsto JS_\mathfrak{p}.$$

证明 1) $\Longrightarrow$. 令 $\tau: S \to S_D$ 是认同映射. 已知 $JS_D = S_D$, 所以有

$$1 = \sum \tau(a_i)\frac{\tau(s_i)}{\tau(d_i)} = \frac{\tau(a)}{\tau(d)}, \quad s_i \in S, \ a_i, a \in J, \ d_i, d \in D.$$

即 $\qquad \tau(a) = \tau(d), \quad a - d \in \ker(\tau).$

于是存在$d' \in D$, 使$(a-d)d' = 0$. 立得 $J \ni ad' = dd' \in D$.

$\Longleftarrow$. 显然.

2) 任取 I 为$S_\mathfrak{p}$的素理想. 令

$$J = \{a: a \in S, \ aS_\mathfrak{p} \subset I\}.$$

则J显然是S的一个理想, 以及$JS_\mathfrak{p} \subset I$. 又任取$a/d \in I$, 则 $a \in J$, 以及 $a/d = a(1/d) \in JS_\mathfrak{p}$. 于是 $I = JS_\mathfrak{p}$. 又设 $ab \in J$, 则 $abS_\mathfrak{p} \subset I$. 用$I$ 是素理想这个条件, 立得 $aS_\mathfrak{p} \subset I$ 或 $bS_\mathfrak{p} \subset I$, 即 $a \in J$ 或 $b \in J$. 所以J是 S 的一个素理想. 这样, 我们证明了映射 $J \mapsto JS_\mathfrak{p}$是满射.

现在我们假设 $JS_\mathfrak{p} = J'S_\mathfrak{p}$, J 与 J' 都是含于 $\mathfrak{p}$ 的素理想, 求证 $J = J'$. 任取 $a \in J$, 则有 $a/1 \in JS_\mathfrak{p} = J'S_\mathfrak{p}$. 所以有

$$\frac{a}{1} = \sum_i a'_i \frac{s_i}{d_i} = \frac{a'}{d}, \quad a'_i, a' \in J', \ s_i \in S, \ d_i, d \overline{\in} \mathfrak{p}.$$

也即 $\qquad ad - a' \in \ker(\tau).$

于是,存在 $d' \overline{\in} \mathfrak{p}$,使$(ad-a')d' = 0 \in J'$. 但 $J' \subset \mathfrak{p}$,所以$d' \overline{\in} J'$, 而 J' 为素理想, 立得

$$ad - a' \in J', \quad ad \in J', \quad a \in J'.$$

因此 $J \subset J'$. 同法可证 $J' \subset J$. 即得 $J = J'$. 故映射 $J \mapsto JS_\mathfrak{p}$是单射. ▌

例4 对一般分母系D而言, $J \mapsto JS_D$ 不一定是单射. 例如, 取 $S = \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$, $D = \{(2n, 0): n \neq 0\}$. 则不难看出

$$S_D = \left\{\frac{m}{2n}: m, n \in \boldsymbol{Z}, \ n \neq 0\right\},$$

以及$(0)S_D=(\{0\}\oplus\boldsymbol{Z})S_D$，其中$(0)$表示$S$中的零理想。显然$\{0\}\oplus\boldsymbol{Z}$是$S$的一个非零理想。▌

任给一环S及两个非零因子a,b。则显然ab也为非零因子。所以，所有的非零因子的集合是一个分母系D。此时，S_D称为S的全比环。不难看出，当S是整环时，S的全比环即是S的比域。

习　题

1．证明局部化环可定义如下：设A是环，S是A的乘法封闭子集。一个环X称为A关于S的局部化环，如果存在一个环映射$f: A\to X$，使得对任一环映射$g: A\to B$，只要$g(s)$在B中可逆$(\forall s\in S)$，必存在唯一的环映射$h: X\to B$，使得下面的图表交换：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ X \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

2．设R是环，S是R的乘法封闭子集。如果对R的每个素理想$\mathfrak{p}$而言，

$$S\cap\mathfrak{p}\neq\varnothing,$$

问零是否一定在S中？

3．求$\boldsymbol{Z}/m\boldsymbol{Z}$的全比环，其中$m\in\boldsymbol{Z}$。

4．设R是主理想整环，证明局部化环R_D也是主理想整环。

5．设R是唯一分解环，证明R_D也是唯一分解环。

6．设R是一个局部环，I是R的真理想。证明R/I仍是局部环。

7．证明$K[[x_1,x_2,\cdots,x_n]]$是一个局部环，这里K是一个域。

8．证明在零点附近的复解析函数集$C\{\{x\}\}$是一个局部环。

9．证明$\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$是一个局部环，其中$p$为素数，$n\in \boldsymbol{N}$。

10．令$R=\boldsymbol{Z}/(60)$，$\mathfrak{p}=2R$。求$R_{\mathfrak{p}}$的基数。

11．设R是整环。证明$R=\bigcap R_{\mathfrak{m}}$，此式右端的交集是对$R$的所有极大理想$\mathfrak{m}$而言的。

12．设$\boldsymbol{Z}\subset R\subset \boldsymbol{Q}$，$R$是一个局部环。证明$R=\boldsymbol{Z}_{(p)}$或$\boldsymbol{Q}$，此处$p$是一个素数。

13．设K是域，$K[x]\subset R\subset K(x)$，$R$是局部环。证明$R=K[x]_{(f(x))}$或$K(x)$，此处$f(x)$是$K[x]$中一个不可约多项式。

§2 整数扩充

我们考虑$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$。任意有理数$a\in\boldsymbol{Q}$，都适合下面形式的整系数方程式

$$nx-m=0,\quad n,m\in\boldsymbol{Z},\ (n,m)=1.$$

而且

$$a\in\boldsymbol{Z}\Longleftrightarrow n=1.$$

又，我们熟悉的$\sqrt{2}\notin\boldsymbol{Q}$的一个古典证法如下：首先，$\sqrt{2}$适合下式：

$$x^2-2=0,$$

然后再应用下面的定理。

定理6.5 设a为有理数。如果a适合下面的整系数首一多项式

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\quad a_i\in\boldsymbol{Z},$$

则a必为整数。

证明 令$a=m/d$为既约分数，即$(m,d)=1$。代入上式化简，则得

$$m^n = d(-a_1m^{n-1} - \cdots - a_nd^{n-1}).$$

即有 $d|m^n$，所以 $d = \pm 1$。于是 $a = m/d \in \mathbf{Z}$。▎

从定理6.5，我们知道，如果$\sqrt{2}$是有理数，则必是整数。显然 $x^2 - 2 = 0$ 没有整数根，因此$\sqrt{2}$必非有理数。

类似于上面对整数的刻划方法，我们给出下面的定义。

定义6.4 给定两环 $S \subset R$。设 $r \in R$，如果 r 适合下面的首一方程式 $f(x) \in S[x]$：

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_i \in S,$$

则称 r 对 S 为**整数相关的**。

与定理6.5完全一样，我们可以证明下面的定理。

定理6.5′ 设 S 是唯一分解整环，K 是 S 的比域。如果 $r \in K$ 对 S 为整数相关的，则 r 必在 S 中。

证明 读者自证之。▎

例5 取 $\mathbf{C}[x,1/x] \supset \mathbf{C}[x]$。则$1/x$不是对 $\mathbf{C}[x]$整数相关的。我们可以把 $\mathbf{C}[x,1/x]$表示成$\mathbf{C}[x,y]/(xy-1)$。从几何观点来看，$xy-1=0$ 当 $x=0$ 时无解，即双曲线 $xy-1=0$ 上不存在任何一点，它向 x 轴的投影为原点。这恰是 $y=1/x$对$\mathbf{C}[x]$非整数相关的几何意义。一般来说，如果 y 适合下面的方程式

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) = 0,$$

而其中 $a_0(x)$不是常数，则 $a_0(x) = 0$ 所决定的 x 点上，y 的解数将少于 n。因此，y 所适合的方程式是否是首一的，有很大的几何意义。▎

我们要仿照域论中对代数相关的研究来处理环论中的整数相关。在域论中，我们应用向量空间的理论，在环论中，我们要采用模论了。

定理6.6 给定两环 $S \subset R$，$r \in R$，则下列条件是等同的：

1） r 对 S 是整数相关的；

2） $S[r]$是有限 S 模；

3） 存在一个有限 S 模 $M \subset R$，使 $1 \in M$，$rM \subset M$。

证明 1) $\Longrightarrow$ 2)。设 r 适合 $r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0$。则有

$$
\begin{aligned}
r^n &= -a_1r^{n-1}-\cdots-a_n,\\
r^{n+1} &= -a_1r^n-\cdots-a_nr\\
&= -a_1(-a_1r^{n-1}-\cdots-a_n)-a_2r^{n-1}-\cdots-a_nr\\
&= b_1r^{n-1}+\cdots+b_n, \qquad b_1,\cdots,b_n\in S,
\end{aligned}
$$

等等。不难看出，$r^n,r^{n+1},\cdots\in S\cdot 1+S\cdot r+\cdots+S\cdot r^{n-1}$，于是 $\{1,r,\cdots,r^{n-1}\}$ 是 $S[r]$ 的有限生成元集，即 $S[r]$ 是有限 S 模。

2) $\Longrightarrow$ 3)。令 $M=S[r]$ 即可。

3) $\Longrightarrow$ 1)。设 $\{m_1,\cdots,m_n\}$ 是 M 的有限生成元集。按照条件 3)，我们得出

$$
\begin{aligned}
rm_1 &= a_{11}m_1+\cdots+a_{1n}m_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad a_{ij}\in S.\\
rm_n &= a_{n1}m_1+\cdots+a_{nn}m_n,
\end{aligned}
$$

应用初等线性代数的 Cramer 法则，立得

$$
\det\begin{bmatrix} r-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & r-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & r-a_{nn}\end{bmatrix}\cdot m_i=0, \qquad i=1,\cdots,n.
$$

将上式左端的“特征行列式”展开成

$$
f(r)=r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n \quad (a_i\in S),
$$

则有

$$
f(r)\cdot m=0, \qquad \forall m\in M.
$$

取 $m=1$，即有 $f(r)=0$。所以 r 是对 S 整数相关的。 ▎

应用上面的定理，我们可以证明：

定理6.7 给定两环 $S\subset R$。则 R 中所有对 S 为整数相关的元素构成一环 S'。此环 S' 具有如下性质：如果 $r\in R$ 对 S' 为整数相关的，则必有 $r\in S'$。S' 称为 S 在 R 中的**整数闭包**。

证明 任取 $r\in R$ 对 S 为整数相关的，再任取 $g(r)\in S[r]$。

在上面的定理中，令$M=S[r]$，则显然有$1\in M$及$g(r)M\subset M$。所以$g(r)$对S是整数相关的。我们证明了$S[r]\subset S'$。

任取$r_1,r_2\in S'$。显然，r_2是对$S[r_1]$为整数相关的。于是

$$S[r_1,r_2]=S[r_1][r_2]$$

是有限$S[r_1]$模。而$S[r_1]$又是有限S模，不难得出$S[r_1,r_2]$是有限S模。任取$h(r_1,r_2)\in S[r_1,r_2]$，令$M=S[r_1,r_2]$，应用定理6.6，立得$h(r_1,r_2)$对S是整数相关的。所以$S[r_1,r_2]\subset S'$。因此，S'当然是一环。

我们又取$r\in R$对S'是整数相关的。设r适合下式：

$$r^n+s_1'r^{n-1}+\cdots+s_n'=0,\qquad s_i'\in S',$$

则$S[s_1',\cdots,s_n',r]$是有限$S[s_1',\cdots,s_n']$模。不难看出，$S[s_1',\cdots,s_n']$是有限S模，于是，$S[s_1',\cdots,s_n',r]$是有限S模。因此，r是对S整数相关的，也即$r\in S'$。▎

为了眉目清晰起见，我们给出下面的定义。

定义6.5 设环S的全比环是R。如果S在R中的整数闭包就是S自身，则称S是整数封闭的。

讨论 参考定理6.5′，任意一唯一分解整环都是整数封闭的。例如，任取一域K，则多项式环$K[x_1,\cdots,x_n]$是整数封闭的。▎

我们有下面的重要定理。

定理6.8（诺德正规化定理） 设K是域，$R=K[r_1,\cdots,r_m]$是一个整环，此处$r_1,\cdots,r_m$不一定是变数。则必存在变数$x_1,\cdots,x_n\in R$，使得R的任意元素r都是对$S=K[x_1,\cdots,x_n]$整数相关的。

证明（永田雅宜证法） 取变数$y_1,\cdots,y_m$。定义下面的环映射

$$\sigma:K[y_1,\cdots,y_m]\to K[r_1,\cdots,r_m],$$
$$\sigma(y_i)=r_i,\qquad i=1,\cdots,m.$$

如果$\ker(\sigma)=(0)$，则$K[y_1,\cdots,y_m]\approx K[r_1,\cdots,r_m]$，也即$r_1,\cdots,r_m$是变数。此时我们令$x_i=r_i$，$S=R$即可。以下，我们假

设 $\ker(\sigma)\neq(0)$。任取 $f(y_1,\cdots,y_m)\in\ker(\sigma)$，$f(y_1,\cdots,y_m)\neq 0$，读者不难看出(请补足之)，适当选取正整数

$$0\ll l_2\ll l_3\ll\cdots\ll l_m,$$

可以用下面的变数代换

$$\begin{aligned}
z_1&=y_1,\\
z_2&=y_2-y_1^{l_2}=y_2-z_1^{l_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_m&=y_m-y_1^{l_m}=y_m-z_1^{l_m},
\end{aligned}$$

使得

$$\begin{aligned}
&f(z_1,z_2+z_1^{l_2},\cdots,z_m+z_1^{l_m})\\
&\quad=a_0z_1^l+a_1(z_2,\cdots,z_m)z_1^{l-1}+\cdots+a_l(z_2,\cdots,z_m),
\end{aligned}$$

其中 $a_0\in K$，$a_0\neq 0$。至此，再相应地令

$$\begin{aligned}
r_1'&=r_1,\\
r_2'&=r_2-r_1^{l_2}=r_2-(r_1')^{l_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_m'&=r_m-r_1^{l_m}=r_m-(r_1')^{l_m},
\end{aligned}$$

不难看出，$K[r_1,\cdots,r_m]=K[r_1',\cdots,r_m']$，以及

$$a_0(r_1')^l+a_1(r_2',\cdots,r_m')(r_1')^{l-1}+\cdots+a_l(r_2',\cdots,r_m')=0.$$

所以 r_1' 对 $K[r_2',\cdots,r_m']$ 是整数相关的。于是，我们可以用 $K[r_2',\cdots,r_m']$ 代替上面的 $K[r_1,\cdots,r_m]$，然后再重新讨论。如此逐步作下去，即得本定理。❙

例6 考虑例5，$\boldsymbol{C}[x+(1/x)]\subset\boldsymbol{C}[x,1/x]$ 适合定理6.8的要求，即 $\boldsymbol{C}[x,1/x]$ 中任意元素都是对 $\boldsymbol{C}[x+(1/x)]$ 整数相关的。而 $\boldsymbol{C}[x]\subset\boldsymbol{C}[x,1/x]$ 与 $\boldsymbol{C}[1/x]\subset\boldsymbol{C}[x,1/x]$ 都不适合定理6.8的要求。从几何观点看来，就是说，从双曲线 $xy-1=0$ 向 x 轴或 y 轴投影，都不适当。如果向直线 $x+y=0$ 投影，则有某种正则性(即对于直线 $x+y=0$ 上任一点 P，都有双曲线 $xy-1=0$ 上的两个点投影到 P 上)。其代数观点上的含意，请见下定理。

定理6.9(Cohen 及 Seidenberg 上升定理) 设有两环 $S\subset R$，

而且R的元素都对S整数相关。那么，任取素理想$\mathfrak{p}\subset S$，必有素理想$\mathfrak{q}\subset R$，使$\mathfrak{q}\cap S=\mathfrak{p}$。

证明 我们先处理S是局部环，$\mathfrak{p}$是它的唯一极大理想的情形。此时，任取R的一个极大理想$\mathfrak{q}$，自然，$\mathfrak{q}$是素理想。令$\mathfrak{p}'=\mathfrak{q}\cap S$。我们有下图：

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/\mathfrak{q} \\ \cup & & \cup \\ S & \longrightarrow & S/\mathfrak{p}' \end{array}$$

显然，域$R/\mathfrak{q}$的元素对$S/\mathfrak{p}$都是整数相关的。下面的引理将证明$S/\mathfrak{p}'$也是域。因此$\mathfrak{p}'$是一个极大理想，即有$\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$。

在一般情形下，令$D=S\backslash\mathfrak{p}$。考虑$S_D$及$R_D$。此时，任取$r/d\in R_D$，设$r$适合下式：

$$r^n+a_1r^{n-1}+\cdots+a_n=0\,,\qquad a_i\in S,$$

则有

$$\left(\frac{r}{d}\right)^n+\frac{a_1}{d}\left(\frac{r}{d}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{a^n}{d^n}=0\,,$$

即r/d对S_D为整数相关的。请注意$R_D\supset S_D$，而且S_D是局部环，$\mathfrak{p}S_D$是它的唯一极大理想。因此，应用上半部的证明，我们有R_D的素理想$\mathfrak{q}'R_D$，使$\mathfrak{q}'R_D\cap S_D=\mathfrak{p}S_D$。参考下图

$$\begin{array}{ccc} R & \overset{\tau}{\dashrightarrow} & R_D \\ \cup & & \cup \\ S & \xrightarrow{\tau} & S_D \end{array}$$

令$\mathfrak{q}=\tau^{-1}(\mathfrak{q}'R_D)$，则有

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}\cap S&=\tau^{-1}(\mathfrak{q}'R_D)\cap S=\tau^{-1}(\mathfrak{q}'R_D\cap S_D)\\&=\tau^{-1}(\mathfrak{p}S_D)=\mathfrak{p}.\quad \blacksquare\end{aligned}$$

引理 设$S\subset R$是二整环，R的元素对S都是整数相关的。则S是域$\Longleftrightarrow R$是域。

证明 $\Longrightarrow$。域论。

$\Longleftarrow$. 任取 $a\in S$，$a\neq 0$。则 $a\in R$，$1/a\in R$。令 $1/a$ 适合下式：

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n+b_1\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}+\cdots+b_n=0,\qquad b_i\in S.$$

乘以 a^{n-1}，立得

$$\frac{1}{a}=-b_1-b_2a-\cdots-b_na^{n-1}\in S.$$

即 S 的任意非零元素都是可逆的。因此 S 是域。 ▎

讨论 1) 这个引理也是定理6.9的特例：任取 S 的一个极大理想 $\mathfrak{p}$，则必有 R 的一个素理想 $\mathfrak{q}$，使 $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}\cap S$。如果 R 是域，则它的唯一的素理想 $\mathfrak{q}=(0)$。因此 $\mathfrak{p}=(0)\cap S=(0)$。从这点我们易于推知 S 是域。

2) 回过头来，我们再看定理6.8. 在 n 维空间中任取一点 $(a_1,\cdots,a_n)$，它对应于素理想

$$(x_1-a_1,x_2-a_2,\cdots,x_n-a_n)\subset S=K[x_1,\cdots,x_n].$$

于是必存在一素理想 $\mathfrak{q}\subset R$，使 $\mathfrak{q}\cap S=(x_1-a_1,\cdots,x_n-a_n)$。用几何的术语来说，$\mathfrak{q}\cap S$ 即是向 n 维空间的投影。但是 $\mathfrak{q}$ 相应于什么呢？在下一节中，我们将说明，$\mathfrak{q}$ 相应于几何学中的点。综上所述，定理6.8是说：给定了一个相应于 R 的“代数多样体” V，我们可以找到一个 n 维空间 A^n，使从 V 到 A^n 的投影是满射。进而言之，它不仅是满射，还有其它的优良性质。详情见后。

3) 在定理6.9的条件下，如果有两个素理想 $\mathfrak{p}_1\subset\mathfrak{p}_2\subset S$，及素理想 $\mathfrak{q}_1\subset R$，使 $\mathfrak{q}_1\cap S=\mathfrak{p}_1$，自然 $S/\mathfrak{p}_1\subset R/\mathfrak{q}_1$ 同样适合定理6.9的条件。于是，存在 $\mathfrak{q}_2(R/\mathfrak{q}_1)\cap S/\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_2(S/\mathfrak{p}_1)$。不难看出，素理 $\mathfrak{q}_2$ 适合 $\mathfrak{q}_1\subset\mathfrak{q}_2$ 及 $\mathfrak{q}_2\cap S=\mathfrak{p}_2$。这可用下式表示：

$$\begin{array}{ll} R\supset\mathfrak{q}_2\supset\mathfrak{q}_1, & \\ \cup & \mathfrak{q}_1\cap S=\mathfrak{p}_1,\quad \mathfrak{q}_2\cap S=\mathfrak{p}_2. \\ S\supset\mathfrak{p}_2\supset\mathfrak{p}_1, & \end{array}$$

我们很容易把上面的讨论推广到 S 的一个素理想链 $\mathfrak{p}_n\supset\mathfrak{p}_{n-1}$