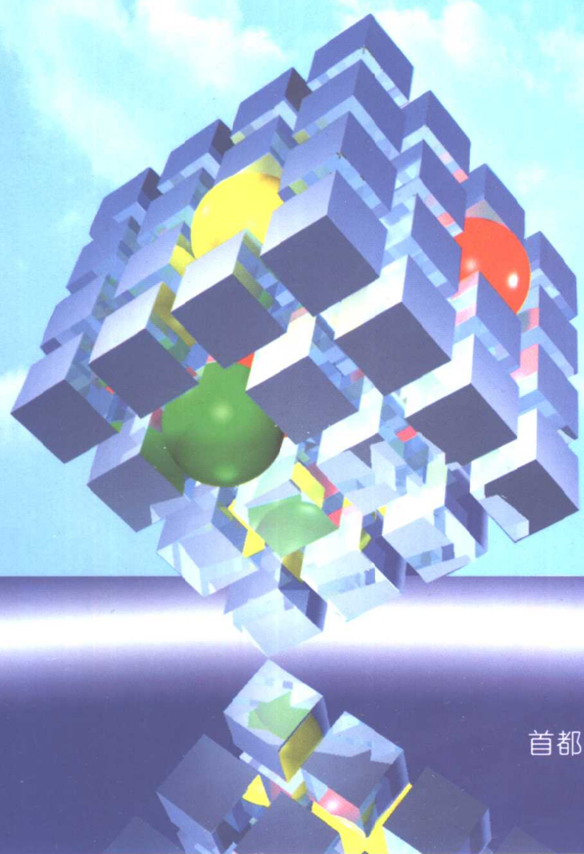
中学数学方法与解题能力培养

曾宪梓教育基金一等奖获得者

初中代数41讲

（修订版）

贾士代　主编



首都师范大学出版社

中学数学方法与解题能力培养

初中代数41讲

（修订版）

贾士代　主编

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中代数41讲:中学数学方法与解题能力培养/贾士代主编.-北京:首都师范大学出版社(2000.6修订)

ISBN 7-81039-028-7

Ⅰ.初… Ⅱ.贾… Ⅲ.代数课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(1995)第04350号

CHUZHONG DAISHU 41 JIANG

初中代数41讲

(修订版)

首都师范大学出版社

(北京西三环北路105号 邮政编码100037)

北京首师大印刷厂印刷 全国新华书店经销

2000年6月第2版 2000年11月第2次印刷

开本850×1168 1/32 印张9.625

字数245千 印数10,501～16,500册

定价11.00元

贾士代先生

作者简介

贾士代，教授，1947年11月生，1969年武汉大学数学系毕业。1983年起，他即从事一整套关于《数学素质教育工程》的理论研究和实践，其实质是通过数学“四法教育”，使每一个学生都能掌握数学的思想与方法，并具有较高的数学素质。为此，他已奋斗了16年，发表论文120篇，出版著作32部。代表作有《中学数学方法与解题能力培养》丛书、《高中数学巧妙解法400例》等。他的论文论著在国内外教育界及读者中产生较大反响，深受广大读者厚爱。1995年被河南省委、省政府命名为优秀专家，1997年荣获曾宪梓教育基金会全国高等师范院校教师奖一等奖。他的业绩曾被《中国教育报》、《组织信息报（上海）》、河南广播电台、河南电视台等多家媒体报道，并已载入《世界优秀华人教育专家名典》等30种名人辞书中。

曾宪梓教育基金会授予：

贾士代老师一九九七年高等师范院校教师奖一等奖，奖金捌万元人民币。

曾宪梓教育基金会

理事长 曾宪梓

曾宪梓教育基金会

一九九七年十二月

再版前言

贾士代教授主编的《中学数学方法与解题能力培养》丛书(一套五种)自 1993 年出版以来,在全国各地中学师生中产生了很大的反响,深受广大读者厚爱,收到了良好的社会效益.

这六年来,中学数学的教学内容已有一定变动,许多读者纷纷来信,建议该丛书修订再版. 为了满足广大读者的需要,我们对原丛书进行了认真修订. 修改时,初中部分我们按照全国九年义务教育数学教材,高中部分依据 1998 年教育部发布的《关于调整现行普通高中数学、物理学科教学内容和教学要求的意见》.

修订后的丛书有下列三个显著特点:

(一)培养素质 突出"三法"

为了应付高考和中考,学生们在学习中不得不做大量的习题集、练习册. 面对茫茫题海,许多学生苦恼,不少教师忧虑. 怎样从根本上提高学生的解题能力,使学生早日摆脱题海的束缚,怎样更好地进行素质教育,成了人们议论的焦点.

我们认为,在素质教育中,要想真正提高学生的数学能力,就必须注重发展学生的思维,必须对学生进行以"数学三法"为主要内容的数学方法教育. 所谓"数学三法",就是思维方法、学科方法和类型题解证法. 思维方法是处理数学问题的一般方法,如分析法、综合法和数形结合法等. 学科方法是每门学科的思想方法,例如,立体几何中有辅助图形法与割补法、转化为平面几何法和体积法等. 类型题解证法是数学各学科中每一种类型题的各种解法,是思维方法与学科方法、数学知识在不同类型题中的灵活应用. 解题时,思维方法是解题的先导,学科方法与类型题解证法则是解题的具体实施. 我们平常所说的解题方法与技巧,往往是在正确的思维

方法引导下，灵活运用学科方法、类型题解证法与数学知识的结果. 因此，“数学三法”是解数学题的思路、方法与技巧的源泉，是数学的“宗”. 只有使学生真正掌握了数学的“宗”，才能达到以不变应万变的目的.

本丛书修订后的每一册都是按照思维方法、学科方法与类型题解证法这三章精心编写的，力求做到层次分明、条理清晰、难易适度.

（二）方法全面　题型新颖

本丛书从几千种书刊中汲取了丰富的营养，把各家之精髓熔为一炉，汇集了中学数学的各种思维方法与解题技巧. 因此，本丛书中的方法具有全面性、系统性、普遍性和灵活性.

另外，在编写过程中，我们特别注意题型的新颖性和典型性. 除从各类书刊中精选有代表性的题目外，我们的重点是从 1994 年以来全国各地各类考试中精选数学题，因为这些题目最为活跃、最富有生命力.

（三）巧解妙证　趣味横生

数学问题的巧妙解法，往往简捷得使人惊叹，巧妙得令人叫绝. 巧妙解法能激发学生的学习兴趣，有利于培养创造思维能力. 因此，本丛书在指导学生掌握解数学题的通法外，还常常向学生展示问题的巧妙解法，使读者得到无穷的乐趣和美的享受.

本书是该丛书的一种. 第一、二章分别讲解立体几何的思维方法和学科方法，可作为高中生全面复习立体几何时使用；第三章是按教材顺序全面讲述各种类型题及其解法，可作为初学者同步学习之用.

本书由贾士代先生主编，参加编写工作的有贾士代、张子莲、贾玲娟、贾迎乐、曹全友、马十成、詹红庆、张伟奇、李济克、李光显等老师.

书中有不足和错误之处，恳请广大读者指正.

编者

目　　录

第一章 思维方法

§1.1 分析综合法

数学命题的正确性是证明出来的，因此研究数学问题的一般证法是数学的重要内容之一.

一般地说，数学证明方法，依据得出结论的方式不同，可分成直接证法和间接证法两种. 直接证法按其思路的顺逆(即顺向和逆向)，可以分成综合法与分析法两种. 间接证法不是直接证明原命题，而是证明它的等价命题. 依据原命题的等价命题的种类不同，间接证法可分成反证法和同一法两种. 这一讲只阐明直接证法.

(一)综合法

所谓综合法就是从命题的题设(已知)出发，运用已学过的数学知识(定义、定理、公式、法则等)进行一系列的正确推理，逐步靠近目标，最后证得命题的结论. 简言之，综合法就是执因索果.

例1 已知 $a+\frac{1}{b}=1, b+\frac{1}{c}=1$，求证：$c+\frac{1}{a}=1$.

【证明】 $\because \quad a+\frac{1}{b}=1, \quad \therefore \quad a=1-\frac{1}{b}=\frac{b-1}{b}$.

从而 $\quad \frac{1}{a}=\frac{b}{b-1}$.

$\because \quad b+\frac{1}{c}=1, \qquad \therefore \quad \frac{1}{c}=1-b$.

从而 $\quad c=\frac{1}{1-b}$.

于是 $\quad c+\frac{1}{a}=\frac{1}{1-b}+\frac{b}{b-1}=\frac{1-b}{1-b}=1$.

【解说】 本题的证明方法就是上面提到的综合法，它的证题

思路用推理图表示如下：

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{a+\dfrac{1}{b}=1} & & \boxed{b+\dfrac{1}{c}=1} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\dfrac{1}{a}=\dfrac{b}{b-1}} & & \boxed{c=\dfrac{1}{1-b}} \\
 & \Downarrow & \\
 & \boxed{c+\dfrac{1}{a}=1} &
\end{array}$$

例 2　已知 a、b、c 都是实数，且 $(a-c)^2=4(a-b)(b-c)$，求证：$a+c=2b$.

【证明】　$(a-c)^2=4(a-b)(b-c)$

$\Rightarrow a^2-2ac+c^2=4(b-c)a-4b^2+4bc$

$\Rightarrow a^2+2(c-2b)a+[c^2-2c(2b)+(2b)^2]=0$

$\Rightarrow a^2+2(c-2b)a+(c-2b)^2=0$

$\Rightarrow (a+c-2b)^2=0$

$\Rightarrow a+c-2b=0$

$\Rightarrow a+c=2b$.

【解说】　用综合法证题的推理过程，除用数学符号"$\because$"和"$\therefore$"连接外，还可以用推出符号"$\Rightarrow$"连接，这样证题思路的条理性显得更清晰.

(二)分析法

所谓分析法就是从命题的结论入手，承认它是正确的，去追溯使这个结论成立的条件，然后把所得的条件作为结论，再去寻找使这个新结论成立的条件. 像这样，执果索因，一直追溯到这个条件就是已知或已学过的数学知识为止，从而就发现了从已知推出未知的证明思路，完成了命题的证明.

例 3　已知 $a^2+b^2=c^2+d^2=1$，求证：

$$(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=1.$$

【证明】 欲证$(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=1$,

只需证 $a^2d^2+2adbc+b^2c^2+a^2c^2-2acbd+b^2d^2=1$,

即证 $a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)=1$,

即证 $(c^2+d^2)(a^2+b^2)=1.$

显然,上式成立只需有条件$a^2+b^2=c^2+d^2=1$.这正是已知条件.

故 $(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=1$成立.

【解说】 本例的证明方法就采用了分析法.它的思路用推理图表示如下:

$$\boxed{(ad+bc)^2+(ac-bd)^2=1}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{a^2d^2+b^2c^2+a^2c^2+b^2d^2=1}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{a^2+b^2=c^2+d^2=1}$$

例4 用分析法证明:若$(a-b+c)(a-b-c)+ab=0$,则

$$\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1.$$

【证明】 欲证 $\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{a}{b+c}=1$,

只需证 $b(b+c)+a(a+c)=(a+c)(b+c)$,

即证 $b^2+bc+a^2+ac=ab+ac+bc+c^2$,

即证 $a^2+b^2-ab-c^2=0.$

从而只需证 $(a-b)^2-c^2+ab=0.$

这只需要有 $(a-b+c)(a-b-c)+ab=0$即可.

这正是已知条件.

故 $\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1$ 成立.

综合法从"已知"推出"未知",分析法从"未知"追溯"需知",因此,它们的思维方向恰好相反.如果把综合法的思维方向叫做顺向的话,那么分析法的思维方向就是逆向.因此,把分析法证明命题的过程颠倒过来,就是综合法.

(三)分析综合法

证数学命题的实践告诉我们,不少问题,单一地用综合法或分析法去探索其证法,很难成功,思路常常受阻.因此,需要把分析法与综合法结合起来,这就产生了分析综合法.分析综合法既考虑从已知条件出发进行推导,又考虑追溯使结论成立的条件,即从命题的两头(题设和结论)向中间靠拢,使思维更集中,目标更明确,容易发现问题的突破口,利于找到问题的简捷证法.

例 5 已知 $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$,求证:$a$、$b$、$c$ 中至少有一个等于 1.

【证明】 欲证 a、b、c 中至少有一个等于 1,

只需证 $(a-1)(b-1)(c-1)=0$,

即证 $abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1=0$ ①

由已知得 $a+b+c=1\Rightarrow(a+b+c)-1=0$ ②

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Rightarrow ab+bc+ca=abc$$

$$\Rightarrow abc-(ab+bc+ca)=0 \quad ③$$

从而由②、③两式易得①式成立.

故原命题成立.

【解说】 本例的上述证法就是分析综合法.它是从分析法入手,得出 a、b、c 中至少有一个等于 1 的条件是①式成立.然后用综合法由已知条件推出②、③两式成立,最后由②+③,即得①式成

立. 这样思考问题，思维集中、目的明确，避免证题走弯路.

习题 1.1

1. 用综合法证明：

(1)已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b}$，求证：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-1$.

(2)已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，求证：

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

(3)已知 $a=1+\frac{1}{b}$，$b=1+\frac{1}{a}$，且 $ab\neq 1$，求证：$a=b$.

(4)已知 $x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{b+c}{2}$，$b^2=ac$，求证：$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$.

(5)已知 $a^2+b^2=c^2$，$2b=a+c$，$a>0$，$b>0$，$c>0$，求证：

$$a:b:c=3:4:5.$$

2. 用分析法证明：

(1)已知$(a-c)^2-4(a-b)(b-c)=0$，求证：$a+c=2b$.

(2)已知 a、b、c 都是实数，且 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$，求证：

$$a=b=c.$$

3. 用分析综合法证明：

(1)已知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，求证：$a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2$.

(2)已知$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$，且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，求证：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

习题 1.1 答案或提示

1. (1)已知$\Rightarrow\frac{a+b}{a}+\frac{a+b}{b}=1\Rightarrow\frac{b}{a}+1+\frac{a}{b}+1=1\Rightarrow\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=-1$.

(2)已知$\Rightarrow(a+b+c)(bc+ac+ab)-abc=0$

$\Rightarrow[(a+b)+c][(a+b)c+ab]-abc=0$

$\Rightarrow(a+b)^2c+ab(a+b)+(a+b)c^2+abc-abc=0$

$\Rightarrow(a+b)[c^2+(a+b)c+ab]=0$

$\Rightarrow(a+b)(c+a)(c+b)=0$.

(3)由已知，得 $a-b=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，即 $a-b=\frac{a-b}{ab}\Rightarrow(a-b)\left(1-\frac{1}{ab}\right)=0$，又

$ab\neq1$，所以 $1-\frac{1}{ab}\neq0$，于是 $a-b=0$，即 $a=b$.

(4) $\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}=\frac{2[ab+ac+(a+b)c]}{(a+b)(b+c)}$

$=\frac{2[(ab+b^2)+(a+b)c]}{(a+b)(b+c)}=\frac{2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=2.$

(5)把 $b=\frac{a+c}{2}$ 代入 $a^2+b^2-c^2=0$ 中，解得 $a=\frac{3}{5}c$，从而 $b=\frac{4}{5}c$，于是 $a:b:c=3:4:5$.

2. (1) $a+c=2b\Leftarrow(a+c-2b)^2=0\Leftarrow[(a-b)-(b-c)]^2=0\Leftarrow(a-b)^2-2(a-b)(b-c)+(b-c)^2=0\Leftarrow[(a-b)+(b-c)]^2-4(a-b)(b-c)=0\Leftarrow(a-c)^2=4(a-b)(b-c)$.

(2) $a=b=c\Leftarrow(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Leftarrow2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0\Leftarrow a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

3. (1)欲证 $a^2+b^2+c^2=(a+b-c)^2$，即证 $a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$，即证 $ac+bc=ab$. 由已知 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$，得 $bc+ac=ab$.

(2)因为 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=1\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}\right)=1$，所以欲证 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，只需证 $\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}=0$. 由已知 $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$，$\Rightarrow ayz+bxz+cxy=0\Rightarrow\frac{cxy+ayz+bxz}{abc}=0\Rightarrow\frac{xy}{ab}+\frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}=0$.

§1.2 逆向思维法

如果把 $A\rightarrow B$ 的思维过程叫做正向(顺向)思维，那么与它的方向相反的思维过程 $B\rightarrow A$ 就叫做逆向(反向)思维. 例如，公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，把由 $(a+b)^2$ 想到 $a^2+2ab+b^2$ 这个思维过程叫做正向思维，那么由 $a^2+2ab+b^2$ 想到 $(a+b)^2$ 的思维过程就叫做逆向思维.

当前，由于受封闭式教学法的束缚，许多学生习惯于正向应用定义、公式和法则，机械地按照一些固定的模式思考问题，形成单向思维定势，造成知识和思维方法的缺陷，思想消极、懒惰，解题方法刻板、僵化，直接阻碍智力的发展. 为此，注意培养学生的逆向思

维能力已成为初中数学教学中一个重要的内容.

数学是思维的体操.初中数学中充满着逆向思维,例如逆概念、逆运算、逆命题、逆定理、分析法、反证法、定义和公式的逆用等.因此,围绕这些内容进行逆向思维训练,是提高教学质量和学生素质的一个行之有效的方法.

·(一)定义的逆用

数学中的定义都有双向性.就是说,若一个叙述为"A 是 B"(或如果 A,那么 B),则"A 是 B"(或如果 A,那么 B)为正向思维,"B 是 A"(或如果 B,那么 A)为逆向思维.人们习惯于定义的正向应用,而忽视它的逆向应用.

例 1 已知 x 满足 $|x-1|=1-x$,求 x 的取值范围.

【解】 由已知,得 $|x-1|=-(x-1)$,

即 $x-1$ 的绝对值等于它的相反数,

$\therefore$ 由绝对值的定义,得

$x-1\leqslant0$,

故 $x\leqslant1$.

【解说】 本例逆用了绝对值的定义.

例 2 已知 $a^2+2a-1=0$,$b^4-2b^2-1=0$,且 $ab^2\neq1$,求 $\left(\dfrac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1998}$ 的值.

【解】 $\because$ $a^2+2a-1=0$,又 $a\neq0$,

$\therefore$ $1+\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a^2}=0$,

即 $$\left(\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}-1=0 \quad ①$$

由 $b^4-2b^2-1=0$,得

$$(b^2)^2-2b^2-1=0. \quad ②$$

又由 $ab^2\neq1$,得 $\dfrac{1}{a}\neq b^2$,

$\therefore$ 由①、②可得$\dfrac{1}{a}$、b^2 是方程

$$x^2-2x-1=0$$

的两个根.

于是,由韦达定理(即一元二次方程根与系数的关系)得

$$\frac{1}{a}+b^2=2,\ \frac{1}{a}\cdot b^2=-1.$$

于是 $\left(\dfrac{ab^2+b^2+1}{a}\right)^{1998}=\left[\left(\dfrac{1}{a}+b^2\right)+\dfrac{1}{a}\cdot b^2\right]^{1998}$

$=(2-1)^{1998}=1.$

【解说】 本例上述解法的关键是构造方程 $x^2-2x-1=0$,而发现这个方程是由①、②两式出发,逆用方程根的概念.这个解法构思新颖,简捷明快.有人认为这种方法难想,其实难就难在逆向思维,而其解法,巧就巧在逆向思维.

(二)公式的逆用

如果 $A=B$ 是一个公式,那么由 A 想到 B 称作公式的正向应用,由 B 想到 A 称作公式的逆向应用(简称逆用).逆用公式是增强学生思维灵活性和提高解题能力的一个重要措施.

例 3 已知 a、b、c 都是实数,且 $a^2+b^2+c^2+26=2a+6b+8c$,求 a、b、c 的值.

【解】 把已知等式整理,得

$$(a^2-2a+1)+(b^2-6b+9)+(c^2-8c+16)=0,$$

即 $(a-1)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=0.$

$\because$ a、b、c 都是实数,

$\therefore$ $(a-1)^2\geqslant 0,(b-3)^2\geqslant 0,(c-4)^2\geqslant 0,$

从而 $(a-1)^2+(b-3)^2+(c-4)^2\geqslant 0.$

上式等号成立的条件为

$$a-1=0,b-3=0,c-4=0,$$

于是 $a=1,b=3,c=4.$